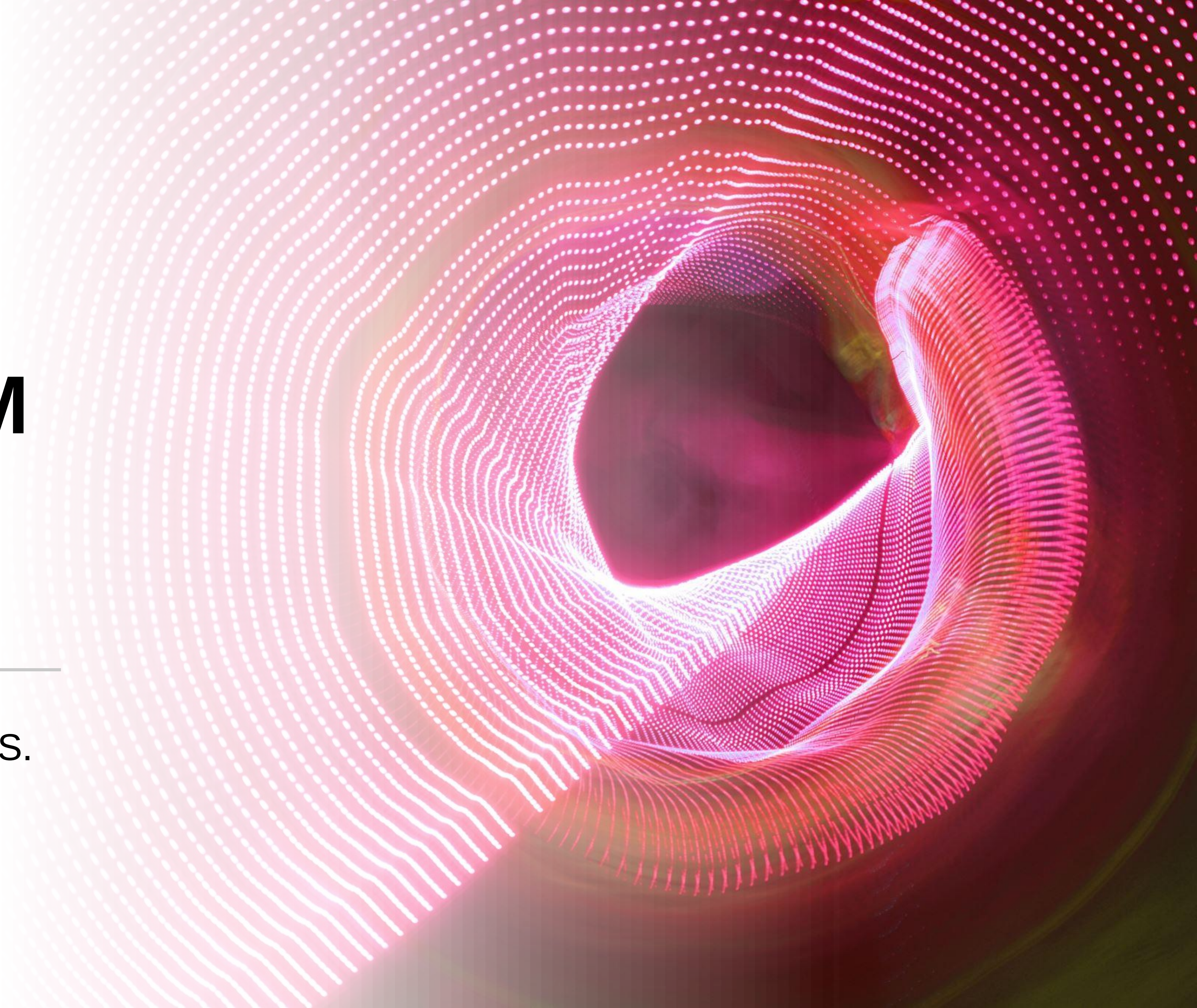
PRODUTO INTERNO EM ESPAÇOS VETORIAIS

PROFª GABRIELLE G. DOS S. RIBEIRO



Produto Interno

- Seja V um espaço vetorial. Um **produto interno em V** é uma função V x V que a cada par de vetores (u, v) ∈ V associa um número real, denotado por u.v ou <u, v>, e que satisfaz as seguintes condições:

P1) $u \,.\, u \geq 0$;

P2) $u \,.\, u = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

P3) $u \,.\, v = v.\, u$;

P4) $(u+v) \,.\, w = u.w + v.w$

P5) $(ku) \,.\, v = k\,(u \,.\, v)$, para todo real k.

