Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники
Кафедра информатики и прикладной математики

Дисциплина «Вычислительная математика»
Лабораторная работа №3
Интерполяционный многочлен Ньютона

Выполнил:
Ореховский Антон Михайлович
Группа P3217

Преподаватель:
Калёнова Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург, 2017 г.

Описание метода

Интерполяционная формула Ньютона – формула, применяющая для полиноминального интерполирования.

Пусть функция *f(x)* задана на множестве *X* и фиксированы попарно различные точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$.

Тогда разделённой разностью нулевого порядка функции *f* в точке x_j называют значение $f(x_j)$ а разделённую разность порядка *k* для системы точек определяют рекурсивно через разделённые разности порядка (k – 1) по формуле

$$f\left(x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+k}\right) = \frac{f\left(x_{j+1}; x_{j+2}; \dots; x_{j+k}\right) - f\left(x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+k-1}\right)}{x_{j+k} - x_j}$$

В частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

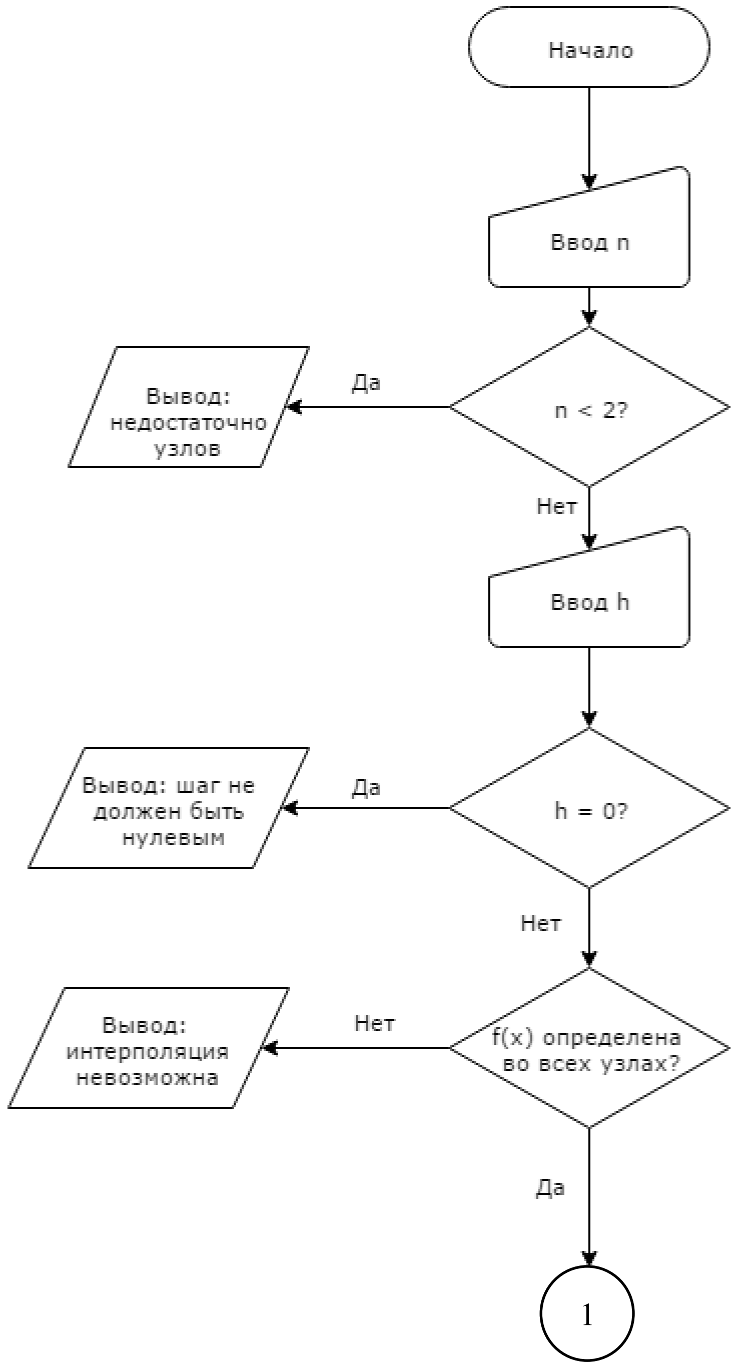
С помощью разделённых разностей можно записать интерполяционный многочлен Ньютона «вперёд»:

