Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики
Факультет Программной инженерии и компьютерной техники
Кафедра информатики и прикладной математики

Дисциплина «Вычислительная математика»
Лабораторная работа №4
Метод Рунге-Кутты

Выполнил:
Ореховский Антон Михайлович
Группа P3217

Преподаватель:
Калёнова Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург, 2017 г.

Теория

Классический метод Рунге — Кутты четвёртого порядка

Метод Рунге — Кутты четвёртого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге — Кутты.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее $\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^n$, а $x, h \in \mathbb{R}^1$).

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(x_n, \mathbf{y}_n\right),$$
$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),$$
$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),$$
$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{k}_3\right).$$

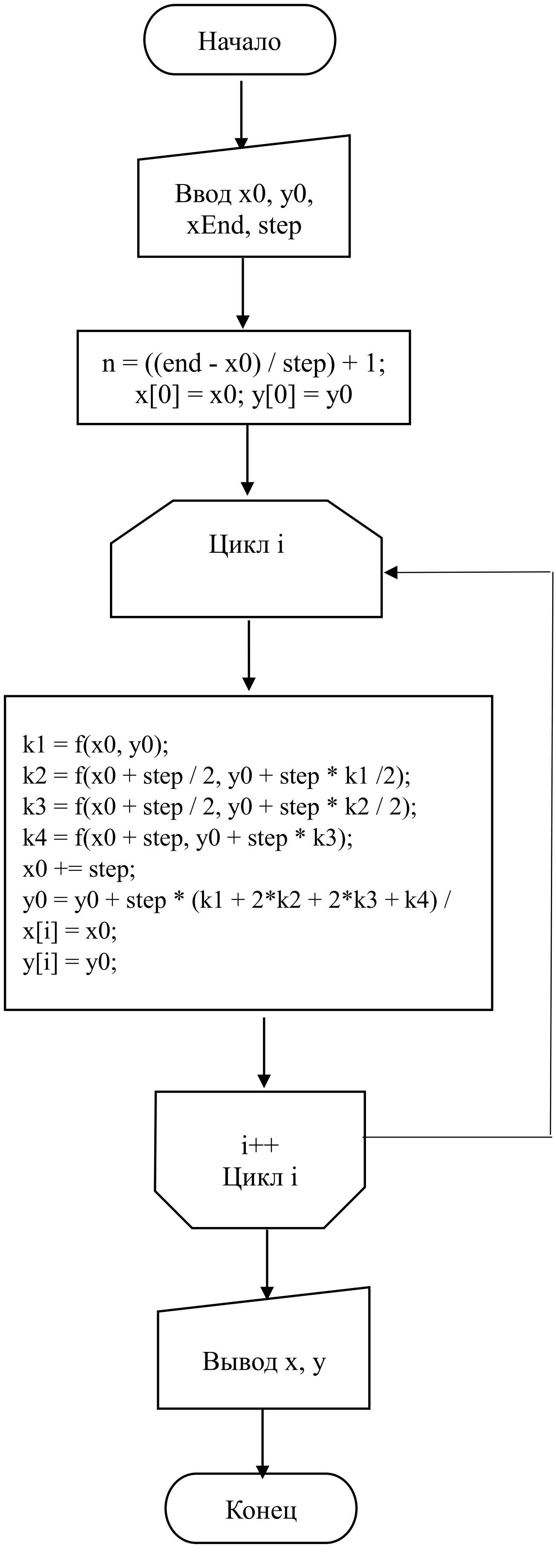
где h — величина шага сетки по x.

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

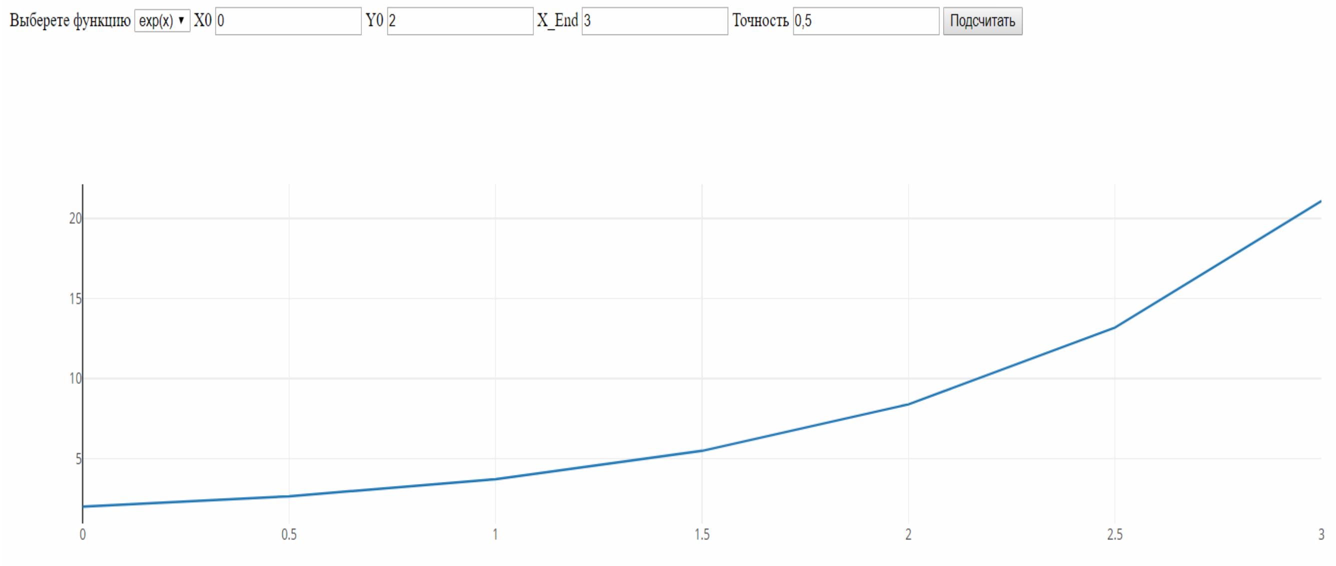
Листинг численного метода (JS)