Observações

- Dos 5 axiomas da definição anterior decorrem as propriedades:

Seja V um espaço com produto interno. Se u, v, w ∈ V e se k ∈ R, então

(i) 0. u = u. 0 = 0;

(ii) u. (v+w) = u. v + u. w   ou   u. (v − w) = u. v – u. w

(iii) u. (kv) = k(u. v)

(iv) u. $(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$ = u. v_1 + u. v_2+...+ u. v_n

Produto Interno

No $\mathbb{R}^n$,o produto interno padrão é:

$$< \text{u, v} > = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Exemplo concreto:

Se $u = (1, 2, 3)$e $v = (4, 0, -1)$:

$$< \text{u, v} > = 1 * 4 + 2 * 0 + 3 * (-1) = 4 - 3 = 1$$

Produto Interno

Lembrando!

Chama-se produto escalar (ou produto interno **usual**) de dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e v $= (x_2, y_2)$, e se representa por ***u.v*** , ao número real:

$$\boldsymbol{u.v} = \boldsymbol{x_1 . x_2 + y_1 . y_2}$$

O produto escalar de u por v também é indicado por **<u, v>** e se lê **"u escalar v"** ou **"produto interno dos vetores u e v".**

Produto Interno

Definição:

Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função:

$$< , > : V \times V \rightarrow R$$

Produto Interno

- Nesta aula apresentaremos a noção de produto interno em espaços vetoriais. Esta noção, como veremos, generaliza a noção de produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos de caráter geométrico previamente estudados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Produto Interno

Exemplo 2: No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, a função que associa a cada par de vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o número real

$$\boldsymbol{u \cdot v = 3x_1x_2 + 4y_1y_2}$$

é um produto interno.

De fato:

P1) u . u = 3 x_1 x_1+4 y_1 y_1 = 3 $x_1{}^2$+4 $y_1{}^2$ ≥ 0;

P2) u . u = 3 $x_1{}^2$+4 $y_1{}^2$ = 0 se, e somente se, u = 0;

P3) u . v = 3 x_1 x_2+4 y_1 y_2 = 3 x_2 x_1+4 y_2 y_1= v. u ;

Produto Interno

P4) (u+v) . w = u.w + v.w

(u+v) . w = $(x_1 + x_2, y_1 + y_2).(x_3, y_3)$ = $3(x_1 + x_2).x_3 + 4(y_1 + y_2).y_3$

$= (3x_1x_3 + 3x_2x_3) + (4y_1y_3 + 4y_2y_3) = (3x_1x_3 + 4y_1y_3) + (3x_2x_3 + 4y_2y_3)$ = u.w + v.w

P5) (ku) . v = k (u . v) , para todo real k.

(ku).v = $(k\,x_1, k\,y_1).(x_2, y_2) = 3(k\,x_1)\,x_2 + 4(k\,y_1)\,y_2 =$

$= k(3\,x_1\,x_2) + k(4\,y_1\,y_2) = k(3x_1\,x_2 + 4\,y_1\,y_2)$ = k(u.v)

O produto interno que acabamos de apresentar é diferente do produto interno usual no $\mathbb{R}^2$. Este seria definido por:

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$$

donde se depreende ser possível a existência de mais de um produto interno num mesmo espaço vetorial.

Exercício

- Considere $u = (x_1, y_1)$ e v= (x_2, y_2) . Verifique se o número

$$u \,.\, v = 2\, x_1\ x_2 + {y_1}^2\ {y_2}^2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exercício

- Considere $u = (x_1, y_1)$ e v= (x_2, y_2) . Verifique se o número

$$u \cdot v = 2\, x_1\, x_2 + {y_1}^2\, {y_2}^2$$

Define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

P1) u. u ≥ 0;

u . u = 2 $x_1\ x_1$+ ${y_1}^2\ {y_1}^2$ = 2 ${x_1}^2$+ ${y_1}^4$ ≥ 0

P2) u. u = 0 se, e somente se, u = 0;

Exercício

P3) u. v = v. u ;

u . v = 2 x_1 x_2+ ${y_1}^2$ ${y_2}^2$ = 2 x_2 x_1+ ${y_2}^2$ ${y_1}^2$ = v . u

P4) (u+v) . w = u.w + v.w

(u+v) . w = 2 $(x_1 + x_2)$ x_3+ $(y_1 + y_2)^2$ ${y_3}^2$ = $(2x_1 + 2x_2)$ x_3+ $({y_1}^2 + 2y_1y_2 + {y_2}^2)$ ${y_3}^2$ =

$(2x_1x_3 + 2x_2x_3)$ + $({y_1}^2{y_3}^2 + 2y_1y_2{y_3}^2 + {y_2}^2{y_3}^2)$ $\neq$ u.w + v.w

P5) (ku). v = k (u. v) , para todo real k.

