Лабораторная работа №1

Алина Орехова, Ангелина Стюхина

22 февраля 2023

Наименование работы: определение момента инерции тела с помощью крутильного маятника.
Цель работы: экспериментальное определение момента инерции твердого тела с помощью крутильного маятника.
Принадлежности: крутильный маятник, электронный секундомер, штангенциркуль, линейка, технические весы с набором гирь и разновесок, набор грузиков.
Рабочая формула:

$$I = \frac{m}{2}\left(L^2 + \frac{d_0^2}{2}\right)\frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \qquad (1)$$

Краткая теория

Определим момент инерции массивного цилиндрически симметричного тела 1 (рис.1). С этой целью тело прикрепим к тонкой прямоугольной пластинке 2, подвешенной стальной проволокой 3 к вертикальной рамке 4, установленной на основании 5.

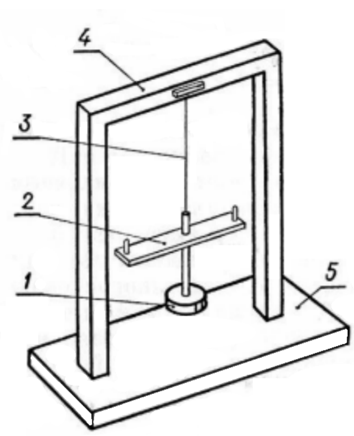

Рис. 1: Чертеж установки. Крутильный маятник

Данная система, образующая крутильный маятник, за счет упругих сил деформации, возникающих в проволоке при ее закручивании, может колебаться в горизонтальной плоскости.

При повороте системы на малый угол α в стальной проволоке возникает раскручивающий момент M, который в пределах малых отклонений пропорционален углу, поскольку можно считать, что деформация носит упругий характер, подчиняющийся закону Гука. Таким образом,

$$M = \alpha D, \qquad (2)$$

где D - раскручивающий момент, соответствующий единице угла кручения.

Если теперь системе предоставить возможность колебаться, то она будет совершать гармоническое колебательное движение по закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad (3)$$

где α - текущий гол отклонения, α_0 - максимальный угол отклонения (амплитуда колебаний), T - период колебания.

Угловая скорость гармонического колебатального движения выражается

$$\omega = \frac{da}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t, \tag{4}$$

а ее максимальное значение достигается, когда система проходит положение равновесия ($t = 0, \frac{T}{2}, 2\frac{T}{2}, 3\frac{T}{2}, ...$), то есть

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\cdot \tag{5}$$

В то же время, кинетическую энергию вращающегося тела можно подсчитать суммированием кинетических энергий отдельных его частиц:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}\cdot \tag{6}$$

В соответствии с формулами (5) и (6) кинетическая энергия системы в положении равновесия запишется

$$E_k = \frac{2\pi^2\alpha_0^2}{T^2}I\cdot \tag{7}$$

Здесь I - момент энергии системы. Эта энергия должна равняться потенциальной энергии системы при ее максимальном отклонении от положения равновесия. Потенциальную энергию подсчитаем, используся выражение (2)

$$E_p = \int_0^{\alpha_0} M d\alpha = \int_0^{\alpha_0} \alpha D d\alpha = \frac{D\alpha_0^2}{2}\cdot \tag{8}$$

Из условия $E_k = E_p$ легко определяется T - период колебания системы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\cdot \tag{9}$$

Подвесим теперь к пластине 2 с обеих сторон на равных расстояниях r от оси вращения одинаковые цилиндрики с массой m.

Момент инерции системы изменится:

$$I_1 = I + 2I_2, \tag{10}$$

где I_2 - момент инерции цилиндра относительно оси вращения системы.

Пользуясь теоремой Штейнера-Гюйгенса,

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(\omega R^2)^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2, I = I_0 + mR^2 \tag{11}$$

можно записать

$$I_2 = \frac{1}{2}mr_0^2 + mr^2, \tag{12}$$

где r_0 - радиус добавленных цилиндриков.

Таким образом, период колебаний новой системы будет иметь вид

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2\left(\frac{1}{2}mr_0^2 + mr^2\right)}{D}}. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (9), (13) относительно неизвестной величины I, найдем:

$$I = 2m\left(r^2 + \frac{r_0^2}{2}\right)\frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \tag{14}$$

При выполнении работы удобно иметь дело не с величинами r_0 и r, а с диаметрами цилиндриков d_0 и расстояниями L между ними.

