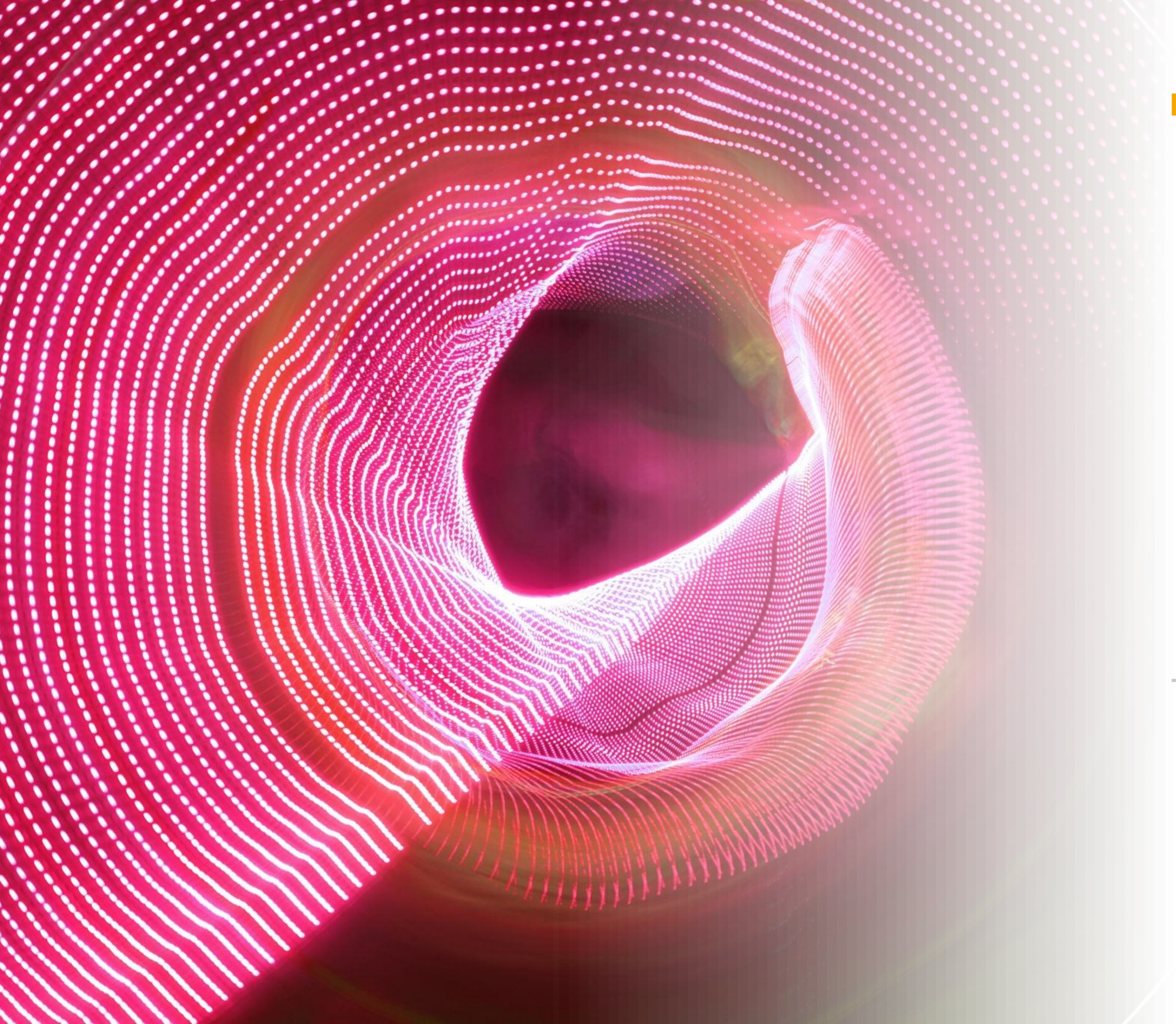
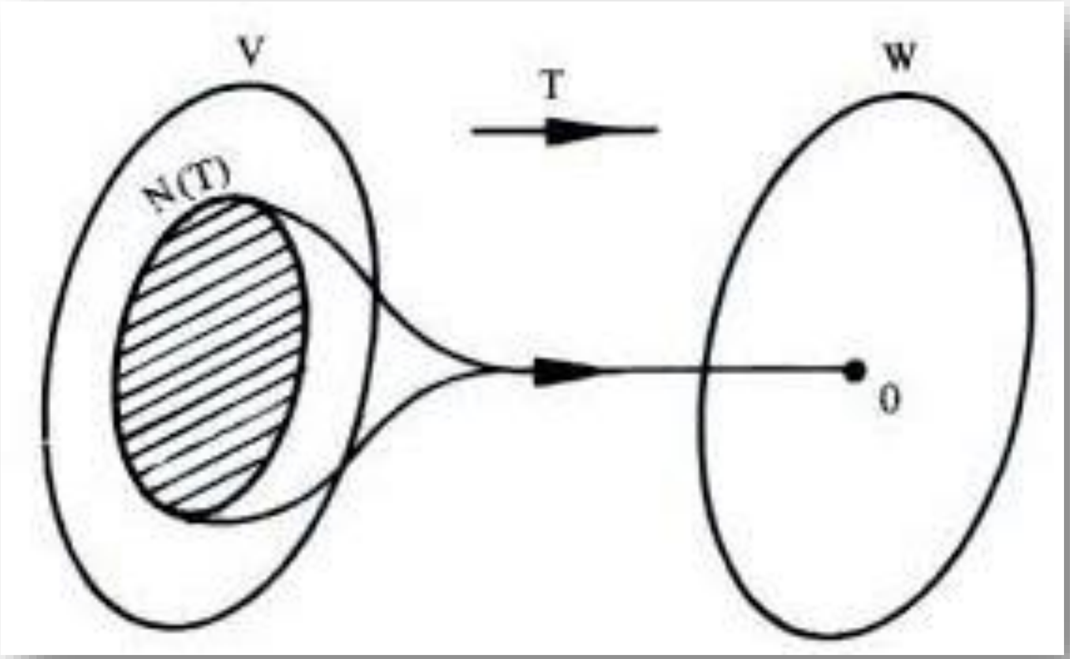