(ku). v = $(kx_1, \mathrm{k}y_1).(x_2, y_2)$= 2 k$x_1$ x_2+ $k^2{y_1}^2$ ${y_2}^2$

k (u. v) = k(2 x_1 x_2+ ${y_1}^2$ ${y_2}^2$) = 2k x_1 x_2+ k ${y_1}^2$ ${y_2}^2$ Portanto, (ku). v ≠ k (u. v)

Então, u . v não define no $\mathbb{R}^2$ um produto interno.

Espaços Vetoriais Euclidianos

Definição: Um espaço vetorial euclidiano é um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno.

Vamos considerar somente espaços vetoriais euclidianos daqui pra frente.

Módulo de um Vetor

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno $< , >$. Dado um vetor v ∈ V chama-se **norma**, **módulo ou comprimento** de v o número real não-negativo, indicada por |v|, definido por:

$$|v| = \sqrt{<v , v>}$$

ou

$$|v| = \sqrt{v.v}$$

Então, se v= (x_1, y_1, z_1) for um vetor do $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ com **produto interno usual**, tem-se:

$$|v| = \sqrt{(x_1, y_1, z_1).(x_1, y_1, z_1)} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$$

Módulo de um Vetor

Distância entre dois vetores

Chama-se distância entre dois vetores (ou pontos) u e v o número real representado por d(u,v) e definido por:

$$d(u , v) = |u - v|$$

Módulo de um Vetor

Distância entre dois vetores

Sendo $u = (x_1, y_1, z_1)$ e v= (x_2, y_2, z_2) vetores do $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ com produto interno usual, tem-se:

d(u , v) = |u – v| = $|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)|$ =

$$\sqrt{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)}$$

Então

d(u , v) = $\sqrt{(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})^2 + (\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2})^2 + (\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2})^2}$

Módulo de um Vetor

Observações:

- Se |v| = 1, isto é, v . v = 1, o vetor v é dito um *vetor unitário*. Dizemos, também que v está *normalizado.*
- Todo vetor “v” não-nulo pode ser normalizado. Basta fazer

$$u = \frac{v}{|v|}$$

Exemplo

Consideremos o espaço V = $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ com o produto interno $v_1 . v_2 = 3x_1x_2$+ 2 y_1y_2 + z_1z_2, sendo $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Dado o vetor v = (-2, 1, 2) ∈ $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, em relação a esse produto interno tem-se:

|v| =$\sqrt{(x_1, y_1, z_1).(x_1, y_1, z_1)}$ = $\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$ → se fosse prod. Interno usual

|v| =$\sqrt{(-2, 1, 2).(-2, 1, 2)}$ = $\sqrt{3(-2)^2 + 2(1)^2 + 2^2}$ = $\sqrt{12 + 2 + 4}$ = $\sqrt{18}$

E normalizando “v”, resulta:

$$\frac{v}{|v|} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{18}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right)$$

Exemplo

Observamos que, relativamente ao produto interno usual, tem-se:

$$|v| = \sqrt{(-2,1,2).(-2,1,2)} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

E normalizando :

$$\frac{v}{|v|} = \frac{(-2,1,2)}{3} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- É importante observar que o módulo depende do produto interno utilizado. Se o produto interno muda, o módulo também se modifica.

- Assim, fica claro que os dois vetores normalizados acima, obtidos a partir de v, são unitários, cada um em relação ao respectivo produto interno.

Propriedades do Módulo de um Vetor

Propriedades

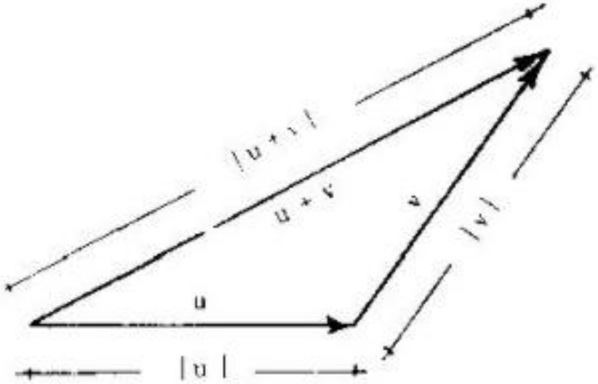
Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. São válidas as seguintes propriedades:

P1) $|v| \geqslant 0$ para todo $v \in V$. Além disto, $|v| = 0$ se, e só se, $v = 0$.

