REVISÃO DO CONTEÚDO DO 2º BIMESTRE

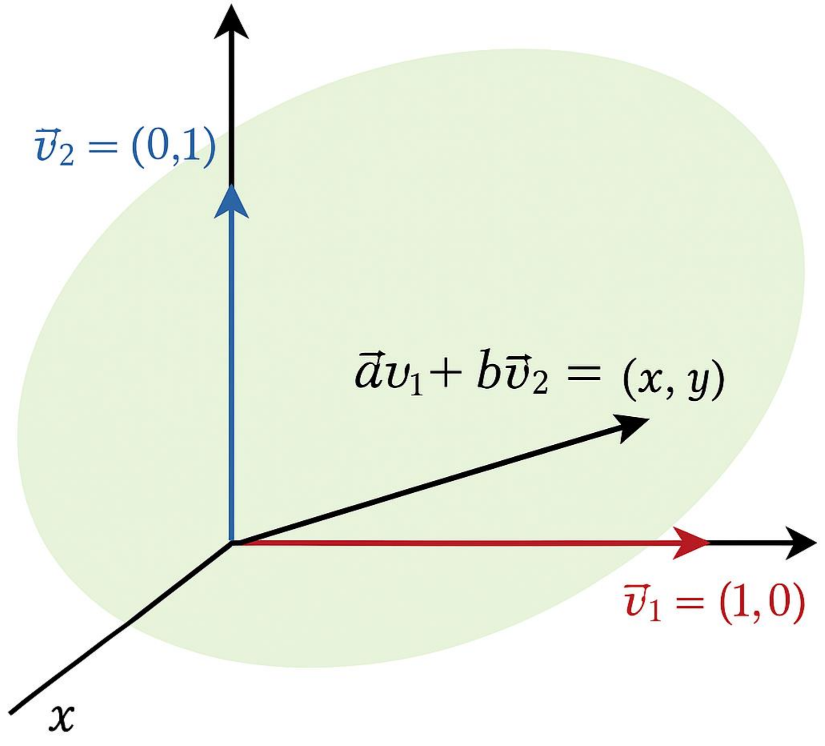
Profª Gabrielle G. dos S. Ribeiro

SUBESPAÇOS GERADOS

Subespaço Gerado

- Pensem em dois vetores no plano, por exemplo $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$.
  Todos os pontos que podemos alcançar combinando esses dois vetores (com qualquer multiplicador real) formam o plano inteiro.

- Já se eu tiver apenas um deles, digamos $v_1 = (1,0)$, só consigo alcançar pontos de uma reta. O conjunto de todos esses pontos é o que chamamos de **subespaço gerado** por v_1.



Subespaços Gerados

- Seja **V** um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto

A = $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset$ V, A $\neq \emptyset$.

- O conjunto **S** de todos os vetores de **V** que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

Simbolicamente, o subespaço S é:

$$S = \{v \in V / \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \in IR\}$$

Subespaços Gerados

“O **subespaço gerado** por um conjunto de vetores é o conjunto de todas as suas combinações lineares possíveis.”

$$\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

OBS.: O **span** de um conjunto de vetores é o conjunto de todos os vetores que posso alcançar combinando esses vetores de todas as formas possíveis.

Subespaços Gerados

- Exemplos:

1) Os vetores **i = (1, 0)** e **j = (0, 1)** geram o IR^2, pois qualquer (x, y) $\in IR^2$ é combinação linear de **i** e **j**:

(x,y) = a.**i** + b.**j** = a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)

(x,y) = (a,b)

Exemplo: (2,4) = 2(1,0) + 4(0,1) = (2,4)

Então, [i,j] = $\boldsymbol{R^2}$

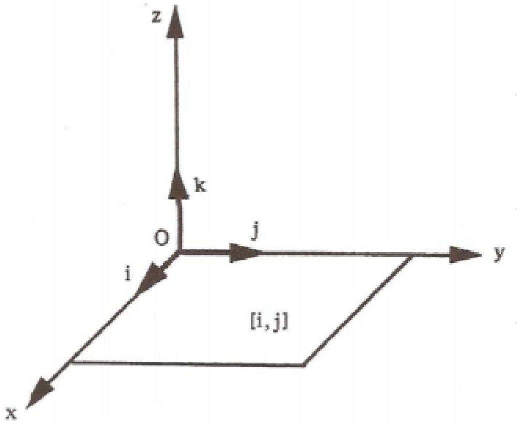
Percebe-se que **para qualquer vetor** (x, y)$\in \mathbb{R}^2$,**sempre existem** números reais $a = x$ e $b = y$ que satisfazem a igualdade.

Subespaços Gerados

2) Os vetores **i = (1, 0, 0)** e **j = (0, 1, 0)** do IR^3 geram o subespaço

$$S = \{(x, y, 0) \in IR^3 / x, y \in IR\}$$

pois



(x,y,0) = a.**i** + b.**j** = a(1,0,0) + b(0,1,0) = (a,0,0) + (0,b,0) = (a,b,0)

(x,y,0) = (a,b,0)

Exemplo: (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) = (1,2,0)

[i, j] = S é um subespaço do IR^3 e representa, geometricamente, o plano xOy.

Exemplo 3

Quais são os vetores gerados por $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2,2)$?

Span{v1,v2} = $a(1,1) + b(2,2)$ = (a + 2b , a + 2b)

Isso mostra que todas as combinações têm as duas coordenadas iguais.

Logo, o conjunto gerado é:

$$\{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) / x \in \mathbb{R}\}$$

Observações

- **Todo conjunto de vetores em um espaço vetorial gera *algum* subespaço** — mesmo que seja o **subespaço nulo** (o mais "pequeno" possível).