Núcleo de Transformações Lineares

PROFª GABRIELLE G. DOS S. RIBEIRO

Núcleo de uma transformação linear



- Chama-se ***núcleo*** de uma transformação linear T: V → W ao conjunto de vetores $v \in V$ que são transformados em 0 → W.
- Indica-se esse conjunto por N(T) ou ker(T):

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$$

Observa-se que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0)=0$.

Exemplo 1

O núcleo da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

é o conjunto:

$$N(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0) \}$$

o que implica:

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad x = 0 \quad e \quad y = 0$$

Neste caso o núcleo é formado apenas pelo vetor nulo.

$$N(T) = \{ (0, 0) \}$$

Exemplo 2

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por:

$T(x, y, z) = (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z)$

Nesse caso, temos:

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}$

$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0)$

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases} \qquad x = -3z \text{ e } y = z.$$

Logo:

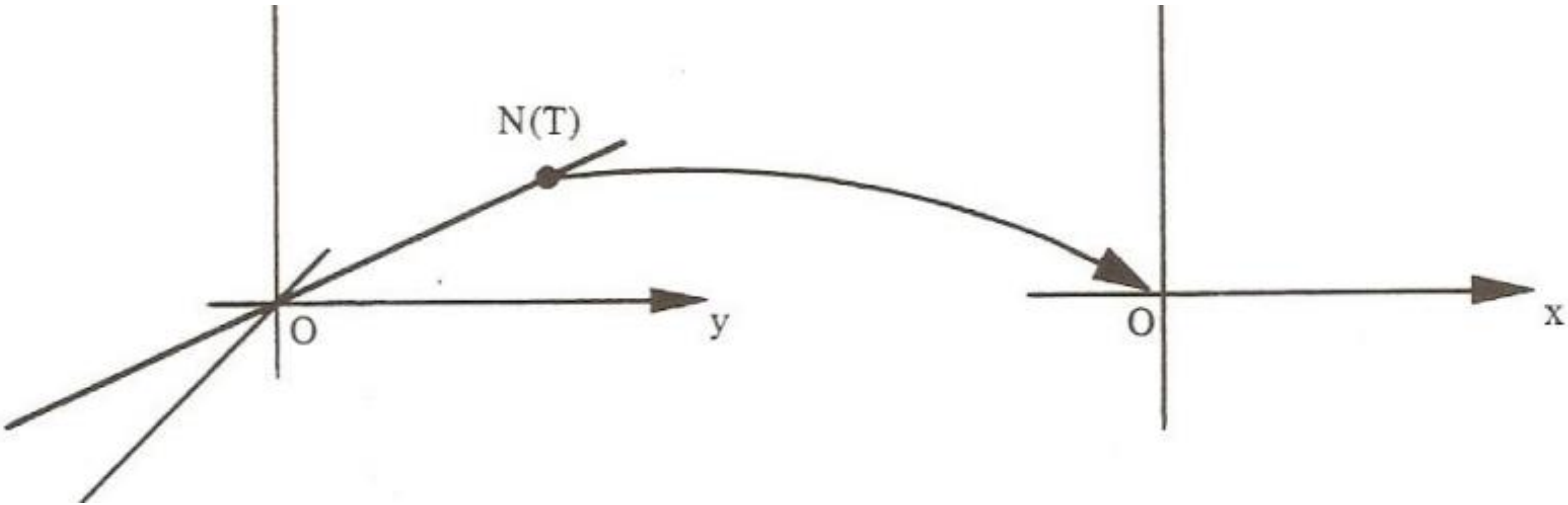
$N(T) = \{(-3z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = \{z(-3, 1, 1)/z \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = [(-3, 1, 1)]$

Exemplo 2

Observamos que esse conjunto representa uma reta do $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tal que todos os seus pontos tem por imagem a origem no $\mathbb{R}^2$.



Propriedades do Núcleo

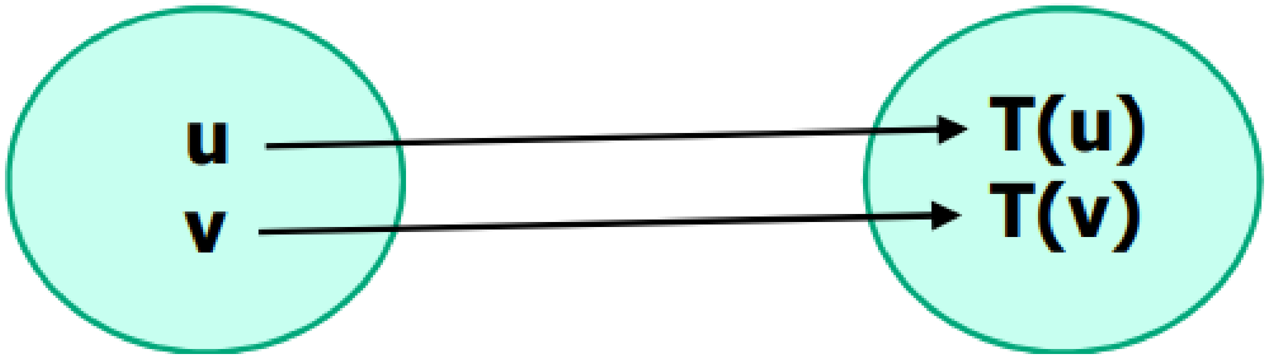
1. **O núcleo de uma transformação linear T: V → W é um subespaço vetorial de V.**

Propriedades do Núcleo

Definição:

Dada uma aplicação (função) T: V→W,
T é ***injetora*** se ∀ v_1, v_2 ∈ V:

- T(v_1) = T(v_2) implica v_1 = v_2 ou,
- T(v_1) ≠ T(v_2) implica que $v_1 \neq v_2$.



Ou seja, vetores diferentes devem possuir imagens diferentes. Não pode ter vetores diferentes com a mesma imagem no contradomínio

Exemplos

1) A transformação linear $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y)=(x,y,x+y)$ é injetora.

Sejam $(x,y),(z,t)\in\mathbf{R}^2$.

Se $T(x,y)=T(z,t) \therefore (x,y,x+y)=(z,t,z+t)$.

Então $\begin{cases} x=z \\ y=t \\ x+y=z+t \end{cases}$

Logo, $(x,y)=(z,t)$.

