

Расчетная работа №1 должна быть выполнена с использованием метода искусственного базиса по образцу, данному ниже (можно писать от руки, можно напечатать).

Online-калькуляторами можно пользоваться только для проверки ответа.

Скопированные online-решения не засчитываются.

На последнем практическом занятии будет рубежная работа – защита расчетных работ №1 и 2. Вы должны уметь объяснять всё, что сделали.

I. Условие задачи

Для кормления животного ежедневно требуются витамины А, В и С. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
А	-	0,1 %	0,003 г.
В	0,3 %	0,217%	0,027 г.
С	0,1%	0,267 %	0,022 г.
Цена	0,1 руб./г.	0,255 руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Симплекс-метод
- Графический метод
- Через двойственную задачу

II. Математическая постановка задачи

Обозначим x_1^* , x_2^* - вес оптимального количества корма 1 и 2 соответственно. Тогда нам надо решить следующую задачу линейного программирования: найти минимум f при ограничениях (1)

$$f = 0,1x_1 + 0,255x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,001x_2 \geq 0,003 \\ 0,003x_1 + 0,00217x_2 \geq 0,027 \\ 0,001x_1 + 0,00267x_2 \geq 0,0215 \end{cases} \quad (1)$$

Или: $\min\{C^T X \mid AX \geq B, X \geq 0\}$

Где $C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00217 \\ 0,001 & 0,00267 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2,267 \geq 22 \end{cases}$$

III. Симплекс-метод.

Зная, что $\min(0,1x_1 + 0,255x_2) = -\max(-0,1x_1 - 0,255x_2)$, будем искать \max функции $-f$.

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 . При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 - x_4 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 - x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Применим метод искусственного базиса. Для этого введем переменные y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 - x_4 + y_2 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 - x_5 + y_3 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Будем решать вспомогательную задачу

$$W = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$y_1 = 3 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = 27 - 3x_1 - 2,17x_2 + x_4$$

$$y_3 = 22 - x_1 - 2,67x_2 + x_5$$

$$W = -4x_1 - 5,84x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 52$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
y_1	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	-2,17	0	1	0	27
y_3	-1	-2,67	0	0	1	22
W	-4	-5,84	1	1	1	52

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ . Видим, что при увеличении x_2 быстрее всего до нуля доходит y_1 .

Меняем y_1 и x_2 местами.

$$x_2 = 3 + x_3 - y_1$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= 27 - 3x_1 - 2,17(3 + x_3 - y_1) + x_4 = \\
&= 20,49 - 3x_1 - 2,17x_3 + 2,17y_1 + x_4 \\
y_3 &= 22 - x_1 - 2,67(3 + x_3 - y_1) + x_5 = \\
&= 13,99 - x_1 - 2,67x_3 + 2,67y_1 + x_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= -4x_1 - 5,84(3 + x_3 - y_1) + x_3 + x_4 + x_5 + 52 = \\
&= -4x_1 + 5,84y_1 - 4,84x_3 + x_4 + x_5 + 34,48
\end{aligned}$$

	x_1	y_1	x_3	x_4	x_5	β
x_2	0	-1	1	0	0	3
y_2	-3	2,17	-2,17	1	0	20,49
y_3	-1	2,67	-2,67	0	1	13,39
W	-4	5,84	-4,84	1	1	34,48

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ . Видим, что при увеличении x_3 быстрее всего до нуля доходит y_3 .

Меняем y_3 и x_3 местами.

$$\begin{aligned}
x_3 &= -0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24 \\
x_2 &= 3 + (-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24) - y_1 = \\
&= 8,24 - 0,375x_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 \\
y_2 &= 20,37 - 3x_1 - 2,21(-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + \\
&+ 5,24) + 2,17y_1 + x_4 = 9,119 - 2,186x_1 + 0,814y_3 + \\
&+ x_4 - 0,814x_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= -4x_1 + 5,84y_1 - 4,84(+(-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + \\
&+ 0,375x_5 + 5,24) + x_4 + x_5 + 34,48 = \\
&= -2,185x_1 + y_1 + 1,815y_3 + x_4 - 0,815x_5 + 9,089
\end{aligned}$$

	x_1	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	-0,375	0	-0,375	0	0,375	8,246
y_2	-2,186	0	0,814	1	-0,814	9,119
x_3	-0,375	1	-0,375	0	0,375	5,246
W	-2,185	1,815	1	1	-0,815	9,089

Выбираем большую по модулю отрицательную Δ . Видим, что при увеличении x_1 быстрее всего до нуля доходит y_2 .

Меняем y_2 и x_1 местами.

$$x_1 = -0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -0,375(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) \\ &- 0,375y_3 + 0,375x_5 + 8,24 = \\ &= 0,171y_2 - 0,515y_3 - 0,171x_4 + 0,515x_5 + 6,678 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -0,375(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) \\ &+ y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24 = \\ &= 0,171y_2 + y_1 - 0,515y_3 - 0,171x_4 + 0,515x_5 + 3,678 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= -2,185(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) \\ &+ y_1 + 1,815y_3 + x_4 - 0,815x_5 + 9,089 = y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}$$

	y_2	y_1	y_3	x_4	x_5	β
x_2	0,171	0	-0,515	-0,171	0,515	6,678
x_1	-0,457	0	0,372	0,457	-0,372	4,17
x_3	0,171	1	-0,515	-0,171	0,515	3,678
W	1	1	1	0	0	0

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \geq 0$.

