ESPAÇOS VETORIAIS

Prof.ª Gabrielle G. S. Ribeiro

SUBESPAÇOS GERADOS

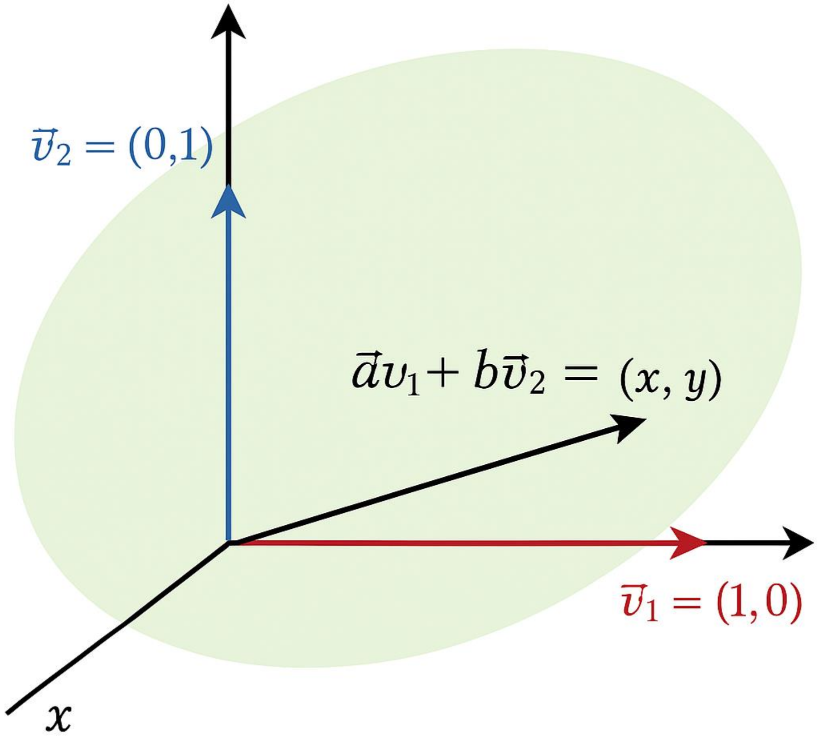
Objetivo da Aula

Compreender o que significa "gerar" um subespaço a partir de um conjunto de vetores, e como esse conceito se relaciona com combinação linear e dependência/independência linear.

Subespaço Gerado

- Pensem em dois vetores no plano, por exemplo $v_1 = (1{,}0)$ e $v_2 = (0{,}1)$. Todos os pontos que podemos alcançar combinando esses dois vetores (com qualquer multiplicador real) formam o plano inteiro.

- Já se eu tiver apenas um deles, digamos $v_1 = (1{,}0)$, só consigo alcançar pontos de uma reta. O conjunto de todos esses pontos é o que chamamos de **subespaço gerado** por v_1.



Antes de continuar, vamos relembrar..

- **Combinação linear:** $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k$
- **Subespaço vetorial:** um conjunto do espaço vetorial, fechado para soma e multiplicação escalar

Subespaços Gerados

- Seja **V** um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto

A = $\{v_1 , v_2 , ..., v_n \} \subset$ V, A $\neq \emptyset$.

- O conjunto **S** de todos os vetores de **V** que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

Simbolicamente, o subespaço S é:

$$S = \{v \in V / \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \in IR\}$$

Subespaços Gerados

"O **subespaço gerado** por um conjunto de vetores é o conjunto de todas as suas combinações lineares possíveis."

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

OBS.: O **span** de um conjunto de vetores é o conjunto de todos os vetores que posso alcançar combinando esses vetores de todas as formas possíveis.

Subespaços Gerados

- OBSERVAÇÕES:

  - Diz-se que o subespaço S é *gerado* pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$, ou *gerado* pelo conjunto A, e representa-se por:

    $$S = [v_1, v_2, ..., v_n] \qquad \text{ou} \qquad S = G(A)$$

    Logo, $v_1, v_2, ..., v_n$ são chamados geradores do subespaço S, enquanto A é o *conjunto gerador* de S.

  - Se $G(A) = V$, A é um conjunto gerador de V.