P2) $|\alpha v| = |\alpha|\,|v|$ para todo α real e todo $v \in V$.

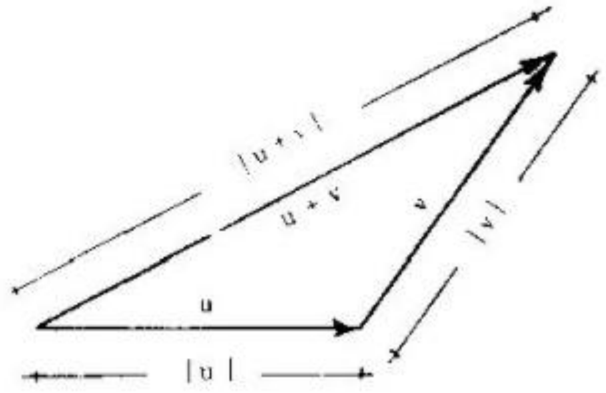
P3) *Desigualdade de Cauchy-Schwarz:* $|\langle u, v\rangle| \leqslant |u|\,|v|$ para todos $u, v \in V$.

P4) *Desigualdade Triangular:* $|u + v| \leqslant |u| + |v|$ para todos $u, v \in V$.



Propriedades do Módulo de um Vetor

- A *Desigualdade Triangular* confirma a propriedade geométrica de que, num triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado.
- A igualdade somente ocorre quando os dois vetores u e v são colineares (mesma direção).



Ângulo de dois Vetores

- Seja u e v vetores não-nulos de um espaço vetorial euclidiano V. O ângulo θ dos vetores u e v é determinado por:

$$\text{Cos } \theta = \frac{u \cdot v}{|u| . |v|}$$

que coincide com a fórmula para o cálculo do ângulo de dois vetores no $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, considerando o produto interno usual.

Exercícios

1. Seja o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$. Determine o ângulo entre o seguinte par de vetores:

u = (2, 1, -5) e v = (5, 0, 2)

2. Seja V = $\mathbb{R}^2$ com o produto interno dado por u . v = 2 x_1 x_2+ x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 y_1 y_2. Calcule o ângulo entre os vetores (1, 0) e (0, 1) com relação a este produto interno.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$com o produto interno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4x_1x_2 + y_1y_2$$

Calcule a distância entre os vetores u = $(1, 2)$ e v = (3, 0)

Exercícios

1. Seja o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$. Determine o ângulo entre o seguinte par de vetores:

u = (2, 1, -5) e v=(5, 0, 2)

|u| = $\sqrt{2.2 + 1.1 + (-5).(-5)}$ = $\sqrt{30}$

|v| = $\sqrt{5.5 + 0.0 + 2.2}$ = $\sqrt{29}$

u . v = 2.5 + 1.0 + (-5).2 = 0

Portanto, Cos θ = $\frac{0}{\sqrt{30}\sqrt{29}}$ = 0.   Então, θ = 90º

Exercícios

2. Seja V = $\mathbb{R}^2$ com o produto interno dado por <(x_1, y_1) , (x_2, y_2) > = 2 $x_1\ x_2$+ $x_1\ y_2$ + $x_2\ y_1 + 2\ y_1\ y_2$. Calcule o ângulo entre os vetores (1, 0) e (0, 1) com relação a este produto interno.

|u| = $\sqrt{2.1.1 + 1.0 + 1.0 + 2.0.0} = \sqrt{2}$

|v| = $\sqrt{2.0.0 + 0.1 + 0.1 + 2.1.1} = \sqrt{2}$

u . v = 2.1.0 + 1.1 + 0.0 + 2.0.1 = 1

Portanto, Cos θ = $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ Então, θ = 60º ou $\frac{\pi}{3}$

Exercícios

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$com o produto interno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4x_1x_2 + y_1y_2$$

Calcule a distância entre os vetores u $= (1, 2)$ e v = (3, 0)

d(u , v) = |u – v| = $\sqrt{(x_1 - x_2, y_1 - y_2).(x_1 - x_2, y_1 - y_2)} = \sqrt{\mathbf{4(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$
$= \sqrt{\mathbf{4(1-3)^2 + (2-0)^2}}$

d(u , v) = $\sqrt{\mathbf{20}} = \mathbf{4,47}$ u.c.