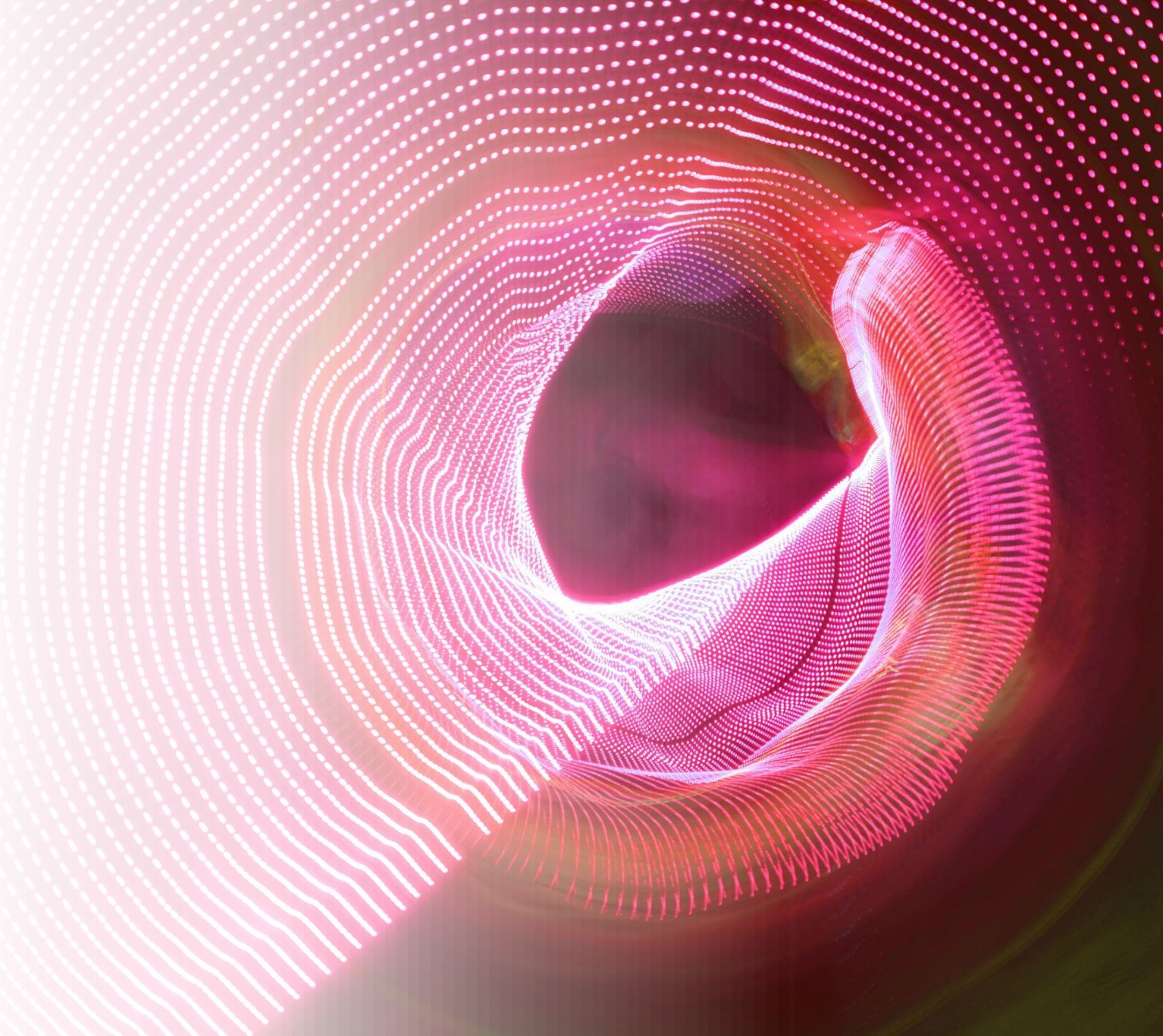
PRODUTO INTERNO EM ESPAÇOS VETORIAIS



PROFª GABRIELLE G. DOS S. RIBEIRO

VETORES ORTOGONAIS

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Diz-se que dois vetores u e v de V são ortogonais se, e somente se, $u \cdot v = 0$.

