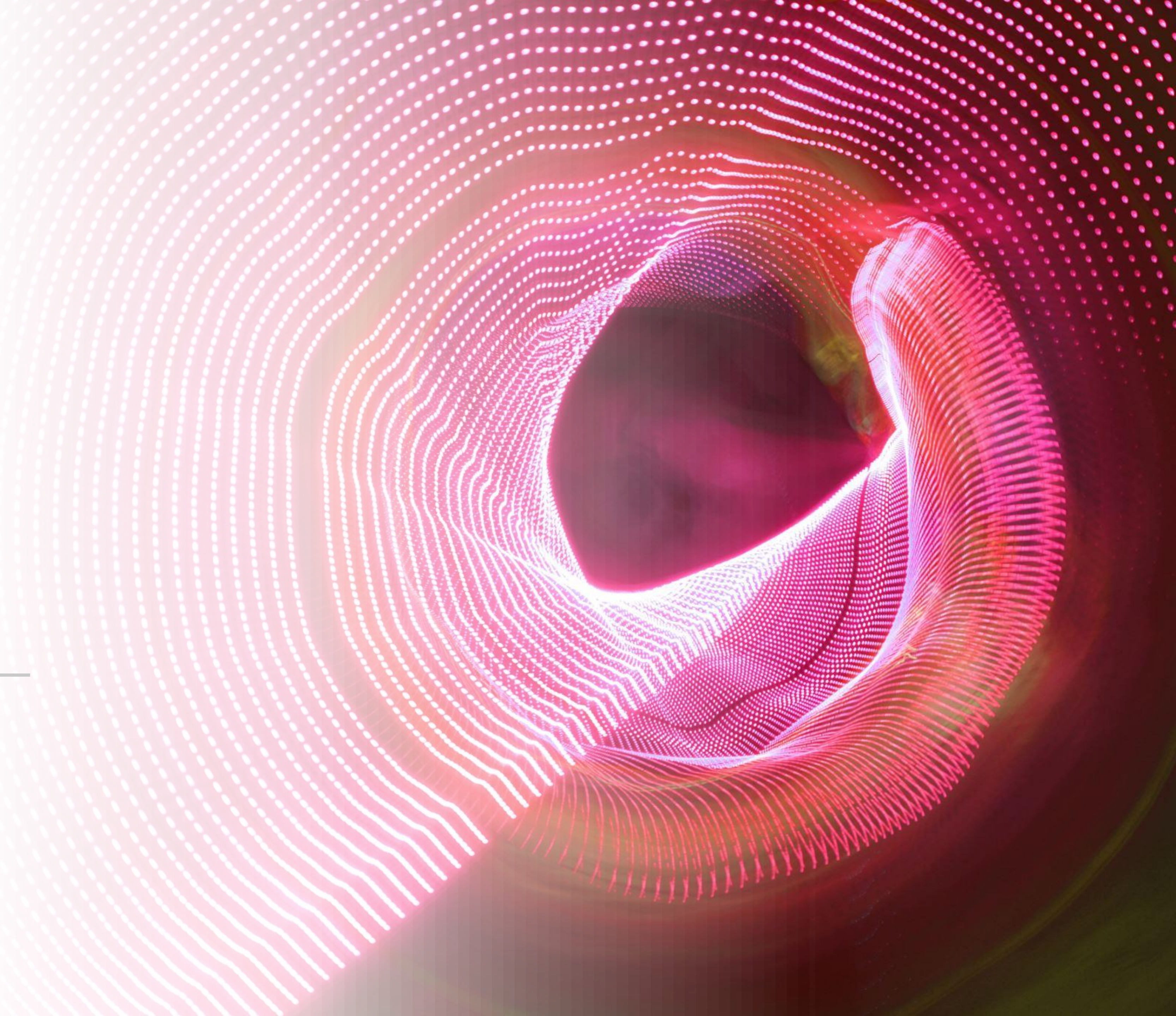
PRODUTO INTERNO EM ESPAÇOS VETORIAIS



PROFª GABRIELLE G. DOS S. RIBEIRO

Continuando..

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Se S_1 e S_2 são subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que S_1 é ortogonal a S_2, e se representa por $S_1 \perp S_2$, se qualquer vetor $v_1 \in S_1$ é ortogonal a qualquer vetor $v_2 \in S_2$.