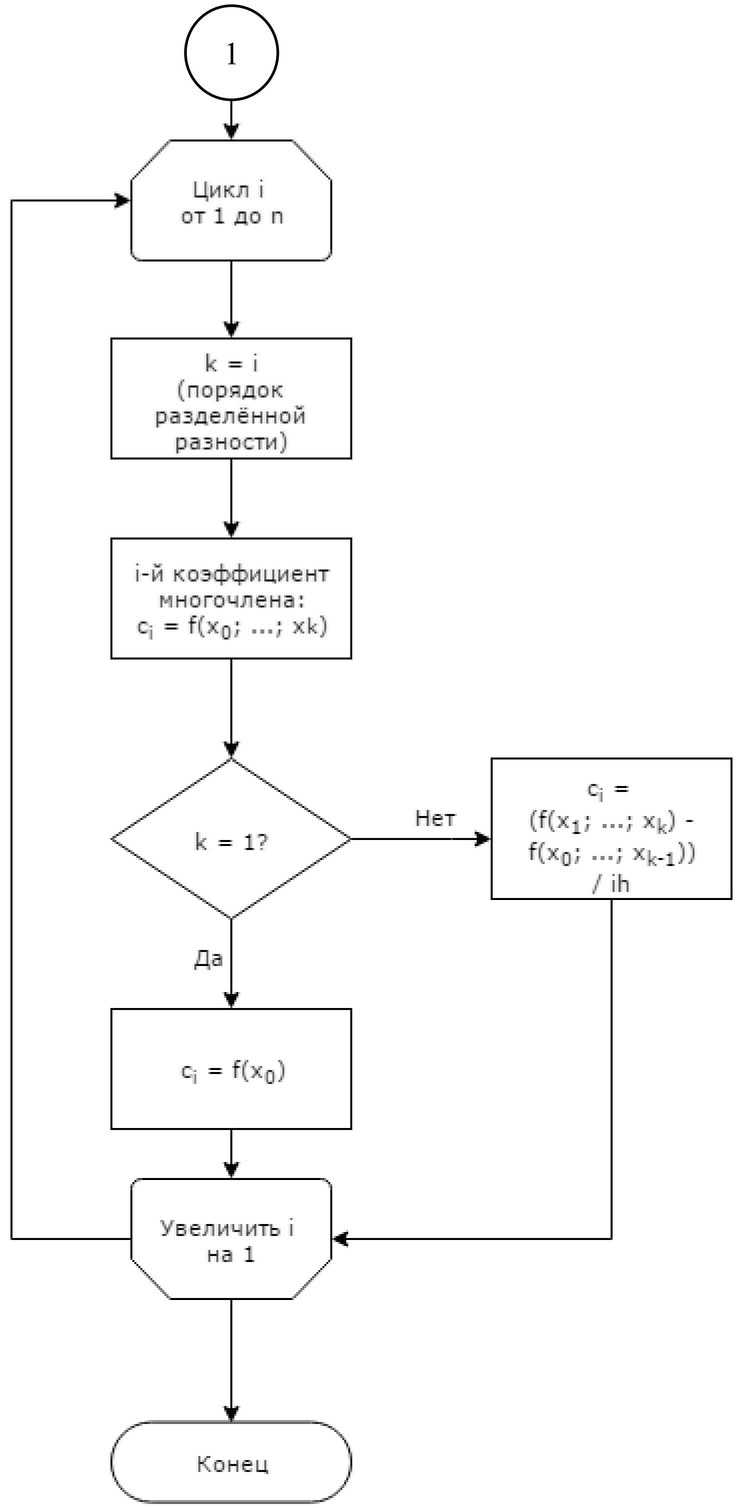
$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0;\ x_1)(x - x_0) + f(x_0;\ x_1;\ x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; \dots\ x_n)\prod_{k=0}^{n-1}(x_0 - x_k)$$