O que pode acontecer é que esse subespaço seja:

1. O **espaço inteiro**, como

$$\mathrm{Span}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

2. Uma **reta (dimensão 1)**, como

$$\mathrm{Span}\{(2,1)\} = \{(a,b) \mid b = \tfrac{1}{2}a\}$$

3. Ou até mesmo o **subespaço nulo**, ou seja,

$$\mathrm{Span}\{(0,0)\} = \{(0,0)\}$$

Então o único caso que "não gera nada novo" é:

$$S = \{(0,0)\}$$

Exercícios

1. Seja V= $\boldsymbol{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo vetor v=(1, 2, 3).

2. Determine o conjunto gerado por cada par de vetores:

a) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,4,6)$
b $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$

3. Verifique se o vetor (3, 4) pertence ao **span** de $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,1)$.

Exercícios

1. Seja V= $\boldsymbol{R^3}$. Determine o subespaço gerado pelo vetor v=(1, 2, 3).

Solução:

Temos: S = {(x,y,z) ∈ $\boldsymbol{R^3}$/ (x,y,z) = a(1, 2, 3), a ∈ R}

Então, de (x,y,z) = a(1,2,3) vem que:

x=a, y=2a e z=3a

Ou seja, y=2x e z=3x

Logo,

S = {(x,y,z) ∈ $\boldsymbol{R^3}$/ y=2x e z=3x} ou S = {(x,2x,3x); x ∈ R}

Exercícios

2. a)

Solução:

a(1,2,3) + b(2,4,6) = (a+2b , 2a+4b , 3a+6b) = (t, 2t, 3t)

onde $t = a + 2b$ (qualquer $t \in \mathbb{R}$ pode ser obtido por escolha de a, b).

Span {(1,2,3),(2,4,6)} = { t(1,2,3) | t ∈ R}

Ou

Span {v1,v2} = {(x, 2x, 3x)| x ∈ R} = { x(1,2,3) | x ∈ R}

Exercícios

2. b)

Solução:

$$av_1 + bv_2 = a(1,0,1) + b(0,1,1) = (a, b, a+b).$$

Chamando (x, y, z)= $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{a} + \mathrm{b})$,obtemos a relação

$$a = x \,;\, b = y$$
$$z = a + b = x + y$$

Span {v1, v2} = { (x, y, z) ∈ R^3 | z = x+y}.

Exercícios

3.

Solução:

Um vetor (x, y) pertence ao *span* de {v1, v2) se existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$av_1 + bv_2 = \text{(x, y)}$$

Substituindo os vetores:

$$a(1,2) + b(2,1) = (3,4)$$

Ou seja:

$$(a + 2\mathrm{b}, 2\mathrm{a} + \mathrm{a}) = (3,4)$$

Isso gera o **sistema de equações lineares**:

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

Exercícios

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

Da primeira equação: $a = 3 - 2b$

Substituindo na segunda:

$$2(3 - 2b) + b = 4$$
$$6 - 4b + b = 4$$
$$6 - 3b = 4$$
$$-3b = -2$$
$$b = \frac{2}{3}$$

Substituindo em $a = 3 - 2b$:

$$a = 3 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

Como existem números reais $a = 5/3$ e $b = 2/3$ que satisfazem $av_1 + bv_2 = (3,4)$,concluímos que:

$$\boxed{(3, 4) \in Span\{(1, 2), (2, 1)\}}$$

Dependência e Independência Linear

Introdução

- **Dependência Linear:**

Um conjunto de vetores é linearmente dependente se pelo menos um vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Isso quer dizer que:

- Basta **um** vetor ser “redundante”, isto é, poder ser obtido a partir dos outros, para que **todo o conjunto** seja dependente.

- E ele **não precisa** ser combinação de todos os outros, só de **alguns** deles.

- **Independência Linear:**

Um conjunto de vetores é linearmente independente se nenhum vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Dependência e Independência Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores em um espaço vetorial V.

- **Linearmente dependentes:** existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$, **não todos zero**, tais que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

- **Linearmente independentes:** a única solução de

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

é $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Observação

No exemplo do início da aula, vimos que $v_1 = (1{,}0)$ gera pontos de uma reta.

Se eu pegar os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (2, 0)$ o espaço gerado muda?

$$a(1,0) + b\,(2,0) = (a + 2b\ ,\ 0)$$

Isso significa que o espaço gerado é o conjunto de todos os vetores da forma (x, 0) ,ou seja, **todos os pontos da reta no eixo x**.

- O espaço gerado por $\{(1, 0)\}$ e por $\{(1, 0), (2, 0)\}$ é **exatamente o mesmo**:

- Então, **o espaço gerado não muda**.

Observação

- **O que isso tem a ver com dependência linear?**

Veja que o vetor (2, 0) é **múltiplo** de (1, 0)?

$$(2, 0) = 2(1, 0)$$

Ou seja, **um deles pode ser obtido a partir do outro**. Quando isso acontece, dizemos que **os vetores são linearmente dependentes** — há uma **redundância** na geração, porque um deles **não adiciona direção nova** ao espaço gerado.

Dependência e Independência Linear

EXEMPLO: No espaço vetorial do R³, $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (-1, 0, -2)\ e\ v_3 = (2, -3, 1)$ formam um conjunto **linearmente dependente**, pois:

x. v_1 + y. v_2 + z. $v_3 = 0$ → x. (2, -1, 3)+ y. (-1, 0, -2)+ z. (2, -3, 1) = 0

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p = 2 q = 2 < n = 3 → sistema SPI (z é variável livre)

L2 ~2L2 + L1 L3 ~L3 – L2

L3 ~2L3 – 3L1

* z é uma variável livre, portanto as soluções de x e y serão em função de z.

-y-4z = 0 → y = -4z

2x-y+2z=0 → 2x – (-4z) + 2z = 0 → x = -3z

S = (-3z, -4z, z) ou z(-3, -4, 1)

Portanto, **-3v1 -4v2 +v3 = 0 ou 3v1 + 4v2 – v3 = 0**

Exercício

- No espaço vetorial M(2,2), o conjunto A é LD ou LI?