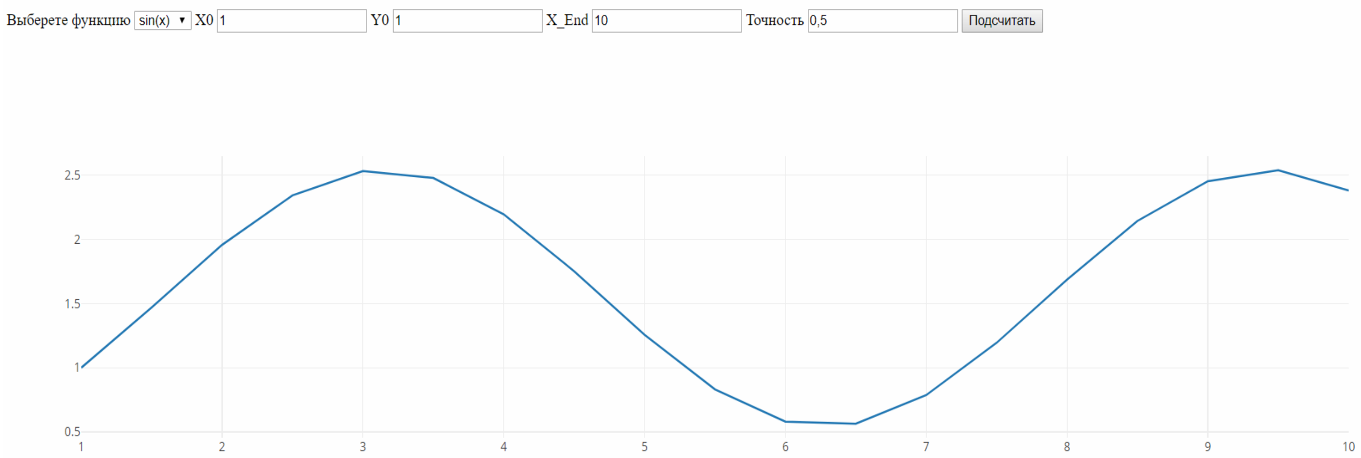
```
class RungeKuttMethod
{
    static runge(x0, y0, end, accur, f) {
        var k1 = 0, k2 = 0, k3 = 0, k4 = 0;
        var step = accur;
        var n = ((end - x0) / step) + 1;

        var points = [[], []];

        points[0][0] = x0;
        points[1][0] = y0;
        for (var i = 1; i < n; i++) {
            k1 = f(x0, y0);
            k2 = f(x0 + step / 2, y0 + step * k1 /2);
            k3 = f(x0 + step / 2, y0 + step * k2 / 2);
            k4 = f(x0 + step, y0 + step * k3);

            x0 += step;
            y0 = y0 + step * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;

            points[0][i] = x0;
            points[1][i] = y0;
        }
        return points;
    }
}
```

Блок-схема


Начало
Ввод x0, y0,
xEnd, step
n = ((end - x0) / step) + 1;
x[0] = x0; y[0] = y0
Цикл i
k1 = f(x0, y0);
k2 = f(x0 + step / 2, y0 + step * k1 /2);
k3 = f(x0 + step / 2, y0 + step * k2 / 2);
k4 = f(x0 + step, y0 + step * k3);
x0 += step;
y0 = y0 + step * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) /
x[i] = x0;
y[i] = y0;
i++
Цикл i
Вывод x, y
Конец

Примеры





Вывод

Метод Рунге-Кутты имеет 4-ый порядок точности, а значит он более точен че метод Эйлера, который имеет второй порядок точности.

Метод Рунге-Кутты относится к явным одношаговым методам, поэтому для него требуется больший объём вычислений, чем для многошаговых той же точности. Явные методы позволяют выразить yi через предыдущие значения yi-1, yi-2, …, в то время как неявные требуют решения дополнительных уравнений.