Учитывая, что $r_0 = \frac{d}{2}$ и $r = \frac{L}{2}$, окончательно получаем рабочую формулу:

$$I = \frac{m}{2}\left(L^2 + \frac{d_0^2}{2}\right)\frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \tag{15}$$

Экспериментальная часть

1. Измерение момента инерции ненагруженной системы I_0:

   1.1. Отклонить пластинку 2 от положения равновесия на $10 - 15^\circ$ и предоставить системе возможность свободно колебаться.

   1.2. После установления устойчивых колебайний системы в горизонтальной плоскости измерить время t не менее 30 полных колбаний.

   1.3. По известным t и числе колебаний n вычислить период T одного полного колебания.

   1.4. Подвесить к пластинке 2 симметрично дополнительные цилиндрики и вноваь определить период колебаний T_1 системы с цилиндрами.

   1.5. Измерить линейкой расстояние между цилиндриками L; штангенциркулем измерить диаметры цилиндриков d_0; измерить массы цилиндриков на технических весах.

   1.6. Вычислить значение постоянного множителя K в рабочей формуле (15), где $K = \frac{m}{2}\left(L^2 + \frac{d_0^2}{2}\right)$

   1.7. Вычислить момент инерции системы I_0 по формуле (15).

   1.8. Результаты измерений и вычислений свести в табл.1.

2. Измерение момента инерции нагруженной системы I_1:

   2.1. Прикрепить к системе тело, момент инерции которого требуется измерить - цилиндр.

   2.2 Провести операции, аналогичные операциям в п. 1 и вычислить момент инерции системы с телом I_1.

   2.3. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 2, аналогичную по форме табл. 1.

3. Измерение момента инерции исследуемого тела $I_т$:

3.1. Из значения момента инерции системы с телом I_1 вычесть значение момента инерции ненагруженной системы I_0 и, таким образом, получить значение момента инерции тела $\overline{I_т}$ относительно его геометрической оси.

4. Определение относительной погрешности метода измерения:

4.1. Измерить штангенциркулем радиус тела (цилиндра); определить массу M по маркировке.

4.2. Вычислить по известным M и R момент инерции тела цилиндрической формы относительно геометрической оси $I'_т$ по формуле $I'_т = \frac{MR^2}{2}\cdot$, где R - радиус тела; M - масса тела.

4.3. Вычислить погрешность экспериментального определения момента инерции тела относительно теоретического значения: $\frac{|I'_т - \overline{I_т}|}{I'_т}100\%\cdot$

4.4. Записать окончательный результат измерения момента инерции тела с учетом найденной погрешности метода $\Delta I_м$:

$$I_т = \overline{I_т} \pm \Delta I_м\cdot \tag{16}$$

Результаты опыта:

Система	№ опыта	t, с	n	T, с	$\overline{T}$, с	t_1, с	n	T_1, с	$\overline{T_1}$, с	K, кг $\cdot$ м^2	I, кг $\cdot$ м^2
I_0	1	45,31	50	0,9062	0,9069	61,84	30	2,0613	2,0619	0,0026	$I_0 = 0{,}0006$
	2	45,23	50	0,9046		61,89	30	2,0639			
	3	45,49	50	0,9098		61,85	30	2,0616			
I_1	1	36,88	30	1,2292	1,2289	65,93	30	2,1976	2,1997		$I_1 = 0{,}0012$
	2	36,87	30	1,2290		65,89	30	2,1963			
	3	36,85	30	1,2286		66,16	30	2,2053			

Рассчитаем инерцию тела (цилиндра) по формуле $\overline{I_т} = I_1 - I_0 = 0{,}0012 - 0{,}0006 = 0{,}0006\cdot$

Рассчитаем относительную погрешность метода измерения. Для этого вычислим теоретическое значение момент инерции исследумого тела - цилиндра.

Масса цилиндра $M = 0{,}785$кг, диаметр - $D = 0{,}078$м. Тогда по формуле $I'_т = \frac{MR^2}{2}$, где R - радиус тела, m - масса тела, получаем $I'_т = 0{,}00059$.

Вычислим погрешность экспериментального определения момента инерции тела относительно теоретического значения:

$$\frac{|I'_т - \overline{I_т}|}{I'_т}100\% = \frac{|0{,}00059 - 0{,}0006|}{0{,}00059}100\% = 1{,}6\%\cdot$$

Получим итоговый результат:

$$I_т = 0{,}0006 \pm 0{,}000016\cdot \tag{17}$$

Анализ полученных результатов: экспериментальное и теоретическое значения момента инерции $\overline{I_т}$ и $I'_т$ близки, поэтому мы убедились в справедливости формулы момента инерции.