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercício

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou, de modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$.

Portanto, como existem soluções $a_i \neq 0$ para a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$, o conjunto é LD.

Dependência e Independência Linear

- **Observações:**

1) Para o caso particular de dois vetores, temos: “Dois vetores $v1$ e $v2$ são LD se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro.”

2) Se um conjunto contiver o vetor nulo, então ele é LD, uma vez que o vetor nulo pode ser escrito como c.l. de qualquer conjunto de vetores.

BASE
E
DIMENSÃO

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

- Um conjunto B = $\{v_1\ , v_2\ , ..., v_n\ \}$ ⊂ V é uma **base** do espaço vetorial V se satisfaz as condições:

I) **B é LI;**

II) **B gera V.**

Mas se o número de vetores for igual à dimensão do espaço, basta verificar *apenas a condição I*, porque a II vem automaticamente.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

◆ **Teorema Fundamental**

Em um espaço vetorial de dimensão n, qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes automaticamente gera o espaço.

Ou seja:

- **2 vetores LI em** $\mathbb{R}^2$ →já é base (gera o plano).
- **3 vetores LI em** $\mathbb{R}^3$ →já é base (gera o espaço inteiro).

📌 Portanto, se você já verificou a linearidade independente e o número de vetores igual à dimensão, a condição de gerar é consequência lógica.

Então por que a definição ainda menciona as duas condições?

A definição com as duas condições (LI e gerar) é **a definição geral**, válida para qualquer conjunto, **sem saber o tamanho dele**.

Ela é útil quando:

- O conjunto tem mais vetores do que a dimensão (sobredimensionado);
- O conjunto tem menos vetores que a dimensão.

Conclusão

Em $\mathbb{R}^n$:

- Se um conjunto possui n vetores e é LI $\Rightarrow$ ele é automaticamente uma base.
- Se possui n vetores e gera o espaço $\Rightarrow$ também é automaticamente LI.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

- **Exemplos: 1)** B={(1,1), (-1,0)} é uma base do $\mathbb{R}^2$, denominada base canônica. De fato:

I) B é LI, pois a(1,1) + b(-1,0) = (0,0) implica: $\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

E daí: a=b=0

E como o conjunto possui 2 vetores, que é igual a dimensão do espaço vetorial, pode-se assumir que ele é base do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2

- **Exemplo em $\mathbb{R}^3$ de conjunto LI mas que não gera o $\mathbb{R}^3$:**

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

- Esses vetores são LI
- Mas não geram todo o $\mathbb{R}^3$ (só geram o plano $z = 0$).

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Introdução

Lembrando!

Chama-se produto escalar (ou **produto interno usual**) de dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e v = (x_2, y_2), e se representa por ***u.v*** , ao número real:

$$\boldsymbol{u.v = x_1 . x_2 + y_1 . y_2}$$

O produto escalar de u por v também é indicado por **<u, v>** e se lê **“u escalar v”** ou **“produto interno dos vetores u e v”.**

Produto Interno

- Seja V um espaço vetorial. Um **produto interno em V** é uma função V x V que a cada par de vetores (u, v) $\in$ VxV associa um número real, denotado por u.v ou $<u, v>$, que satisfaz as seguintes condições:

P1) $u \,.\, u \geq 0$;

P2) $u \,.\, u = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

P3) $u \,.\, v = v.\, u$;

P4) $(u+v) \,.\, w = u.w + v.w$

P5) $(ku) \,.\, v = k\,(u \,.\, v)$, para todo real k.

Produto Interno

- Exemplo:

No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, a função que associa a cada par de vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o número real

$$u \, . \, v = 3x_1x_2 + 4y_1y_2$$

é um produto interno.

De fato:

P1) u . u $= 3\, x_1\, x_1 + 4\, y_1\, y_1 = 3\, {x_1}^2 + 4\, {y_1}^2 \geq 0$;

P2) u . u $= 3\, {x_1}^2 + 4\, {y_1}^2 = 0$ se, e somente se, u = 0;

P3) u . v $= 3\, x_1\, x_2 + 4\, y_1\, y_2 = 3\, x_2\, x_1 + 4\, y_2\, y_1 =$ v. u ;

Produto Interno

P4) (u+v) . w = u.w + v.w

(u+v) . w = $(x_1 + x_2, y_1 + y_2).(x_3,\ y_3)$ = 3$(x_1 + x_2).\ x_3$+4$(y_1 + y_2).\ y_3$

=(3$x_1 x_3$+ 3$x_2 x_3$)+ (4$y_1 y_3$ + 4$y_2 y_3$) = (3$x_1 x_3$+ 4$y_1 y_3$) + (3$x_2 x_3$ +4$y_2 y_3$) = u.w + v.w

P5) (ku) . v = k (u . v) , para todo real k.

(ku).v = (k x_1 ,k y_1).(x_2, y_2) = 3(k x_1) x_2+4(k y_1) y_2=

= k(3 x_1 x_2)+k(4 y_1 y_2) = k(3x_1 x_2+ 4 y_1 y_2) = k(u.v)

Módulo de um Vetor

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno < , >. Dado um vetor v ∈ V chama-se norma, módulo ou comprimento de v o número real não-negativo, indicada por |v|, definido por:

$$|v| = \sqrt{\langle v\ ,\ v \rangle}$$

ou

$$|v| = \sqrt{v.v}$$

Então, se v= (x_1, y_1, z_1) for um vetor do $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual, tem-se:

$$|v| = \sqrt{(x_1, y_1, z_1).(x_1, y_1, z_1)} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

Módulo de um Vetor

Distância entre dois vetores

Chama-se distância entre dois vetores (ou pontos) u e v o número real representado por d(u,v) e definido por:

$$d(u\ ,\ v) = |u - v|$$

Módulo de um Vetor

Distância entre dois vetores

Sendo $u = (x_1, y_1, z_1)$ e v= (x_2, y_2, z_2) vetores do $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual, tem-se:

d(u , v) = |u – v| = $|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)|$ =

$$\sqrt{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)}$$

Então

d(u , v) = $\sqrt{(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})^2 + (\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2})^2 + (\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2})^2}$