VETORES ORTOGONAIS

Exemplo:

Seja V **=** $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial euclidiano em relação ao produto interno

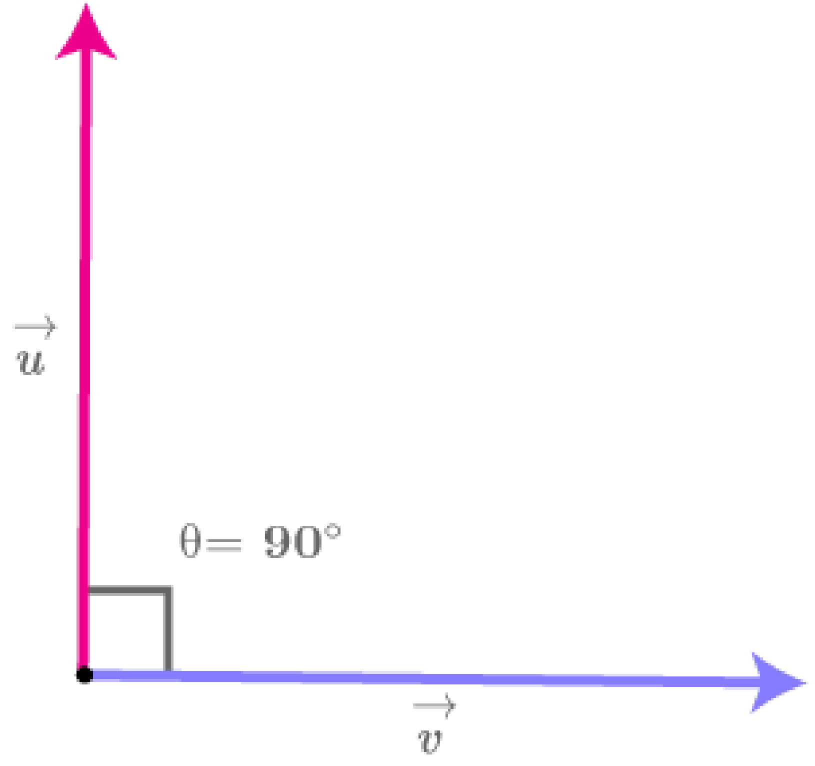
$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = x_1\ x_2 + 2y_1\ y_2$. Em relação a este produto interno, os vetores u=(-3,2) e v=(4,3) são ortogonais, pois:

u . v = -3.(4) + 2.(2).(3) = 0

Relação com ângulo

$$\frac{u.v}{\| u \|.\| v \|} = \cos\theta$$

- Quando $u \cdot v = 0$, temos $\theta = 90°$.



VETORES ORTOGONAIS

- ***OBSERVAÇÕES:***

1. O vetor 0 ∈ V é ortogonal a qualquer v ∈ V: 0 . v = 0

2. Se u ⊥ v , então α.u ⊥ v para todo α ∈ $\mathbb{R}$.

3. Se u_1 ⊥ v e u_2 ⊥ v , então $(u_1 + u_2)$ ⊥ v

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- Seja V um espaço vetorial euclidiano.

Diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é *ortogonal* se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é,

$$\boldsymbol{v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j}$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- ***Exemplo:*** No $\mathbb{R}^3$, o conjunto

$$\{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno usual, pois:

$(1, 2, -3) \cdot (3, 0, 1) = 0$

$(1, 2, -3) \cdot (1, -5, -3) = 0$

$(3, 0, 1) \cdot (1, -5, -3) = 0$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Teorema: **Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos A = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é linearmente independente (LI).**

De fato:

Considerando a igualdade

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

e façamos o produto interno de ambos os membros da igualdade por v_i:

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n) \cdot v_i = 0 \cdot v_i$$

Ou

$$a_1(v_1 . v_1) + ... + a_i(v_i . v_i) + ... + a_n(v_n . v_n) = 0$$

Como A é ortogonal, $v_j . v_i = 0$ para i≠j e $v_i . v_i \neq 0$, pois $v_i \neq 0$. Então, $a_i(v_i . v_i) = 0$ implica $a_i = 0$ para i=1,2,...,n. Logo, A = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI.