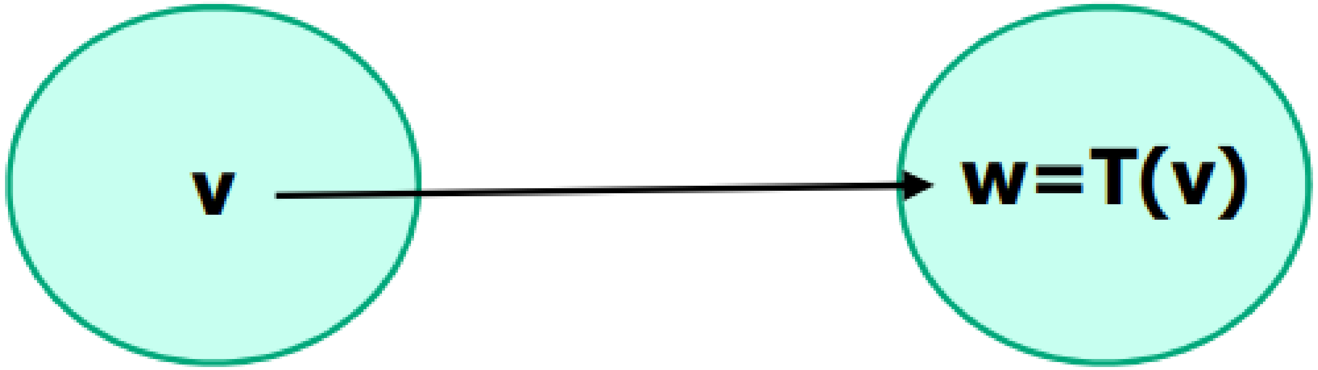
2) Seja o operador linear no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(x,0,0)$, que associa a cada vetor sua projeção ortogonal no eixo X.

Considere os vetores $(2,1,3)$ e $(2,0,-4)$.

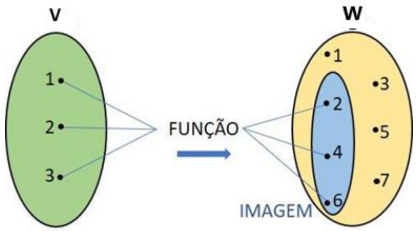
Assim, $T(2,1,3)=T(2,0,-4)=(2,0,0)$.

Então, T não é injetora, pois $T(v)=T(u)$ com $v\neq u$.