Subespaços Gerados

- Exemplos:

1) Os vetores **i = (1, 0)** e **j = (0, 1)** geram o IR^2, pois qualquer (x, y) $\in IR^2$ é combinação linear de **i** e **j**:

(x,y) = a.**i** + b.**j** = a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)

(x,y) = (a,b)

Exemplo: (2,4) = 2(1,0) + 4(0,1) = (2,4)

Então, [i,j] = $\boldsymbol{R^2}$

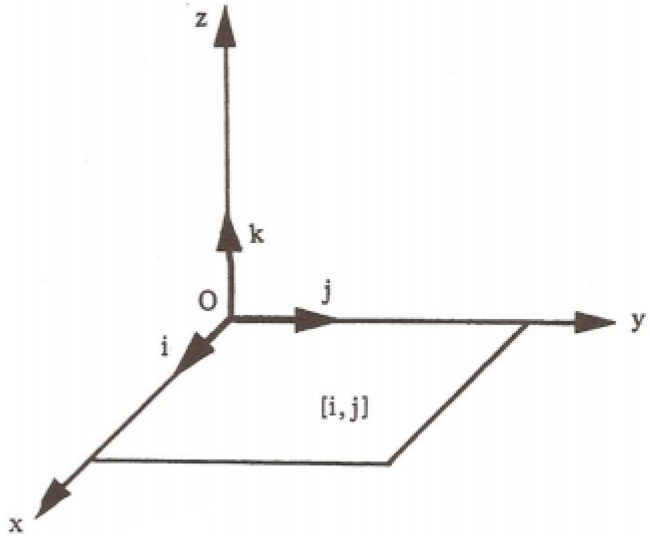
Percebe-se que **para qualquer vetor** (x, y)$\in \mathbb{R}^2$,**sempre existem** números reais $a = x$ e $b = y$ que satisfazem a igualdade.

Subespaços Gerados

2) Os vetores **i = (1, 0, 0)** e **j = (0, 1, 0)** do IR^3 geram o subespaço

$$S = \{(x, y, 0) \in IR^3 / x, y \in IR\}$$

pois



(x,y,0) = a.**i** + b.**j** = a(1,0,0) + b(0,1,0) = (a,0,0) + (0,b,0) = (a,b,0)

(x,y,0) = (a,b,0)

Exemplo: (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) = (1,2,0)

[i, j] = S é um subespaço do IR^3 e representa, geometricamente, o plano xOy.

Exemplo 3

Quais são os vetores gerados por $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2,2)$?

$$\text{Span}\{v1,v2\} = a(1,1) + b(2,2) = (a + 2b\ ,\ a + 2b)$$

Isso mostra que todas as combinações têm as duas coordenadas iguais.

Logo, o conjunto gerado é:

$$\{(\mathrm{x}, \mathrm{x})/x \in \mathbb{R}\}$$

Observações

- **Todo conjunto de vetores em um espaço vetorial gera *algum* subespaço** — mesmo que seja o **subespaço nulo** (o mais "pequeno" possível).

O que pode acontecer é que esse subespaço seja:

1. O **espaço inteiro**, como

$$\text{Span}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

2. Uma **reta (dimensão 1)**, como

$$\text{Span}\{(2,1)\} = \{(a,b) \mid b = \tfrac{1}{2}a\}$$

3. Ou até mesmo o **subespaço nulo**, ou seja,

$$\text{Span}\{(0,0)\} = \{(0,0)\}$$

Então o único caso que "não gera nada novo" é:

$$S = \{(0,0)\}$$

Exercícios

1. Seja V= $\boldsymbol{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo vetor v=(1, 2, 3).

2. Determine o conjunto gerado por cada par de vetores:

a) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,4,6)$
b $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$

3. Verifique se o vetor (3, 4) pertence ao **span** de $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,1)$.

Exercícios

1. Seja V= $\boldsymbol{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo vetor v=(1, 2, 3).

Solução:

Temos: S = {(x,y,z) ∈ $\boldsymbol{R}^3$/ (x,y,z) = a(1, 2, 3), a ∈ R}

Então, de (x,y,z) = a(1,2,3) vem que:

x=a, y=2a e z=3a

Ou seja, y=2x e z=3x

Logo,

S = {(x,y,z) ∈ $\boldsymbol{R}^3$/ y=2x e z=3x} ou S = {(x,2x,3x); x ∈ R}

Exercícios

2. a)

Solução:

a(1,2,3) + b(2,4,6) = (a+2b , 2a+4b , 3a+6b) = (t, 2t, 3t)

onde $t = a + 2b$ (qualquer $t \in \mathbb{R}$ pode ser obtido por escolha de a, b).

