Exercise 13-2

(a) 已知 $Q^T Q = Q^{-1} Q = I$

則 $Q^{-T} Q^T Q = Q^{-T} I$

又 $Q^{-T} Q^T = I$

故 $Q = Q^{-T} I = Q^{-T}$

∴ $Q^{-T} = Q$ —— ①

(b) 題幹： $Q Q^T Q^{-T} Q^T Q^{-1} Q Q^{-1} Q^T$

已知 $Q^T Q = Q Q^T = Q^{-1} Q = Q Q^{-1} = I$ 又 $Q^{-T} = Q$

則 $Q Q^T Q^{-T} Q^T Q^{-1} Q Q^{-1} Q^T$

$= \cancel{Q Q^T} \cancel{Q Q^T} \cancel{Q^{-1} Q} Q^{-1} Q^T$

$= \boxed{Q^{-1} Q^T}$?

(c) 題幹： $Q^{-T} Q Q Q^{-1} A A Q^T Q A^{-1}$

又 $A = QR \Rightarrow A^{-1} = R^{-1} Q^{-1}$

$Q^{-T} Q Q Q^{-1} A A Q^T Q A^{-1}$

$= Q^{-T} Q Q Q^{-1} \underset{I}{\underline{QR}} Q R Q^T Q R^{-1} Q^{-1}$

$= \cancel{Q^{-T}} Q^{-T} Q Q R Q R R^{-1} Q^{-1}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underset{I}{\underline{\phantom{RR^{-1}}}}$

$= Q^{-T} Q Q R Q Q^{-1}$