Propriedades do Núcleo



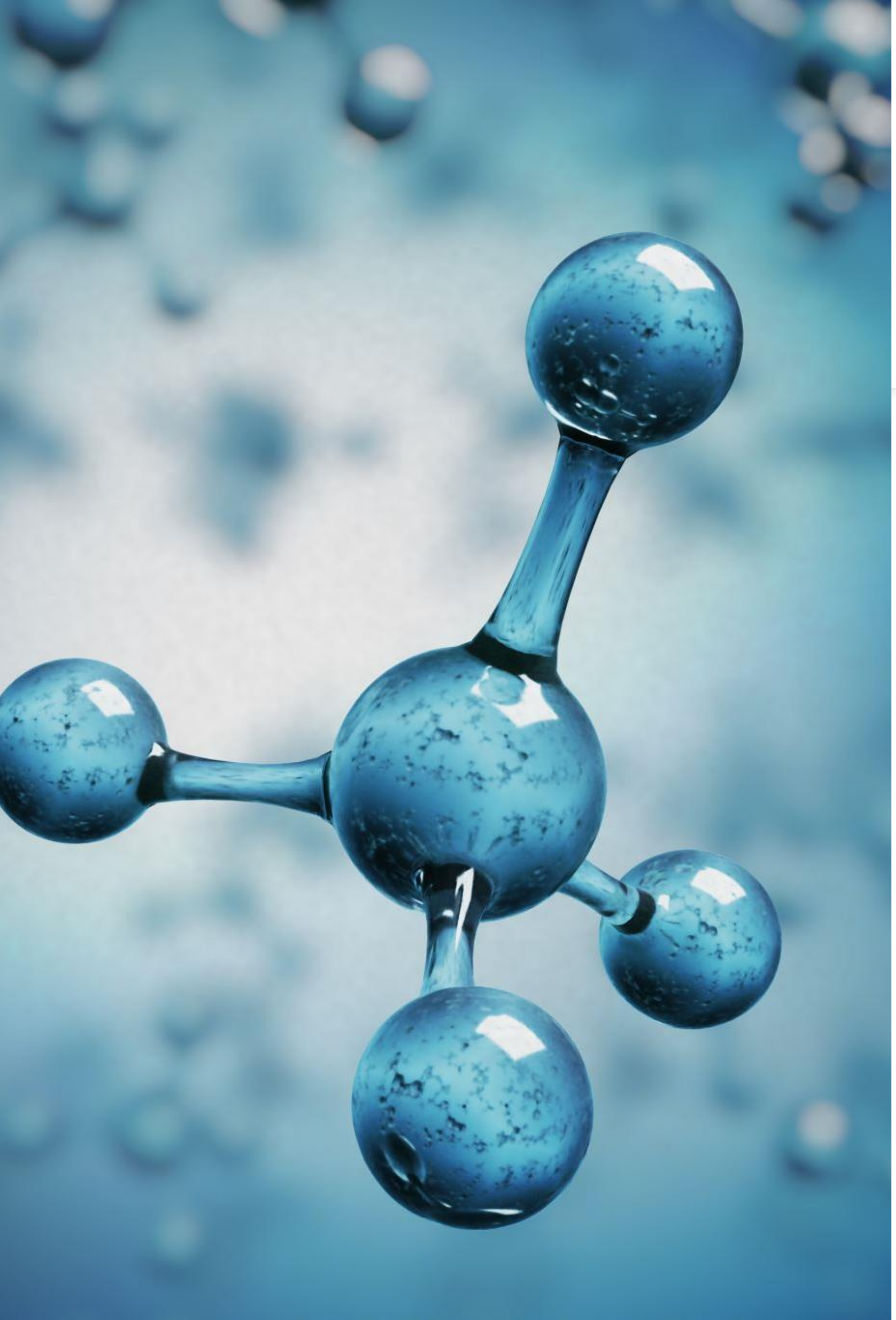
Lembrete: Nem todos os vetores w pertencentes ao contradomínio (espaço vetorial W) pertencem também ao conjunto Imagem.



Definição:

A aplicação (função) T: V→W, T é ***sobrejetora*** se a imagem de T coincidir com W, ou seja T(V) = W (imagem = contradomínio). Em outras palavras,

- T é *sobrejetora* se dado w ∈ W, existir v ∈ V tal que T(v) = w.
- Ou seja, todos os vetores do contradomínio (espaço vetorial W) são imagens de algum vetor do domínio (espaço vetorial V).
- Portanto o contradomínio (imagem de T) e o espaço vetorial W são o mesmo conjunto (coincidem).



Propriedades do Núcleo

Definição

Transformação Linear Bijetora – Isomorfismo

Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é ***bijetora*** quando for *injetora e sobrejetora*. Transformações lineares bijetoras são também denominadas <u>isomorfismos</u> e, consequentemente, V e W são denominados espaços vetoriais isomorfos.

Propriedades do Núcleo

2. Uma transformação linear T: V → W é *injetora* se, e somente se, N(T) = {0}.

"Pois quando o Núcleo não é vazio, ou tem mais vetores além do vetor nulo, nós temos diversos vetores diferentes que tem como imagem o vetor nulo, o que fere a condição para ser injetora, que vetores diferentes não podem ter a mesma imagem"

Exercícios

Determine o núcleo do operador linear:

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

Exercício

Determine o núcleo do operador linear:

T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x, y, z) = (x + 2y – z, y + 2z, x + 3y + z)

N(T) = {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$/ T(x, y, z) = (0, 0, 0)}

Então, (x + 2y – z, y + 2z, x + 3y + z) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Solução é } (5z, -2z, z)\text{ , } z \in \mathbb{R}$$

Logo:

N(T) = {(5z, -2z, z)/z ∈ $\mathbb{R}$} = {z(5, -2, 1)/ z ∈ $\mathbb{R}$} = [(5, -2, 1)]