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Se S_1 e S_2 são subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que S_1 é ortogonal a S_2, e se representa por $S_1 \perp S_2$, se qualquer vetor $v_1 \in S_1$ é ortogonal a qualquer vetor $v_2 \in S_2$.

Exemplo: Os conjuntos $S_1 = \{(0, 1, 2), (0, 2, 4)\}$ e $S_2 = \{(1, -2, 1), (2, -2, 1), (4, 6, -3)\}$

são ortogonais relativamente ao produto interno usual no $\mathbb{R}^3$.

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Exemplo: Os conjuntos $S_1 = \{(0,1,2),(0,2,4)\}$ e $S_2 = \{(1,-2,1),(2,-2,1),(4,6,-3)\}$ **são ortogonais relativamente ao produto interno usual no $\mathbb{R}^3$.**

$(0,1,2)\ .\ (1,-2,1) = (0.1)+(1.(-2))+(2.1) = 0$

$(0,1,2)\ .\ (2,-2,1) = (0.2)+(1.(-2))+(2.1) = 0$

$(0,1,2)\ .\ (4,6,-3) = (0.4)+(1.6)+(2.(-3)) = 0$

$(0,2,4)\ .\ (1,-2,1) = (0.1) + \left(2.(-2)\right) + (4.1) = 0$

$(0,2,4)\ .\ (2,-2,1) = (0.2) + \left(2.(-2)\right) + (4.1) = 0$

$(0,2,4)\ .\ (4,6,-3) = (0.4) + (2.6) + \left(4.(-3)\right) = 0$

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Teorema: Seja V um espaço vetorial euclidiano e B = $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ uma base de um subespaço S de V.

Se um vetor u ∈ V é ortogonal a todos os vetores da base B, então u é ortogonal a qualquer vetor do subespaço S gerado por B.

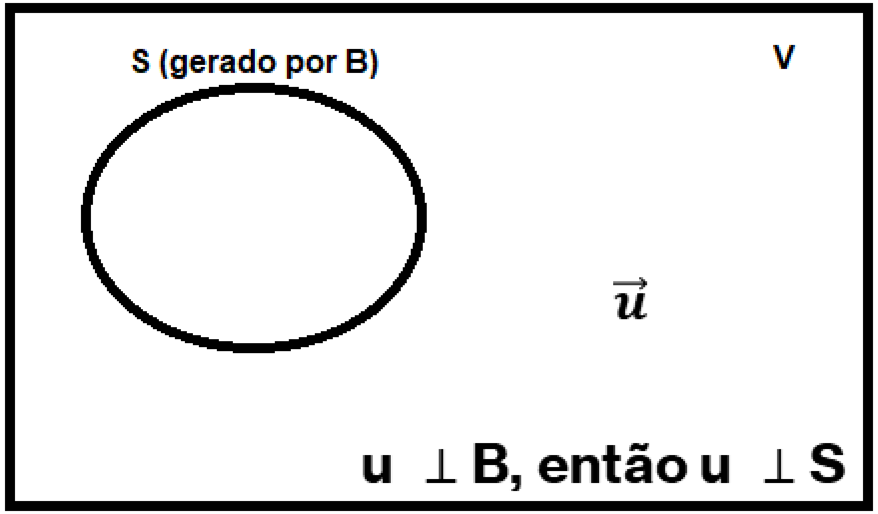
Diz-se, nesse caso, que u é ortogonal a S e se representa por u ⊥ S.

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Teorema: Seja V um espaço vetorial euclidiano e B = $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ uma base de um subespaço S de V, gerado por B.

Se um vetor u ∈ V é ortogonal a todos os vetores da base B, então u é ortogonal a qualquer vetor do subespaço S gerado por B.

Diz-se, nesse caso, que u é ortogonal a S e se representa por u ⊥ S.



COMPLEMENTO ORTOGONAL

Seja V um espaço vetorial euclidiano e S um subespaço vetorial de V. Consideremos o subconjunto de V formado pelos vetores que são ortogonais a S:

$$S^{\perp} = \{v \in V / v \perp S\}$$

Esse subconjunto $S^{\perp}$ de V é chamado ***complemento ortogonal de S.***

COMPLEMENTO ORTOGONAL

Vamos considerar duas propriedades:

1. $S^{\perp}$ é subespaço de V

1. Se S é subespaço vetorial de V, então

V = S $\oplus$ $S^{\perp}$

Isto é, V é a soma direta de S e $S^{\perp}$.