Módulo de um Vetor

Observações:

- Se |v| = 1, isto é, v . v = 1, o vetor v é dito um *vetor unitário*. Dizemos, também que v está *normalizado.*
- Todo vetor v não-nulo pode ser normalizado. Basta fazer

$$u = \frac{v}{|v|}$$

Exemplo

Consideremos o espaço V = $\mathbb{R}^{3}$ com o produto interno $v_1 . v_2 = 3x_1\ x_2 + 2\ y_1\ y_2 + z_1\ z_2$, sendo $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Dado o vetor v = (-2, 1, 2) ∈ $\mathbb{R}^{3}$, em relação a esse produto interno tem-se:

$$|v| = \sqrt{(-2,1,2).(-2,1,2)} = \sqrt{3(-2)^2 + 2(1)^2 + 2^2} = \sqrt{12+2+4} = \sqrt{18}$$

E normalizando v, resulta:

$$\frac{v}{|v|} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{18}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right)$$

VETORES ORTOGONAIS

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Diz-se que dois vetores u e v de V são ortogonais se, e somente se, u . v = 0.

Exemplo:

Seja V = $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial euclidiano em relação ao produto interno

$(x_1, y_1).(x_2, y_2)$ = $x_1\ x_2\ + 2y_1\ y_2$. Em relação a este produto interno, os vetores u=(-3,2) e v=(4,3) são ortogonais, pois:

u . v = -3(4) + 2.(2).(3) = 0

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é *ortogonal* se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é,

$$\boldsymbol{v_i \cdot v_j = 0 \quad \textbf{para} \quad i \neq j}$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos A = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente (LI).

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

BASE ORTOGONAL

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é ortogonal se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Assim, levando em conta o teorema anterior, se dim V = n, **qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma base ortogonal.**

Por exemplo, o conjunto apresentado no exemplo anterior

{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)}

É uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

BASE ORTONORMAL

Uma base B= $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é *ortonormal* se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é:

$$v_i . v_j = \begin{cases} 0 & para\ i \neq j \\ 1 & para\ i = j \end{cases}$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

OBSERVAÇÃO:

Já vimos que se v é um vetor não-nulo, o vetor $\frac{v}{|v|}$ é unitário. Diz-se, nesse caso, que v está normalizado. Esse processo se chama normalização de v.

Assim, uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada vetor.

Por exemplo, a base B= $\{v_1, v_2, v_3\}$, sendo v_1=(1, 1, 1), $v_2 = (-2, 1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 1)$, é ortogonal em relação ao produto interno usual. Normalizando cada vetor, obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1+1+1}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(-2, 1, 1)}{\sqrt{4+1+1}} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{0+1+1}} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

e $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal do R^3.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base qualquer B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

A base *ortogonal* será $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$

Para se obter uma base *ortonormal* a partir dela, basta normalizar cada w_i fazendo $\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{w_i}}{|\boldsymbol{w_i}|}$

Assim, obteremos a **base *ortonormal* B' = $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$**, obtida a partir da base B.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n$ podem ser expressos do seguinte modo:

I) $w_1 = v_1$

II) $w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) \times u_1$

III) $w_3 = v_3 - (v_3 \cdot u_2) \times u_2 - (v_3 \cdot u_1) \times u_1$

.

.

.

Lembrando que $u_i = \frac{w_i}{|w_i|}$

De forma genérica:

$$w_n = v_n - (v_n \cdot u_{n-1}) \times u_{n-1} - \ldots - (v_n \cdot u_2) \times u_2 - (v_n \cdot u_1) \times u_1$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **COMPONENTE DE UM VETOR NUMA BASE ORTOGONAL**

Seja V um espaço vetorial euclidiano e B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortogonal de V. Para um vetor w ∈ V, tem-se:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{a_1\, v_1} + \ldots + \boldsymbol{a_i\, v_i} + \ldots + \boldsymbol{a_n\, v_n}$$

Efetuando o produto interno de ambos os membros da igualdade por v_i, vem:

$$\mathrm{w} \,.\, \boldsymbol{v_i} = a_1\,(v_1.\,v_i) + \ldots + a_i\,(v_i.\,v_i) + \ldots + a_n(v_n.\,v_i)$$

Ou

$$\mathrm{w} \,.\, \boldsymbol{v_i} = a_i\,(v_i.\,v_i) \quad \text{pois } v_j.\,v_i = 0 \text{ para } i \neq j$$

Logo: $\boldsymbol{a_i} = \dfrac{\boldsymbol{w\,.\,v_i}}{\boldsymbol{v_i\,.\,v_i}}$ **é a expressão da i-ésima coordenada de w em relação à base B.**

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Observação:** No caso particular de B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ser uma base ortonormal de V, os coeficientes a_i do vetor w são dados por:

$$\boldsymbol{a_i = w \,.\, v_i}$$

pois $\boldsymbol{v_i} \,.\, \boldsymbol{v_i}$ = 1

CONJUNTOS ORTOGONAIS

Se S_1 e S_2 são subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que S_1 é ortogonal a S_2, e se representa por $S_1 \perp S_2$, se qualquer vetor $v_1 \in S_1$ é ortogonal a qualquer vetor $v_2 \in S_2$.

Exemplo: Os conjuntos $S_1 = \{(0,1,2),(0,2,4)\}$ e $S_2 = \{(1,-2,1),(2,-2,1),(4,6,-3)\}$

são ortogonais relativamente ao produto interno usual no $\mathbb{R}^3$.

