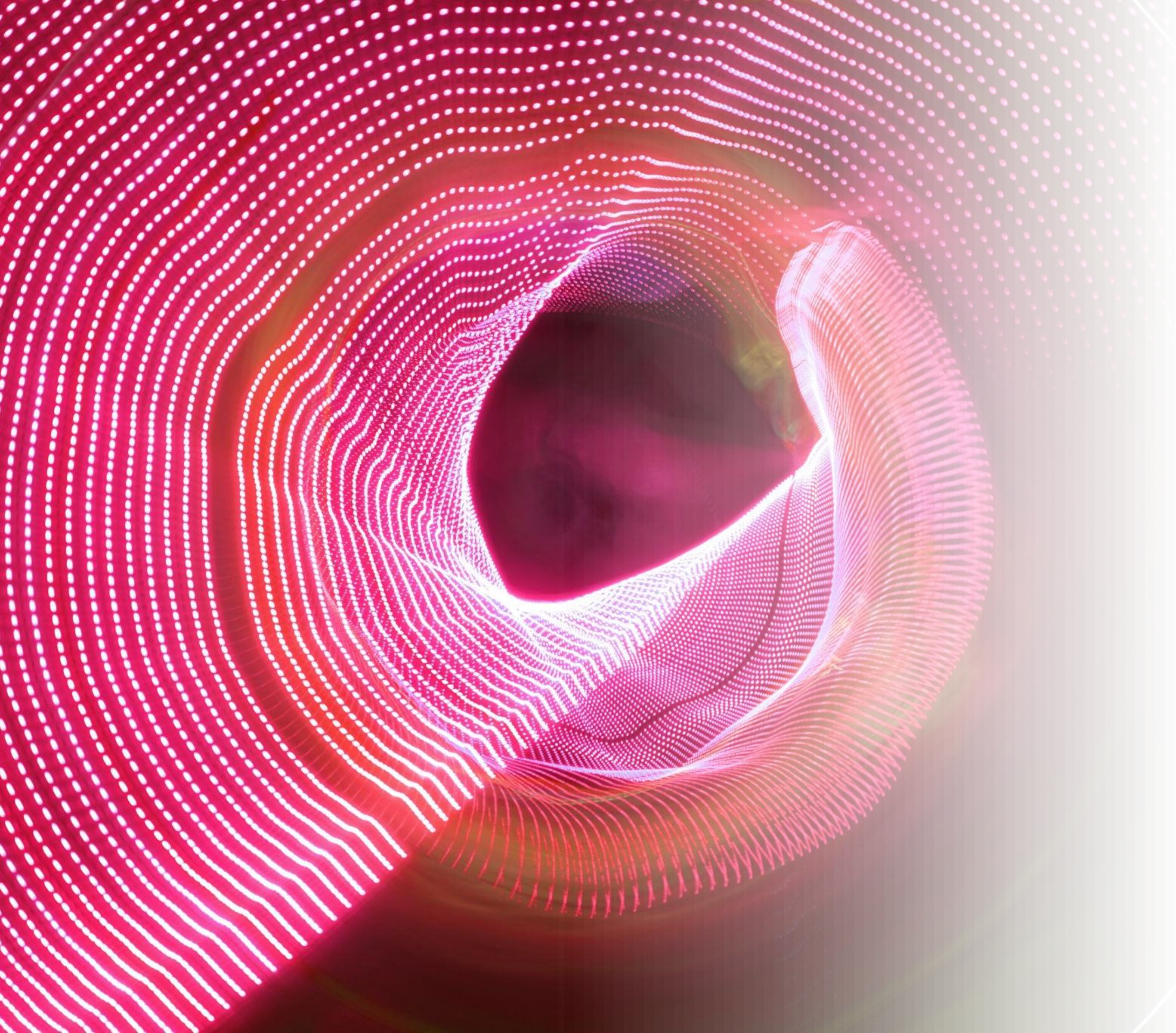


Transformações Lineares

PROFª GABRIELLE G. DOS S. RIBEIRO

Introdução

- Uma transformação linear não é nada mais nada menos que uma função, assim como as quais nós estudamos em Cálculo durante todo Ensino Médio.
- Estudaremos um tipo especial de função, onde o domínio e contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.
- É mais comum denotarmos, em Álgebra Linear, funções como transformações.
- Estamos particularmente interessados nas funções vetoriais lineares.

Introdução

Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se

$$T: V \rightarrow W$$

Então, uma função deve possuir:

1) Um conjunto V chamado domínio
2) Um conjunto W chamado contradomínio
3) Uma regra (fórmula) de associação

Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que será indicado por $w = T(v)$.