Span {(1,2,3),(2,4,6)} = { t(1,2,3) | t ∈ R}

Ou

Span {v1,v2} = {(x, 2x, 3x)| x ∈ R} = { x(1,2,3) | x ∈ R}

Exercícios

2. b)

Solução:

$$av1 + bv2 = a(1,0,1) + b(0,1,1) = (a, b, a+b).$$

Chamando $(x, y, z) = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{a} + \mathrm{b})$,obtemos a relação

$$a = x \,;\, b = y$$

$$z = a + b = x + y$$

$$\text{Span}\,\{v1, v2\} = \{\, (x, y, z) \in R^3 \mid z = x+y\}.$$

Exercícios

3.

Solução:

Um vetor (x, y) pertence ao *span* de {v1, v2) se existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$av_1 + bv_2 = (x, y)$$

Substituindo os vetores:

$$a(1,2) + b(2,1) = (3,4)$$

Ou seja:

$$(a + 2\mathrm{b}, 2\mathrm{a} + \mathrm{a}) = (3,4)$$

Isso gera o **sistema de equações lineares**:

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

Exercícios

Solução:

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

Da primeira equação: $a = 3 - 2b$

Substituindo na segunda:

$$2(3 - 2b) + b = 4$$
$$6 - 4b + b = 4$$
$$6 - 3b = 4$$
$$-3b = -2$$
$$b = \frac{2}{3}$$

Substituindo em $a = 3 - 2b$:

$$a = 3 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

Como existem números reais $a = 5/3$ e $b = 2/3$ que satisfazem $av_1 + bv_2 = (3,4)$,concluímos que:

$$\boxed{(3,4) \in Span\{(1,2),(2,1)\}}$$

Dependência e Independência Linear

Introdução

- **Dependência Linear:**

Um conjunto de vetores é linearmente dependente se pelo menos um vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Isso quer dizer que:

- Basta **um** vetor ser "redundante", isto é, poder ser obtido a partir dos outros, para que **todo o conjunto** seja dependente.

- E ele **não precisa** ser combinação de todos os outros, só de **alguns** deles.

- **Independência Linear:**

Um conjunto de vetores é linearmente independente se nenhum vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Dependência e Independência Linear

- Sejam V um espaço vetorial e A = $\{v_1 , v_2 , ..., v_n \} \subset$ V, consideremos a equação:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0 \quad (1)$$

- Sabemos que essa equação admite pelo menos uma solução:

$$a_1 = 0 , a_2 = 2 , ..., a_n = 0$$

chamada solução trivial.

Dependência e Independência Linear

- O conjunto A diz-se ***linearmente independente (LI)***, ou os vetores v_1 , v_2 , ..., v_n são LI , caso a equação (1) admita apenas a ***solução trivial.***

- Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é ***linearmente dependente (LD)***, ou que os vetores v_1 , v_2 , ..., v_n são LD.

Dependência e Independência Linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores em um espaço vetorial V.

- **Linearmente dependentes:** existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$, **não todos zero**, tais que:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

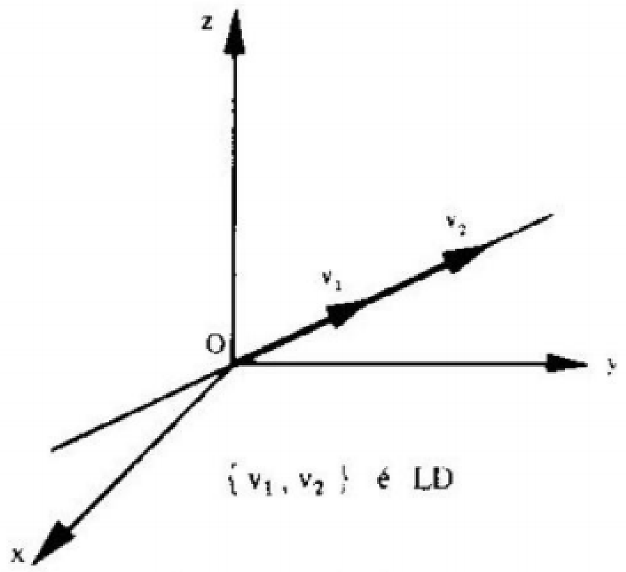
- **Linearmente independentes:** a única solução de