COMPLEMENTO ORTOGONAL

Seja V um espaço vetorial euclidiano e S um subespaço vetorial de V. Consideremos o subconjunto de V formado pelos vetores que são ortogonais a S:

$$S^{\perp} = \{v \in V / v \perp S\}$$

Esse subconjunto $S^{\perp}$ de V é chamado ***complemento ortogonal de S.***

COMPLEMENTO ORTOGONAL

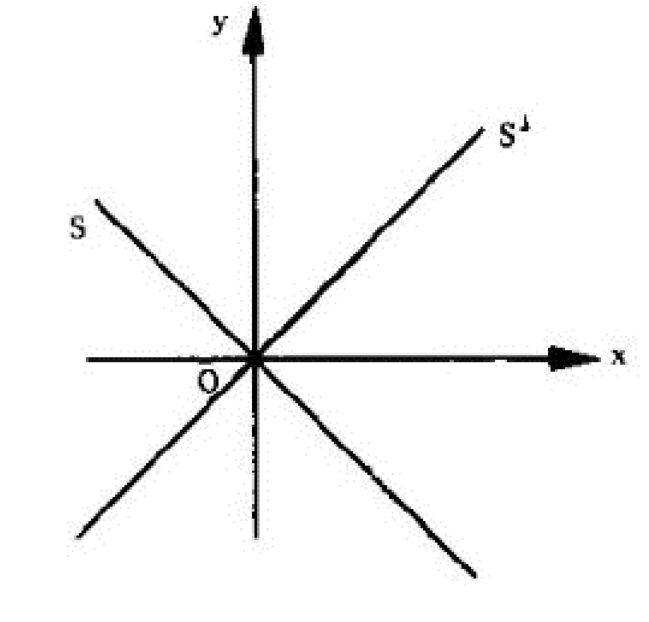
Exemplo:

2) Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $S = \{(x, -x)/x \in \mathbb{R}\}$.

Então:

$S^{\perp} = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}$

uma vez que $(x, -x) . (x, x) = x^2 - x^2 = 0$



Exercício

Seja o produto interno usual no $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ e o subespaço, de dimensão 2,

S = [(1, 1, 0, -1), (1, -2, 1, 0)]

Determine $S^{\perp}$ e uma base ortonormal de $S^{\perp}$.

Solução

Seja o produto interno usual no $\mathbb{R}^4$ e o subespaço, de dimensão 2,

S = [(1, 1, 0, -1), (1, -2, 1, 0)]

Determine $S^{\perp}$ e uma base ortonormal de $S^{\perp}$.

Um vetor v = (x, y, z, t) ∈ $S^{\perp}$ se:

(x, y, z, t) . (1, 1, 0, -1) = 0 e

(x, y, z, t) . (1, -2, 1, 0) = 0

Daí, vem o sistema:

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é

t = x + y e z = -x + 2y

Solução

Logo:

$S^{\perp}$ = {(x, y, -x+2y, x+y) / x, y ∈ $\mathbb{R}$ }

- Uma base de $S^{\perp}$ é

B = {(1, 0, -1, 1) , (0, 1, 2, 1)}

Na qual $v_1 = (1, 0, -1, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 2, 1)$. Apliquemos o processo de Gram-Schmidt à base B para encontrar a base ortonormal $\boldsymbol{B}^{´}$ = $\{u_1, u_2\}$:

Solução

a) $u_1 = \dfrac{v_1}{|v_1|} = \dfrac{(1, 0, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) $w_2 = v_2 - (v_2 \,.\, u_1)\, u_1 = (0, 1, 2, 1) - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$w_2 = (0, 1, 2, 1) - \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

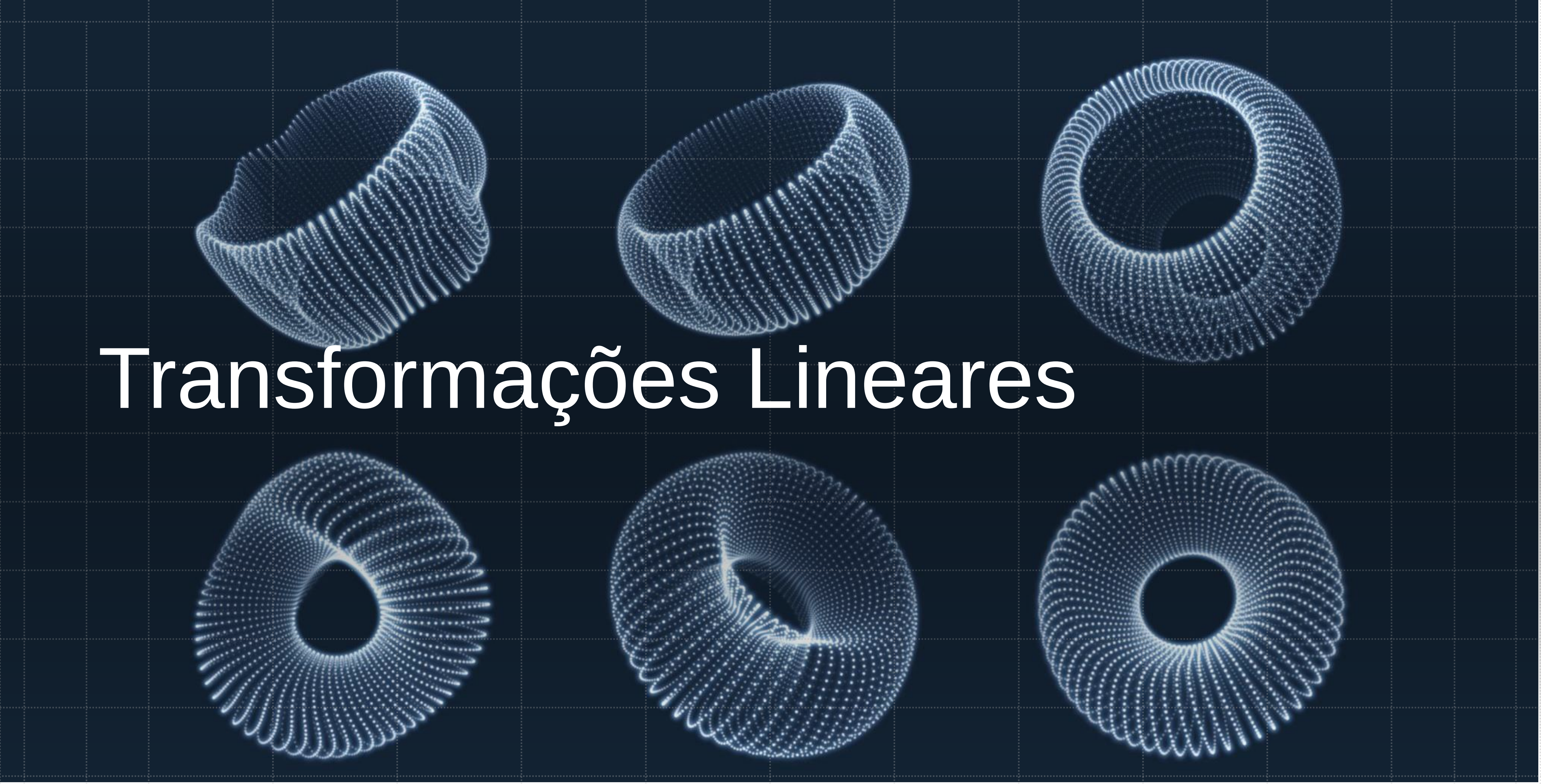
$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\frac{\sqrt{51}}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}}, \frac{5}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}}\right)$$