BASE ORTOGONAL

BASE ORTOGONAL

Obs.: uma *base* de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes (LI) que geram esse espaço.

Diz-se que uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é ortogonal se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Assim, levando em conta o teorema anterior, **se dim V = n, qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma base ortogonal.**

Por exemplo, o conjunto apresentado no exemplo anterior

$$\{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\}$$

É uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

BASE ORTONORMAL

BASE ORTONORMAL

Uma base B= $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é *ortonormal* se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é:

$$v_i . v_j = \begin{cases} 0 & para\ i \neq j \\ 1 & para\ i = j \end{cases}$$

Lembrete

- Se $|v| = 1$, isto é, $v \cdot v = 1$, o vetor v é dito um *vetor unitário*. Dizemos também que v está *normalizado.*

- Todo vetor “v” não-nulo pode ser normalizado. Basta fazer

$$u = \frac{v}{|v|}$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

BASE ORTONORMAL - Exemplos

Em relação ao produto interno usual, o conjunto:

1) $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ (é a base canônica);

2) $B = \{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$ é também base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ (verificar!);

3) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ (é a base canônica);

BASE

Tipo de base	Condições	Exemplo
Base qualquer	LI e gera V	(1,0), (1,1)
Base ortogonal	LI + vetores ortogonais	(1,0), (0,2)
Base ortonormal	Ortogonal + norma 1	(1,0), (0,1)

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Exercício: Considere B= $\{u_1, u_2, u_3\}$, sendo u_1 = $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, u_2 = (- $\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$) e u_3 = $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Verifique se B é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ considerando o **produto interno usual**.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Exercício: Considere B= $\{u_1, u_2, u_3\}$, sendo $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $u_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e $u_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Verifique se B é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 \,.\, u_2 = u_1 \,.\, u_3 = u_2 \,.\, u_3 = 0$$

e

$$u_1 \,.\, u_1 = u_2 \,.\, u_2 = u_3 \,.\, u_3 = 1$$

Portanto, B é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

OBSERVAÇÃO:

Já vimos que se v é um vetor não-nulo, o vetor $\frac{v}{|v|}$ é unitário. Diz-se, nesse caso, que v está normalizado.

Assim, uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal, normalizando cada vetor.

Por exemplo, a base B= $\{v_1, v_2, v_3\}$, sendo v_1=(1, 1, 1), $v_2 = (-2, 1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 1)$, é ortogonal em relação ao produto interno usual. Normalizando cada vetor, obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(-2,1,1)}{\sqrt{4+1+1}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{0+1+1}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

e $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal do R^3.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base qualquer B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal de V.

A base *ortogonal* será $\{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, ..., \boldsymbol{w_n}\}$

Para se obter uma base *ortonormal* a partir dela, basta normalizar cada w_i fazendo $\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{w_i}}{|\boldsymbol{w_i}|}$

Assim, obteremos a **base *ortonormal* B' = $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, ..., \boldsymbol{u_n}\}$**, obtida a partir da base B.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Os vetores $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_n}$ podem ser expressos do seguinte modo:

I) $\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1}$

II) $\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{v_2} \,.\, \boldsymbol{u_1}) \text{ x } \boldsymbol{u_1}$

III) $\boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_3} - (\boldsymbol{v_3} \,.\, \boldsymbol{u_2}) \text{ x } \boldsymbol{u_2} - (\boldsymbol{v_3} \,.\, \boldsymbol{u_1}) \text{ x } \boldsymbol{u_1}$

.

.

.