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

é $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$

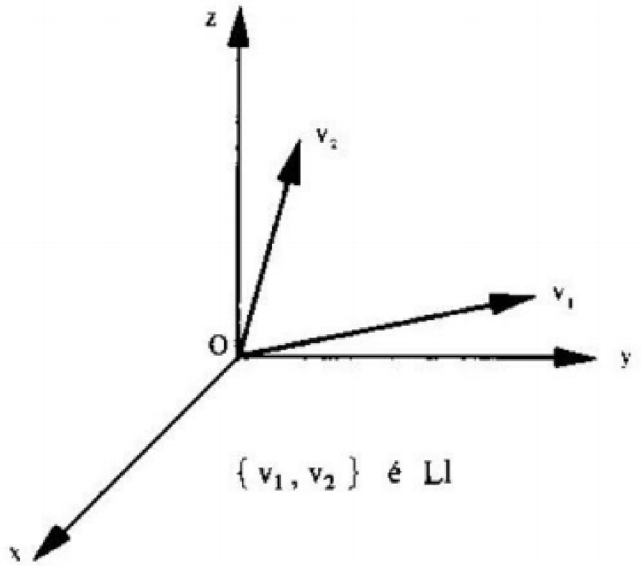
Dependência e Independência Linear

Representação geométrica da dependência linear de dois vetores:



$\{v_1, v_2\}$ é LD

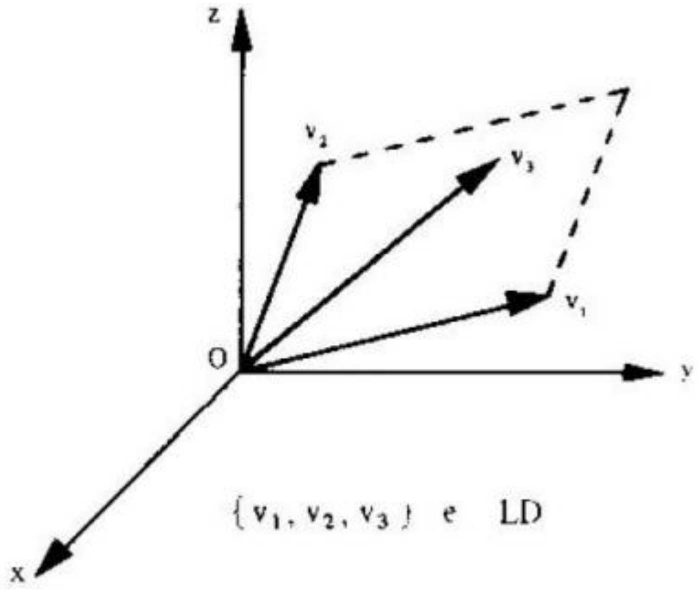
(v_1 e v_2 estão representados na mesma reta que passa pela origem)



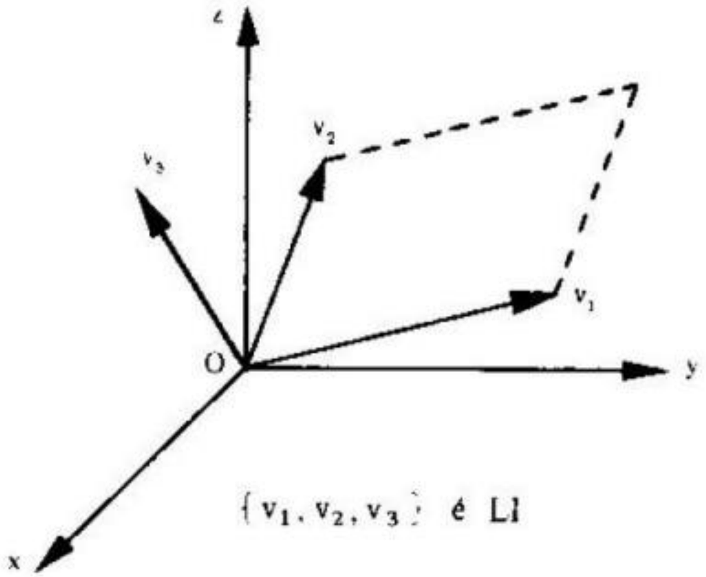
$\{v_1, v_2\}$ é LI

Dependência e Independência Linear

Representação geométrica da dependência linear de três vetores:



(v_1, v_2 e v_3 estão representados no mesmo plano que passa pela origem)



Exemplos

1. **Reta em $\mathbb{R}^2$**
- $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,2)$ → **dependentes**, porque $v_2 = 2v_1$.
- Span = reta $y = x$.
2. **Plano em $\mathbb{R}^2$**
- $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ → **independentes**, pois nenhum pode ser escrito como múltiplo do outro.
- Span = plano inteiro ($\mathbb{R}^2$).
3. **Plano em $\mathbb{R}^3$**
- $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,0)$ → **dependentes**, pois $v_3 = v_1 + v_2$.