Logo,

$$B' = \{u_1, u_2\}$$

é uma base ortonormal de $S^{\perp}$

Transformações Lineares



Introdução

- Uma transformação linear não é nada mais nada menos que uma função, assim como as quais nós estudamos em Cálculo durante todo Ensino Médio.
- Estudaremos um tipo especial de função, onde o domínio e contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.
- É mais comum denotarmos, em Álgebra Linear, funções como transformações.
- Estamos particularmente interessados nas funções vetoriais lineares

Introdução

Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se

$$T: V \rightarrow W$$

Então, uma função deve possuir:

1) Um conjunto V chamado domínio
2) Um conjunto W chamado contradomínio
3) Uma regra (fórmula) de associação

Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que será indicado por $w = T(v)$.

Definição

- Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T: V → W é chamada transformação linear de V em W se:

I) T(u+v) = T(u) + T(v)

II) $T(\propto u) = \propto T(u)$

Para $\forall$ u, v $\in$ V e $\forall \propto \in \mathbb{R}$

Observação: Uma transformação linear de V em V (é o caso de V = W) é chamada ***operador linear sobre V.***

Exemplo

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y) é uma transformação linear, pois:

I) Sejam u = (x_1, y_1) v = (x_2, y_2) vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$.

u+v=$(x_1+x_2, y_1 + y_2)$

Então, T(u+v) = T(x_1+ x_2, $y_1 + y_2$) = (3(x_1+ x_2), -2($y_1 + y_2$), ($x_1 + x_2$)-($y_1 + y_2$))

T(u+v) = (3x_1+ $3x_2$, -2$y_1 - 2y_2$, $x_1 + x_2$- $y_1 - y_2$)

= (3x_1, $-$2y_1, x_1- y_1)+ $(3x_2 - 2y_2, x_2 - y_2)$ = **T(u) + T(v)**

Exemplo

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y) é uma transformação linear, pois:

II) **T($\propto \boldsymbol{u}$) = $\propto$ T(u)** u = (x_1, y_1)

T($\propto u$) = T($\propto x_1$, $\propto y_1$) = (3 $\propto x_1$, -2$\propto y_1$, $\propto x_1$- $\propto y_1$) = $\propto$(3 x_1, -2 y_1, x_1- y_1) = $\propto$ T(u)

Observação

“ Em toda transformação linear T: V → W, a imagem do vetor 0 ∈ V é o vetor 0 ∈ W, isto é, T(0)=0”

Esse fato decorre da condição II) da definição.

PROPRIEDADE

- Se T: V → W for uma transformação linear, então

T $(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$

Para $\forall\, v_1, v_2 \in$ V e $\forall\; a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

PROPRIEDADE

De forma análoga, tem-se:

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

para $\forall v_i \in V$ e $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Suponhamos agora que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma *base* do domínio V e que se saiba quais são as imagens $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ dos vetores desta base:

sempre é possível obter a imagem $T(v)$ de qualquer $v \in V$, pois sendo v uma combinação linear dos vetores da base, isto é:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

e, pela relação acima, vem:

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

Assim, uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base de V.

Exemplo

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Determinar $T(5, 3, -2)$, sabendo que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3, 1)$ e $T(v_2) = (0, 2)$.

Exemplo

Expressemos v=(5, 3, -2) como combinação linear dos vetores da base:

(5, 3, -2) = a_1(0, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3 (1, 1, 0)

Ou

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ \quad a_2 = -2 \end{cases}$$ sistema suja solução é a_1 = - 4, $a_2 = -2 \;\; e \;\; a_3 = 7$

Então, (5, 3, -2) = 4 v_1- 2 v_2 + 7 v_3

Logo:

T(5, 3, -2) = -4T(v_1) – 2T(v_2) + 7T(v_3)

T(5, 3, -2) = -4(1, -2) – 2 (3, 1) + 7 (0, 2)

T(5, 3, -2) = (-10, 20)

Exercícios

1. Consideremos o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

   $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$.

   Determinar o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (-1, 8, -11)$.

2. Um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que:

   $T(1, 0) = (3, -2)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$

   Determinar $T(x, y)$.

Exercícios

1. *Solução*

a) Sendo $T(u) = (-1, 8, -11)$, ou seja:

$(x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z) = (-1, 8, -11)$,

vem:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ -x + y + 4z = -11 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x = 1$, $y = 2$ e $z = -3$.