Lembrando que $\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{w_i}}{|\boldsymbol{w_i}|}$

De forma genérica:

$$\boldsymbol{w_n} = \boldsymbol{v_n} - (\boldsymbol{v_n} \,.\, \boldsymbol{u_{n-1}}) \text{ x } \boldsymbol{u_{n-1}} - \ldots - (\boldsymbol{v_n} \,.\, \boldsymbol{u_2}) \text{ x } \boldsymbol{u_2} - (\boldsymbol{v_n} \,.\, \boldsymbol{u_1}) \text{ x } \boldsymbol{u_1}$$

Exemplo

Sejam $v_1 = (1, 1, 1,)$ $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Esses vetores constituem uma base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ não-ortogonal em relação ao produto interno usual. Pretendemos obter, a partir de B, uma base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ que seja ortonormal.

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 1)$$

$$u_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$$v_2 \cdot u_1 = (0, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$w_2 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2 = (0, 1, 1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$w_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3 = v_3 - (v_3 \cdot u_2)\, u_2 - (v_3 \cdot u_1)\, u_1$$

$$v_3 \cdot u_2 = (0, 0, 1) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$v_3 \cdot u_1 = (0, 0, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_3 = (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_3 = (0, 0, 1) - \left(-\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$w_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$u_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal, pois:

$$u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$$

e:

$$|u_1| = |u_2| = |u_3| = 1$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **COMPONENTE DE UM VETOR NUMA BASE ORTOGONAL**

Seja V um espaço vetorial euclidiano e B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortogonal de V. Para um vetor w ∊ V, tem-se:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{v_1} + \ldots + \boldsymbol{a_i}\ \boldsymbol{v_i} + \ldots + \boldsymbol{a_n}\ \boldsymbol{v_n}$$

Efetuando o produto interno de ambos os membros da igualdade por v_i, vem:

$$w \cdot \boldsymbol{v_i} = a_1\ (v_1 . v_i) + \ldots + a_i\ (v_i . v_i) + \ldots + a_n (v_n . v_i)$$

Ou

$$w \cdot \boldsymbol{v_i} = a_i\ (v_i . v_i) \quad \text{pois } v_j . v_i = 0 \text{ para } i \neq j$$

Logo: $\boldsymbol{a_i = \frac{w\,.\,v_i}{v_i\,.v_i}}$ **é a expressão da i-ésima coordenada de w em relação à base B.**

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e a base ortogonal

$B = \{(2, 1), (-1, 2)\}$

Calculemos as coordenadas do vetor $w = (4, 7)$ em relação a essa base B, na qual $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (-1, 2)$. Pretende-se calcular a_1 e a_2 tais que:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

Utilizando a fórmula (3.6.4), vem:

$$a_1 = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \frac{(4, 7) \cdot (2, 1)}{(2, 1) \cdot (2, 1)} = \frac{8 + 7}{4 + 1} = \frac{15}{5} = 3$$

$$a_2 = \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \frac{(4, 7) \cdot (-1, 2)}{(-1, 2) \cdot (-1, 2)} = \frac{-4 + 14}{1 + 4} = \frac{10}{5} = 2$$

logo:

$$w = 3v_1 + 2v_2$$

ou:

$$w_B = (3, 2)$$

Como se viu, as coordenadas de w, na base canônica, são 4 e 7, enquanto na base B são 3 e 2.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Observação:** No caso particular de B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ser uma base ortonormal de V, os coeficientes a_i do vetor w são dados por:

$$\boldsymbol{a_i = w \,.\, v_i}$$

pois $\boldsymbol{v_i} \,.\, \boldsymbol{v_i}$ = 1

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Exercício:** A base B= {($\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$) , (- $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$)} é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno usual. Dado v = (5, 2), encontre a_1 e a_2 tal que

$$\mathbf{(5,2) = \boldsymbol{a_1} \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + \boldsymbol{a_2} \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$$

CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

- **Exercício:**

basta fazer:

$$a_1 = (5, 2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3 + \frac{8}{5} = \frac{23}{5}$$

$$a_2 = (5, 2) \cdot \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -4 + \frac{6}{5} = -\frac{14}{5}$$

logo:

$$v_B = \left(\frac{23}{5}, -\frac{14}{5}\right)$$