И интерполяционный многочлен Ньютона «назад»:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n;\ x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f(x_n; \dots\ x_0)\prod_{k=1}^{n}(x_0 - x_k)$$

Блок-схема

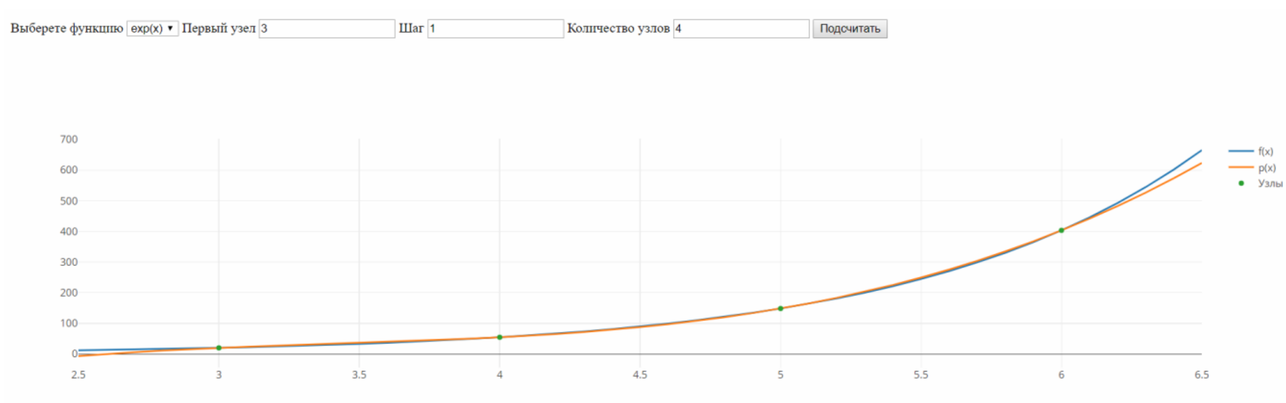

Начало
Ввод n
n < 2?
Да
Вывод: недостаточно узлов
Нет
Ввод h
h = 0?
Да
Вывод: шаг не должен быть нулевым
Нет
f(x) определена во всех узлах?
Нет
Вывод: интерполяция невозможна
Да
1

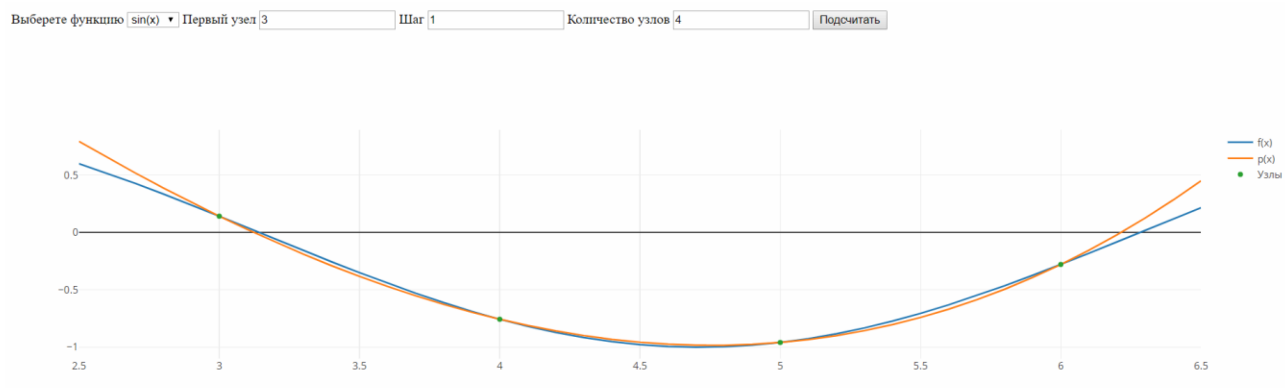

1
Цикл i
от 1 до n
k = i
(порядок
разделённой
разности)
i-й коэффициент
многочлена:
$c_i = f(x_0; ...; xk)$
k = 1?
Нет
$c_i =$
$(f(x_1; ...; x_k) -$
$f(x_0; ...; x_{k-1}))$
/ ih
Да
$c_i = f(x_0)$
Увеличить i
на 1
Конец