Observação

No exemplo do início da aula, vimos que $v_1 = (1{,}0)$ gera pontos de uma reta.

Se eu pegar os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (2, 0)$ o espaço gerado muda?

a(1,0) + b (2,0) = (a + 2b , 0)

Isso significa que o espaço gerado é o conjunto de todos os vetores da forma (x, 0) ,ou seja, **todos os pontos da reta no eixo x**.

- O espaço gerado por $\{(1, 0)\}$ e por $\{(1, 0), (2, 0)\}$ é **exatamente o mesmo**:
- Então, **o espaço gerado não muda**.

Observação

- **O que isso tem a ver com dependência linear?**

Veja que o vetor (2, 0) é **múltiplo** de (1, 0)?

$$(2, 0) = 2(1,0)$$

Ou seja, **um deles pode ser obtido a partir do outro.** Quando isso acontece, dizemos que **os vetores são linearmente dependentes** — há uma **redundância** na geração, porque um deles **não adiciona direção nova** ao espaço gerado.

Dependência e Independência Linear

EXEMPLO: No espaço vetorial do R³, $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (-1, 0, -2)\ e\ v_3 = (2, -3, 1)$ formam um conjunto **linearmente dependente**, pois:

x. v_1 + y. v_2 + z. $v_3 = 0$ → x. (2, -1, 3)+ y. (-1, 0, -2)+ z. (2, -3, 1) = 0

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

p = 2 q = 2 < n = 3 → sistema SPI (z é variável livre)

L2 ~2L2 + L1 L3 ~L3 – L2

L3 ~2L3 – 3L1

* z é uma variável livre, portanto as soluções de x e y serão em função de z.

-y-4z = 0 → y = -4z

2x-y+2z=0 → 2x – (-4z) + 2z = 0 → x = -3z

S = (-3z, -4z, z) ou z(-3, -4, 1)

Portanto, **-3v1 -4v2 +v3 = 0 ou 3v1 + 4v2 – v3 = 0**

Exercício

- No espaço vetorial M(2,2), o conjunto A é LD ou LI?

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercício

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou, de modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é $a_1 = -\, a_3$ e $a_2 = -2a_3$.

Portanto, como existem soluções $a_i \neq 0$ para a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$, o conjunto é LD.

Dependência e Independência Linear

- **Observações:**

1) Para o caso particular de dois vetores, temos: “Dois vetores v1 e v2 são LD se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro.”

2) Se um conjunto contiver o vetor nulo, então ele é LD, uma vez que o vetor nulo pode ser escrito como c.l. de qualquer conjunto de vetores.

Dependência e Independência Linear

- **Por exemplo:**

Os vetores $v_1 = (1,-2,3)$ e $v_2 = (2,-4,6)$ são LD, pois

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2$$

ou

$$v_2 = 2v_1.$$

Já, os vetores $v_1 = (1,-2,3)$ e $v_2 = (2,1,5)$ são LI, pois

$$v_1 \neq k\, v_2 \qquad \forall\, k \in \mathrm{IR}.$$

Dependência e Independência Linear

- **Exercício:** Verifique se são LI ou LD os seguintes conjuntos:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} \right\} \subset M(2, 2)$

b) $\{(2, -1), (1, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$

Dependência e Independência Linear

- **Exercício:** Verifique se são LI ou LD os seguintes conjuntos:

a) Como o conjunto tem apenas dois vetores com um deles sendo múltiplo escalar do outro (o segundo vetor é o triplo do primeiro), o conjunto é LD.

b) Tem em vista que um vetor não é múltiplo escalar do outro, o conjunto é LI.

BASE
E
DIMENSÃO

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

- Um conjunto B = $\{v_1 , v_2 , \ldots, v_n \} \subset$ V é uma **base** do espaço vetorial V se satisfaz as condições:

I) B é LI;

II) B gera V.

Mas se o número de vetores for igual à dimensão do espaço, basta verificar *apenas a condição I*, porque a II vem automaticamente.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

◆ **Teorema Fundamental**

Em um espaço vetorial de dimensão n, qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes automaticamente gera o espaço.