Introdução

Uma transformação linear é um tipo especial de função que associa um vetor a outro vetor

T: {vetores} → {vetores}

- Em geral, pensamos em uma transformação linear como “transformando um vetor em outro” de forma linear.

Introdução

Em Álgebra Linear nossa funções (transformações) não admitem apenas o conjunto dos números reais como domínio e contradomínio, elas admitem qualquer espaço vetorial (por exemplo: matrizes, polinômios, ...)

Exemplo

Exemplo Consideramos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, que transforma vetores de $\mathbb{R}^2$ em vetores de $\mathbb{R}^3$, dada pela fórmula

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + 5x_2, -x_1 + x_2).$$

Nota que, excepcionalmente, estamos representando os vetores como linhas. É comum quando tratamos de transformações lineares. Esta fórmula nos diz, por exemplo, que os vetores

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

são transformados nos vetores

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \\ -1 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ -0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Definição

- Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T: V → W é chamada transformação linear de V em W se:

I) T(u+v) = T(u) + T(v)

II) $T(\propto u) = \propto T(u)$

Para $\forall$ u, v $\in$ V e $\forall \propto \in \mathbb{R}$

Observação: Uma transformação linear de V em V (é o caso de V = W) é chamada ***operador linear sobre V.***

Exemplo

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y) é uma transformação linear, pois:

I) Sejam u = (x_1, y_1) v = (x_2, y_2) vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$.

u+v=$(x_1+x_2, y_1 + y_2)$

Então, T(u+v) = T(x_1+ x_2, $y_1 + y_2$) = (3(x_1+ x_2), -2($y_1 + y_2$), ($x_1 + x_2$)-($y_1 + y_2$))

T(u+v) = (3x_1+ 3x_2, -2$y_1 - 2y_2$, $x_1 + x_2$- $y_1 - y_2$)

= (3x_1, −2y_1, x_1- y_1)+ $(3x_2 - 2y_2, x_2 - y_2)$ = **T(u) + T(v)**

Exemplo

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y) é uma transformação linear, pois:

II) **T(**$\propto \boldsymbol{u}) = \propto$ **T(u)** u = (x_1, y_1)

T($\propto u) =$ T($\propto x_1$, $\propto y_1$) = (3 $\propto x_1$, -2$\propto y_1$, $\propto x_1$- $\propto y_1$) = $\propto$(3 x_1, -2 y_1, x_1- y_1) = $\propto$ T(u)

Exercício

T: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Verifique se $T(x) = 3x$ é uma transformação linear

Exercício

T: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Verifique se T(x) = 3x é uma transformação linear

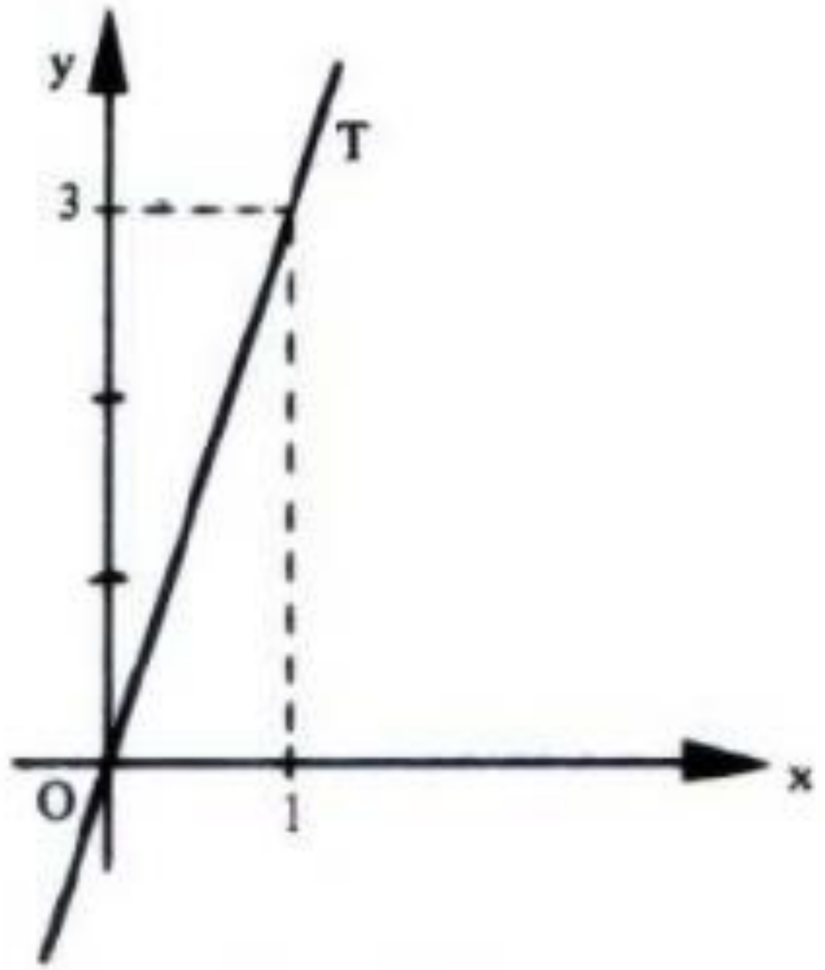
Sejam u = x_1 e v = x_2 vetores quaisquer de $\mathbb{R}$ (os vetores, nesse caso, são números reais). Então:

