

מודלים חישוביים

תרגיל בית 5
(רדוקציות וסיבוכיות)

הגשה עד: 25.3.24

שאלה 1: הוכיחו שהשפה הבאה אינה ניתנת לקבלה.

$$L = \{ \langle M, A \rangle : x \notin L(M) \text{ אבל } x \in L(A) \}$$

רמז: $NOT - ACCEPT$.

שאלה 2: עבור שפה L , נסמן ב- $prefix(L)$ את שפת כל הריישות (prefixes) של L . פורמלית,

$$prefix(L) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : wu \in L \}$$

הוכיחו שאם L כריעה אז **לא בהכרח** מתקיים ש- $prefix(L)$ כריעה. זאת אומרת, קיימת שפה כריעה L כך ש- $prefix(L)$ לא כריעה. רמז: השתמשו בשפה הבאה בתור השפה L .

$$M - \text{HALT} \{ \langle M, w, n \rangle : M \text{ עוצרת על } w \text{ תוך } n \text{ צעדי חישוב} \}$$

שאלה 3: עבור מילה w , נסמן את האות i -ה של w ב- w_i . עבור שפה L נגדיר,

$$Even(L) = \{ w_2, w_4, \dots, w_{|w|} : w \in L, |w| \bmod 2 = 0 \}$$

הוכיחו שאם $L \in P$ אז **בהכרח** $Even(L) \in NP$.

שאלה 4: נתבונן בשפות הבאות שאנחנו יודעים שהן $NP - COMPLETE$ (אין צורך להוכיח שזה אכן נכון).

$$3 - \text{COLOR} = \{ \langle G \rangle : G \text{ גרף 3-צביע} \}$$

$$\text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ גרף שמכיל קליקה בגודל } k \text{ כתת גרף} \}$$

בכל סעיף, עליכם להשתמש בשפות הנ"ל כדי להוכיח שהשפה בסעיף היא NP .

תזכורת: כדי להוכיח ששפה L היא NP , (1) עליכם להראות ש- L ב- NP (להראות אלגוריתם פולינומי אי-דטרמיניסטי שמזהה את L , או להראות מוודא פולינומי עבור L), ו-(2) עליכם להראות ש- L שלמה ב- NP (דרך אפשרית זה להראות רדוקציה פולינומית ל- L משפה שכבר יודעים שהיא NP).

$$1. \quad 4 - \text{COLOR} = \{ \langle G \rangle : G \text{ גרף 4-צביע} \}$$

$$2. \quad \text{HALF - CLIQUE} = \{ \langle G \rangle : |V(G)|/2 \text{ בגודל קליקה בגודל } |V(G)|/2 \}$$

3. עבור גרף G ומספר טבעי ℓ , נגדיר תת-קבוצת צמתים של G בגודל ℓ להיות בלתי תלויה אם"ס אין אף קשת ב- G שמחברת שני צמתים שייכים לקבוצה. באופן פורמלי, קבוצת צמתים $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell\} \subseteq V(G)$ היא בלתי תלויה, אם"ס מתקיים $(v_i, v_j) \notin E(G)$ לכל $1 \leq i, j \leq \ell$. עכשיו נגדיר את השפה,

$$\text{IND - SET} = \{ \langle G, \ell \rangle : \ell \text{ בגודל לפחות } \ell \text{ בלתי תלויה בגודל } \ell \}$$

שאלה 5: נתון שהשפה הבאה היא ב- P (אין צורך להוכיח שזה אכן מתקיים).

$$EMPTY_{CFG} = \{ \langle G \rangle : L(G) = \emptyset \text{ ו-} G \text{ דקדוק ח"ה} \}$$

1. נרצה להוכיח בעזרת $EMPTY_{CFG}$ שהשפה הבאה היא גם ב- P .

$$ACCEPT_{CFG} = \{ \langle G, w \rangle : w \in L(G) \text{ ו-} G \text{ דקדוק ח"ה, מילה } w \}$$

הדרכה: (1) מכיוון ש- G הוא דקדוק ח"ה, אז אפשר לבנות ממנו א"ס מחסנית A_1 שמזהה את אותה השפה בזמן פולינומי. (2) השתמשו בתכונות סגור של שפות ח"ה כדי לבנות א"ס חדש A_2 ששפתו היא w אם ורק אם w נמצאת ב- $L(G)$. (3) בדקו ריקנות עבור A_2 .

2. הסיקו מהסעיף הקודם שכל שפה חסרת הקשר היא ב- P .

שאלה 6: בשאלה הזו עליכם לסווג את השפות למחלקה הקטנה ביותר שהן שייכות אליה מבין המחלקות: שפות רגולריות, שפות ח"ה, שפות ב- P , שפות כריעות, שפות ניתנות לקבלה או שאר השפות (שפות שאינן ניתנות לקבלה). תנו הסבר משכנע ללמה הבחירה שלכם נכונה (אין צורך בהוכחה מלאה עד הסוף), מספיק לענות רק על **שלושה** סעיפים לבחירתכם.

$$1. L = \{ w \in \{0, 1\}^* : w \text{ בתוך מספר האפסים והאחדים שווים} \}$$

$$2. L = \{ \langle G \rangle : G \text{ גרף שלא מכיל את הגרף הדו-צדדי המלא } K_{3,3} \text{ כתת גרף} \}$$

$$3. L = \{ \langle M \rangle : M \text{ מ"ט וקיימות לכל היותר } 1000 \text{ מילים שהיא מקבלת תוך } 1000 \text{ צעדים} \}$$

$$4. L = \{ \langle A, B \rangle : A, B \text{ אס"דים. } L(A) \subseteq L(B) \text{ וקיימת מילה אחת בדיוק } w \text{ כך ש-} w \in L(B), w \notin L(A) \}$$

שאלה 7 (רשות - 5 נק' בonus): הוכיחו שהשפה הבאה היא NP שלמה.

$$L = \{ \langle \phi, \psi \rangle : \phi, \psi \text{ הן נוסחאות מהצורה } 3\text{-}CNF \text{ וקיימת השמה } \alpha \text{ כך ש-} \phi(\alpha) \neq \psi(\alpha) \}$$

בהצלחה!