COMPLEMENTO ORTOGONAL

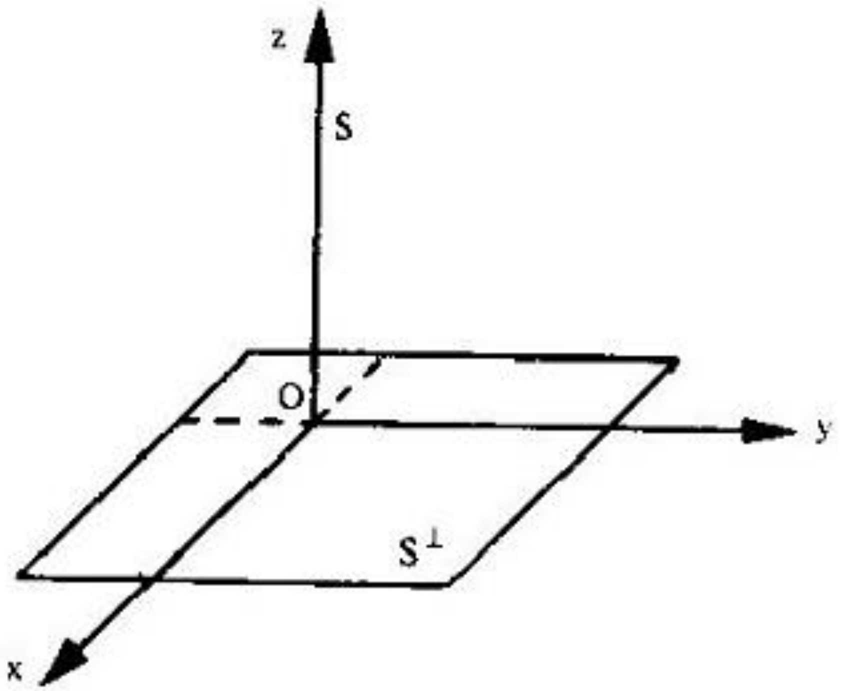
Exemplo 1:

Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e

$S = \{(0, 0, c)/c \in \mathbb{R}\}$ (eixo dos z)

Então:

$S^{\perp} = \{(a, b, 0)/a, b \ \mathbb{R}\}$ (plano xOz)



COMPLEMENTO ORTOGONAL

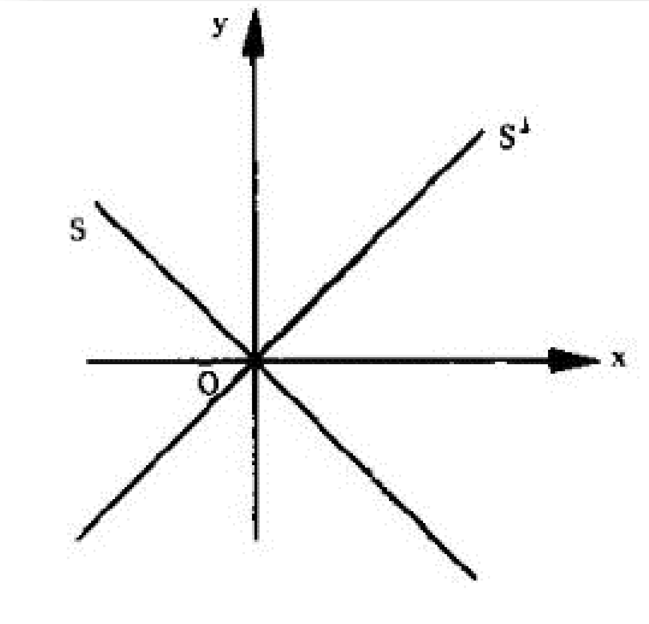
Exemplo 2:

2) Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $S = \{(x, -x)/x \in \mathbb{R}\}$.

Então:

$S^\perp = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}$

uma vez que $(x, -x) . (x, x) = x^2 - x^2 = 0$



Exercício

Seja o produto interno usual no $\mathbb{R}^4$ e o subespaço, de dimensão 3,

S = [(1, 0, 2, 1), (0,1,2,1), (0,0,1,-3)]

Determine $S^{\perp}$.