EXERCÍCIOS PARA ESTUDO

1º BIMESTRE

1. Considere $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

   Assinale a alternativa correta:

a) b = 3 a1 + 2 a2

b) "b" não pode ser escrito como combinação linear de "a1" e "a2".

c) b = 2 a1 - 3 a2

d) b = a1 + 4 a2

e) b = - a1 + 2 a2

Temos:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Queremos verificar se **b** pode ser escrito como combinação linear de a_1 e a_2:

$$b = xa_1 + ya_2$$

Sistema

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

1. $x + 2y = 7$
2. $-2x + 5y = 4$
3. $-5x + 6y = -3$

Resolvendo (1) e (2):

De (1):

$$x = 7 - 2y$$

Substitui em (2):

$$-2(7 - 2y) + 5y = 4$$

$$-14 + 4y + 5y = 4$$

$$9y - 14 = 4$$

$$9y = 18 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Agora em (1):

$$x + 2(2) = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Verificação em (3):

-5(3) + 6(2) = -15 + 12 = -3 \] ✅ --- ### Conclusão: \[b = 3a_1 + 2a_2

✅ Alternativa correta: **a) b = 3 a1 + 2 a2**

2. Determinar a condição do valor de k para que o conjunto { (1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)} seja L.I.

Queremos que os vetores

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (k, 1, -1)$$

sejam linearmente independentes (L.I.). Colocando-os como linhas (ou colunas) da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eles serão L.I. se, e só se, $\det(M) \neq 0$.

Calculemos o determinante pela primeira linha:

$$\det(M) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot (\cdots) + (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(M) = 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) + (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot k) = -1 - (1 - k) = k - 2.$$

Logo, os vetores são L.I. $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow k - 2 \neq 0$, ou seja:

$$\boxed{k \neq 2.}$$

Observação: se $k = 2$ então $v_3 = (2, 1, -1) = v_1 + v_2$ e os vetores são linearmente dependentes. Quer que eu ache explicitamente os coeficientes da dependência quando $k = 2$?

3.

4. Seja V =R^3. Determine o subespaço gerado pelo conjunto A = {u, v}, sendo u = (1, -2, -1) e v = (2, 1, 1).

Temos $u = (1, -2, -1)$ e $v = (2, 1, 1)$. O subespaço gerado por $A = \{u, v\}$ é

$$\text{span}\{u, v\} = \{s\,u + t\,v \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, o plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e contém u e v.

Podemos dar uma equação cartesiana para esse plano calculando um vetor normal $n = u \times v$:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 5).$$

Logo os pontos (x, y, z) do plano satisfazem

$$n \cdot (x, y, z) = -x - 3y + 5z = 0,$$

ou, multiplicando por -1,

$$\boxed{x + 3y - 5z = 0.}$$

Observações finais:

- $\{u, v\}$ é linearmente independente (não são múltiplos um do outro), portanto é uma base desse plano;
- $\dim(\text{span}\{u, v\}) = 2$.

5.

6.

7. Sejam V = M (2,2) e o subconjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Indique qual dos itens abaixo se refere ao subespaço G(A).

1. $G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -y & 2t \\ -2t + y & 3z \end{bmatrix} ; y, t \in R \right\}$

2. $G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{bmatrix} ; y, t \in R \right\}$

3. $G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x + y & -y \\ z & 2t \end{bmatrix} ; y, t \in R \right\}$

4. $G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -z & 3x + t \\ y/2 & t \end{bmatrix} ; y, t \in R \right\}$

5. $G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 3y + t & 2z \\ -2t & -z \end{bmatrix} ; y, t \in R \right\}$

Dados do exercício:

Considere $v = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G(A)$

Primeiro escrevemos combinação linear geral

$$s\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + 3t & 2s - t \\ -2s + t & 3s + t \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Agora compare com as opções: a opção **2** descreve as matrizes

$$\begin{pmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{pmatrix}, \; y, t \in \mathbb{R}.$$

Tomando $y = 2s - t$ e $t = 3s + t$ (ou, mais claramente, renomeando os parâmetros do nosso span por $y := 2s - t$ e $t := 3s + t$), obtém-se exatamente a mesma forma:

$$\begin{pmatrix} -s + 3t & 2s - t \\ -2s + t & 3s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{pmatrix}.$$

Logo a descrição correta de $G(A)$ é a da **opção 2**.

GABARITO

1. A
2. K diferente de 2.
3. -x - 3y + 5z = 0   ou   x + 3y - 5z = 0
4. O sistema tem solução:
   z = -y e x = -2y + t

Logo, G(A) é o que está descrito em 2.