Logo: $u = (1, 2, -3)$

Exercícios

2.

Solução

Observemos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é tal que:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

e, portanto:

$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$$

$$T(x, y) = x(3, -2) + y(1, 4)$$

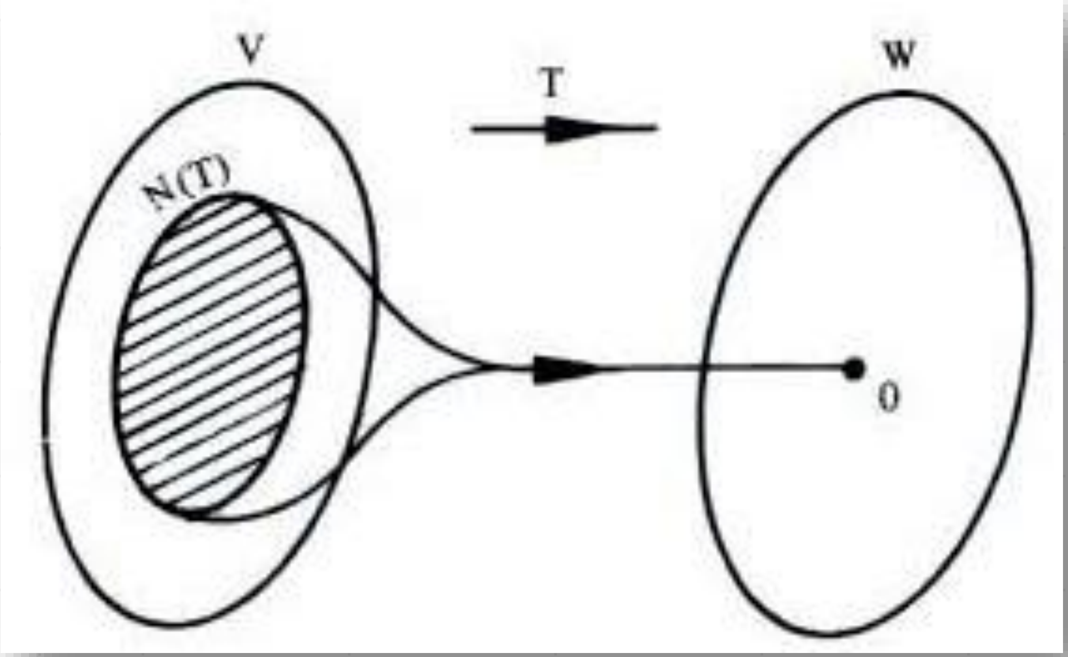
$$T(x, y) = (3x + y, -2x + 4y)$$

$$(x, y) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

a_1 = x e $a_2 = y$

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

Núcleo de uma transformação linear



- Chama-se ***núcleo*** de uma transformação linear T: V → W ao conjunto de vetores v ∈ V que são transformados em 0 → W.
- Indica-se esse conjunto por N(T) ou ker(T):

N(T) = {v ∈ V/ T(v) = 0}

Observa-se que N(T) ⊂ V e N(T) ≠ ∅, pois 0 ∈ N(T), tendo em vista que T(0)=0.

Exemplo 1

O núcleo da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

é o conjunto:

$$N(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0) \}$$

o que implica:

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

$$N(T) = \{ (0, 0) \}$$

Exemplo 2

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por:

$T(x, y, z) = (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z)$

Nesse caso, temos:

$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}$

$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0)$

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases} \qquad x = -3z \text{ e } y = z.$$

Logo:

$N(T) = \{(-3z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = \{z(-3, 1, 1) / z \in \mathbb{R}\}$