I) T(u+v) = T(x_1 + x_2) = 3 (x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = T(u) + T(v)

II) T($\propto u$) = T($\propto x_1$) = 3 $\propto x_1$ = $\propto$(3 x_1) = $\propto$ T(u)

Observação

- Essa transformação linear representa uma reta que passa pela origem. É fácil ver que se uma transformação representar uma reta que não passa pela origem ela não é linear.



Exemplo

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; T(x) = 3x + 1$$

não é linear.

De fato:

Se $u = x_1$ e $v = x_2$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}$, tem-se:

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2)$$

$$T(u + v) = 3(x_1 + x_2) + 1$$

$$T(u + v) = 3x_1 + 3x_2 + 1 = (3x_1 + 1) + 3x_2$$

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v) = (3x_1 + 1) + (3x_2 + 1)$$

Observação

- Seria bem mais fácil constatar no exemplo anterior que T não é linear, se conhecêssemos a propriedade:

“ Em toda transformação linear $T: V \to W$, a imagem do vetor $0 \in V$ é o vetor $0 \in W$, isto é, $T(0)=0$”

Esse fato decorre da condição II) da definição.

Exemplo

T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, T(x,y,z) = (3x+2, 2y-z) não é uma transformação linear, pois:

T(0, 0, 0) = (2, 0) ≠ (0,0)

PROPRIEDADE

- Se T: V → W for uma transformação linear, então

T $(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$

Para $\forall\, v_1, v_2 \in$ V e $\forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

PROPRIEDADE

De forma análoga, tem-se:

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

para $\forall v_i \in V$ e $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Suponhamos agora que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma *base* do domínio V e que se saiba quais são as imagens $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ dos vetores desta base:

sempre é possível obter a imagem $T(v)$ de qualquer $v \in V$, pois sendo v uma combinação linear dos vetores da base, isto é:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

e, pela relação acima, vem:

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

Assim, uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base de V.

Exemplo

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Determinar $T(5, 3, -2)$, sabendo que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3, 1)$ e $T(v_2) = (0, 2)$.

Exemplo

Expressemos v=(5, 3, -2) como combinação linear dos vetores da base:

(5, 3, -2) = a_1(0, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3 (1, 1, 0)

Ou

$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ \quad a_2 = -2 \end{cases}$ sistema suja solução é a_1 = - 4, $a_2 = -2 \;\; e \;\; a_3 = 7$

Então, (5, 3, -2) = 4 v_1- 2 v_2 + 7 v_3

Logo:

T(5, 3, -2) = -4T(v_1) – 2T(v_2) + 7T(v_3)

T(5, 3, -2) = -4(1, -2) – 2 (3, 1) + 7 (0, 2)

T(5, 3, -2) = (-10, 20)

Exercícios

1. Consideremos o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

   $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y - z, -x + y + 4z)$.

   Determinar o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (-1, 8, -11)$.

2. Um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que:

   $T(1, 0) = (3, -2)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$

   Determinar $T(x, y)$.

Exercícios

1.

Solução

a) Sendo $T(u) = (-1, 8, -11)$, ou seja:

$$(x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z) = (-1, 8, -11),$$

vem:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ -x + y + 4z = -11 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x = 1$, $y = 2$ e $z = -3$.

Logo: $u = (1, 2, -3)$

Exercícios

2.

Solução

Observemos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é tal que:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

e, portanto:

$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$$

$$T(x, y) = x(3, -2) + y(1, 4)$$

$$T(x, y) = (3x + y, -2x + 4y)$$