Ou seja:

- **2 vetores LI em** $\mathbb{R}^2$ →já é base (gera o plano).
- **3 vetores LI em** $\mathbb{R}^3$ →já é base (gera o espaço inteiro).

📌 Portanto, se você já verificou a linearidade independente e o número de vetores igual à dimensão, a condição de gerar é consequência lógica.

Então por que a definição ainda menciona as duas condições?

A definição com as duas condições (LI e gerar) é **a definição geral**, válida para qualquer conjunto, **sem saber o tamanho dele**.

Ela é útil quando:

- O conjunto tem mais vetores do que a dimensão (sobredimensionado);
- O conjunto tem menos vetores que a dimensão.

Conclusão

Em $\mathbb{R}^n$:

- Se um conjunto possui n vetores e é LI $\Rightarrow$ ele é automaticamente uma base.

- Se possui n vetores e gera o espaço $\Rightarrow$ também é automaticamente LI.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

- **Exemplos: 1)** B={(1,1), (-1,0)} é uma base do $\mathbb{R}^2$, denominada base canônica. De fato:

I) B é LI, pois a(1,1) + b(-1,0) = (0,0) implica: $\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

E daí: a=b=0

E como o conjunto possui 2 vetores, que é igual a dimensão do espaço vetorial, pode-se assumir que ele é base do $\mathbb{R}^2$.

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

- **Exemplos: 2)** B={(1,2), (3,5)} é base do $\mathbb{R}^2$. De fato:

I) B é LI

$$a_1(1,2)+a_2(3,5)=(0,0)$$
$$(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)=(0,0)$$
$$(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)=(0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+3a_2=0 \\ 2a_1+5a_2=0 \end{cases}$$

sistema homogêneo que admite somente a solução trivial $a_1=a_2=0$, o que confirma B ser LI.

II) B gera $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)=a_1(1,2)+a_2(3,5)$$
$$(x,y)=(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)$$
$$(x,y)=(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+3a_2=x \\ 2a_1+5a_2=y \end{cases}$$

que resolvido em função de x e y, fornece:

$$a_1=-5x+3y \quad \text{e} \quad a_2=2x-y$$

isto é G(B)= $\mathbb{R}^2$

✓ Encontramos valores de a_1e a_2 **em função de qualquer xe y.** Isso mostra que **para qualquer vetor do plano, é possível encontrar a combinação.**
→ Portanto, o conjunto **gera todo** $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3

- **Exemplo em $\mathbb{R}^3$ de conjunto LI mas que não gera o $\mathbb{R}^3$:**

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

- Esses vetores são LI
- Mas não geram todo o $\mathbb{R}^3$ (só geram o plano $z = 0$).

Exemplo 4

- **Conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$:**

$$v_1 = (1,0)\,, v_2 = (0,1)\,, v_3 = (2,2)$$

✓ **Análise da Independência Linear**

- Observe que:

$$v_3 = 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$$

- Ou seja, o terceiro vetor pode ser obtido como combinação linear dos outros dois ⇒ **o conjunto é linearmente dependente.**

Exemplo 4

✓ O que eles geram?

- Mesmo com três vetores, o espaço gerado é o mesmo que seria gerado apenas por v_1 e v_2:

$$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathit{Span}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

- Então nesse caso eles **geram o plano**, mas são dependentes. Portanto, não é base para R^2.

Exemplo 5

- **Agora um exemplo que não gera $\mathbb{R}^2$:**

$$u_1 = (1,2)\,, u_2 = (2,4)\,, u_3 = (-3,-6)$$

Observe:

- Todos esses vetores estão na mesma direção, ou seja, no mesmo retas.
- Eles são múltiplos uns dos outros:

$$u_2 = 2u_1 \quad , \qquad u_3 = -3u_1$$

Então:

- São **linearmente dependentes**
- **Não geram o $\mathbb{R}^2$** : o espaço gerado é apenas uma **reta**, não o plano inteiro.

Span$\{u_1, u_2, u_3\}$ = *reta que passa por (1,2)*

DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, V tem uma dimensão n. A dimensão de V indica por dim V=n

Exemplos:

1)dim $\mathbb{R}^2=2$

2)dim $\mathbb{R}^3=3$

3)dim $\mathbb{R}^n=n$

4)dim M(2,2)=4

5)dim M(m,n)=mxn

6)dim $P_n=n+1$