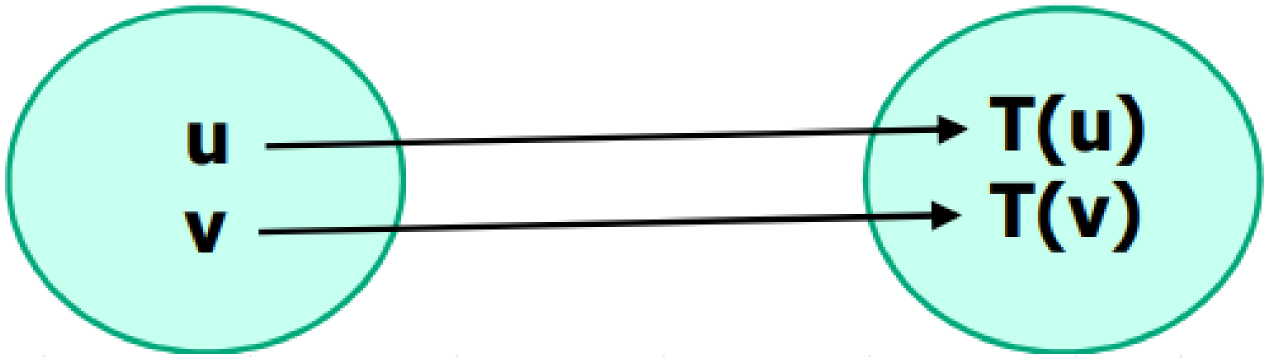
$N(T) = [(-3, 1, 1)]$

Propriedades do Núcleo

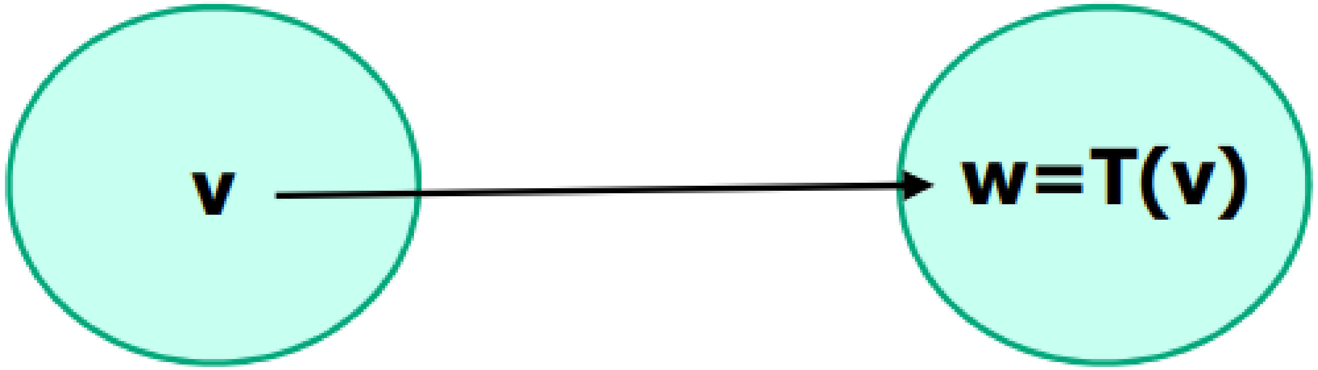
Definição:

Dada uma aplicação (função) T: V→W,
T é ***injetora*** se ∀ v_1, v_2 ∈ V:

- T(v_1) = T(v_2) implica v_1 = v_2 ou,
- T(v_1) ≠ T(v_2) implica que $v_1 \neq v_2$.



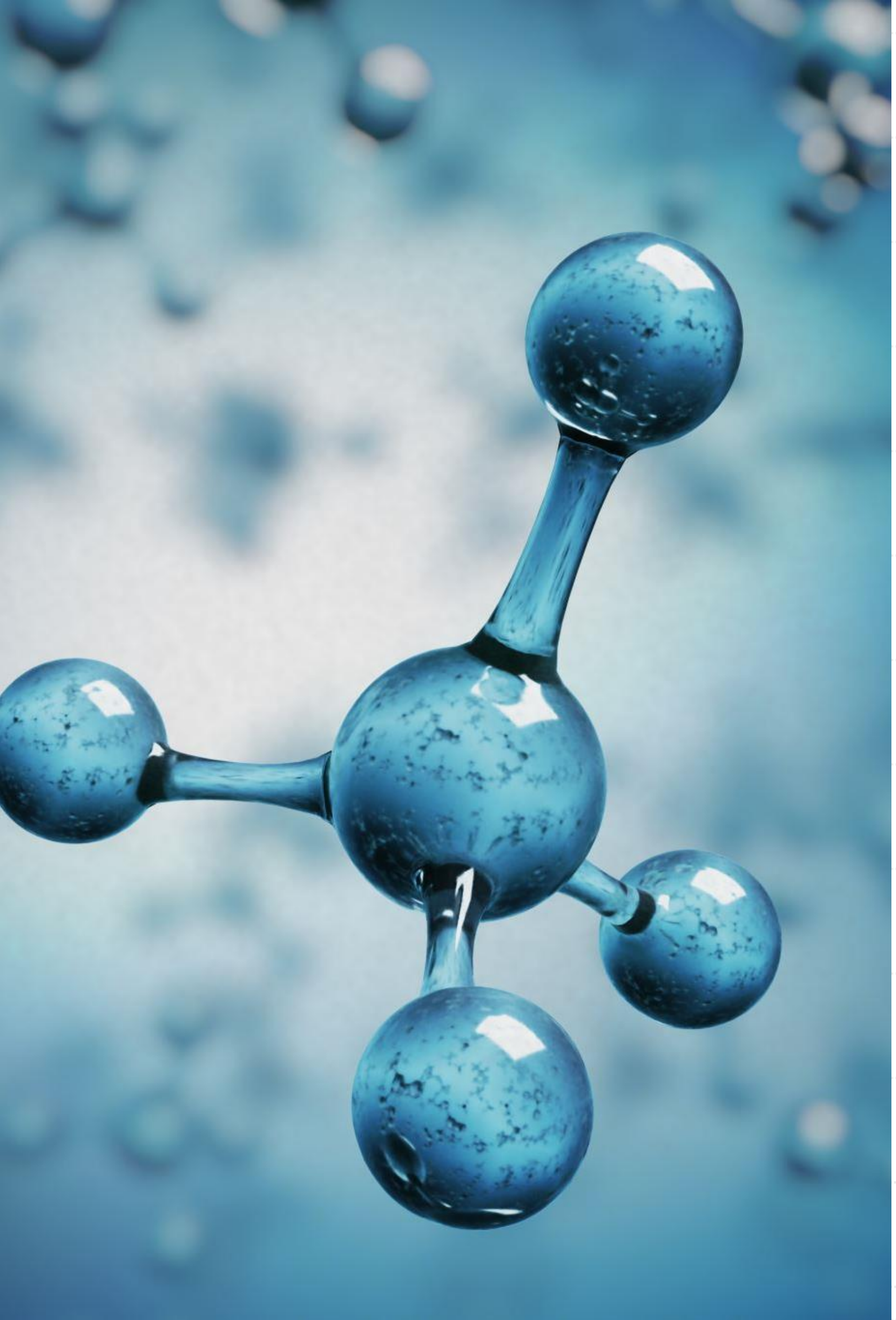
Propriedades do Núcleo



Definição:

A aplicação (função) T: V→W, T é ***sobrejetora*** se a imagem de T coincidir com W, ou seja T(V) = W (imagem = contra-domínio). Em outras palavras,

- T é *sobrejetora* se dado w ∈ W, existir v ∈ V tal que T(v) = w.



Propriedades do Núcleo

Definição

Transformação Linear Bijetora – Isomorfismo

Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é ***bijetora*** quando for *injetora e sobrejetora*. Transformações lineares bijetoras são também denominadas isomorfismos e, consequentemente, V e W são denominados espaços vetoriais isomorfos.

Propriedades do Núcleo

2. Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é *injetora* se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.