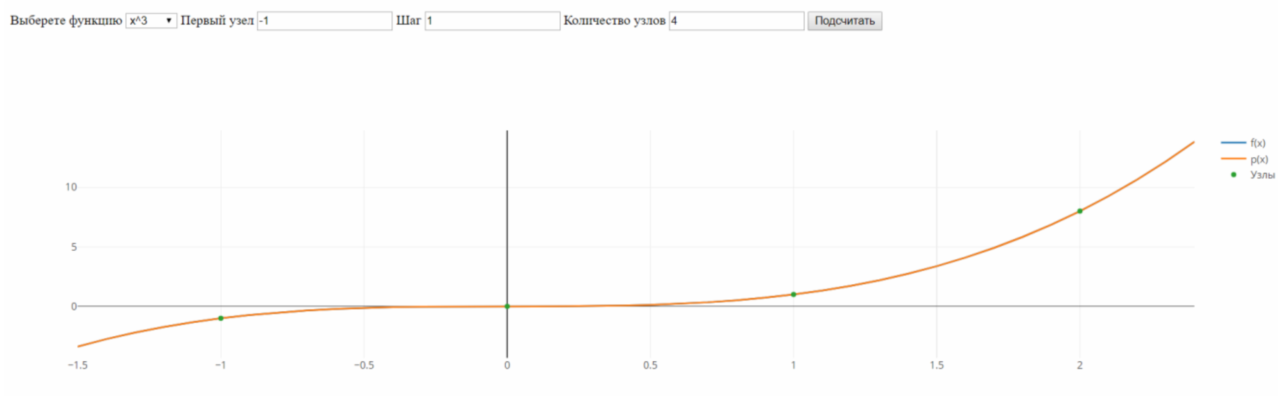
Листинг программы (JS)

```
static difference(x, h, k) {
	if (k == 0) return f(x);
	return ( NewtonMethod.difference(x + h, h, k - 1) -  NewtonMethod.difference(x, h, k - 1)) / (h * k);
	alert('1');
}

static interpolate(x0, step, nodeCount) {
	if (nodeCount < 2) {
		alert("Количество узлов не может быть меньше 2.");
		return null;
	}

	if(Math.abs(step) < 0.1) {
		alert(Math.abs(step));
		alert("Шаг не может быть равен нулю.");
		return null;
	}

	var xn = x0;
	for (var i = 0; i < nodeCount; i++) {
		var yn = f(xn);
		if (isNaN(yn) || !isFinite(yn)){
			alert("Функция должна быть определена во всех узлах.");
			return null;
		}
		xn += step;
	}

	var coefficients = new Array(nodeCount);
	for (var i = 0; i < nodeCount; i++){
		coefficients[i] = NewtonMethod.difference(x0, step, i);
	}
	return coefficients;
}
```

Тестовые данные







Вывод

Интерполяция даёт более точный результат на отрезке, чем аппроксимация.
С другой стороны, за пределами отрезка интерполяция может сильно отличаться от функции, в то время как аппроксимация позволяет достаточно точно экстраполировать её.
По сравнению с многочленом Лагранжа многочлен Ньютона удобен для вычислений тем, что при увеличении числа узлов интерполяции не обязательно перестраивать весь полином заново.

Интерполяционные полиномы в форме Ньютона удобно использовать, если точка интерполирования находится вблизи начала (прямая формула Ньютона) или конца таблицы (обратная формула Ньютона).