Вспомогательная задача решена. Вернёмся теперь к исходной задаче.

Выбросим вспомогательные переменные y_1, y_2, y_3 , так как они нам больше не понадобятся.

$$x_1 = 4,17 + 0,457x_4 - 0,372x_5$$

$$x_2 = 6,678 - 0,171x_4 + 0,515x_5$$

$$x_3 = 3,678 - 0,171x_4 + 0,515x_5$$

$$\begin{aligned} f &= 0,1x_1 + 0,255x_2 = 0,1(4,17 + 0,457x_4 - 0,372x_5) + \\ &+ 0,255(6,678 - 0,1761 + 0,515x_5) = \\ &= 2,11949 + 0,0021x_4 + 0,0941x_5 \end{aligned}$$

	x_4	x_5	β
x_2	-0,171	0,515	6,678
x_1	0,457	-0,372	4,17
x_3	-0,171	0,515	3,678
-f	-0,0021	-0,0941	-2,11949

Обе характеристические разности отрицательные. Найдено оптимальное решение.

$$x_1^* = 4,17$$

$$x_2^* = 6,678$$

$$f^* = 2,11949 \approx 2,12$$

IV. Графический метод.

$$f = 0,1x_1 + 0,255 \rightarrow \min$$

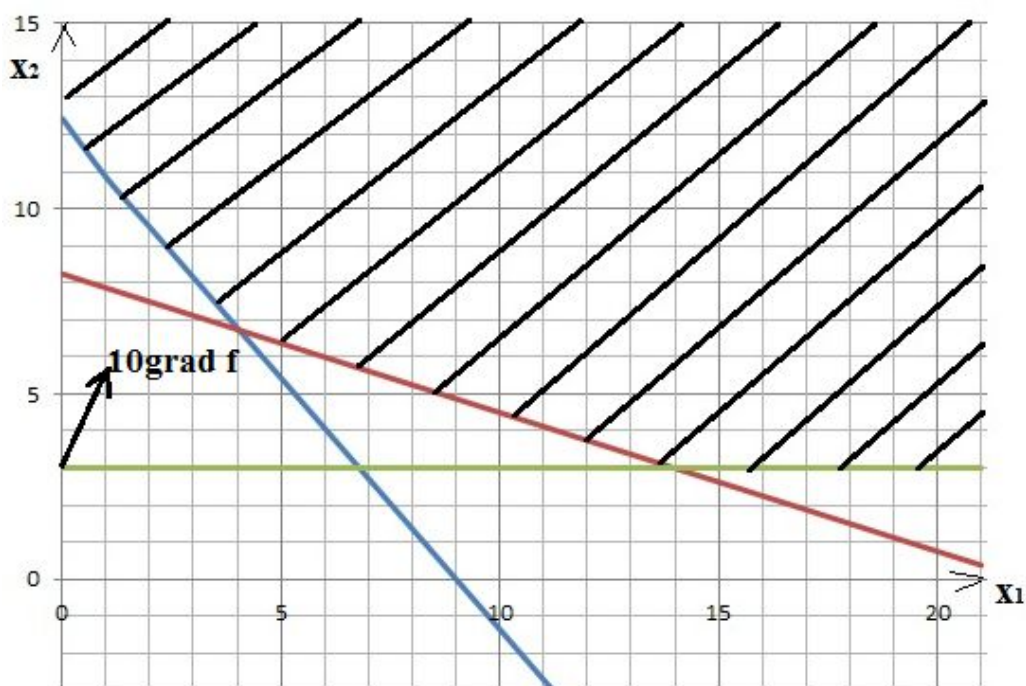
При следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2,67x_2 \geq 2,2 \end{cases} \quad (2)$$

Построим область G, заданную системой неравенств (2) и

$$graf = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix}$$

Удобно построить $\begin{pmatrix} 1 \\ 2,55 \end{pmatrix}$



Движемся противоположно направлению градиента и определим оптимальное решение. Оно расположено на пересечении следующих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2,17x_2 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 = 22 \end{cases} \quad \begin{cases} 66 - 8,01x_2 + 2,17x_2 = 27 \\ x_1 = 22 - 2,67x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5,84x_2 = 39 \\ x_1 = 22 - 2,67x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6,678 \\ x_1 = 4,1695 \end{cases}$$

Следовательно $x_1^* = 4,1695$

$$x_2^* = 6,678$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 4,1695 \\ 6,678 \end{pmatrix}$$

Вычислим f^*

$$f^* = 0,1x_1^* + 0,255x_2^* = 0,1 * 4,1695 + 0,255 * 6,678 = 2,11984 \approx 2,12$$

V. Решение двойственной задачи.

Прямая задача:

$$\min\{C^T X \mid AX \geq B, X \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 0,003 \\ x_1 \geq 0 \\ 0,003x_1 + 0,00217x_2 \geq 0,027 \\ x_1 + 0,00267x_2 \geq 0,022 \end{cases}$$

и функционал $\min\{0,1x_1 + 0,255x_2\}$

Двойственная задача:

$$\max\{B^T \lambda \mid A^T \lambda \leq C, \lambda \geq 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00217 \\ 0,001 & 0,00267 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0,003 & 0,001 \\ 0,001 & 0,00217 & 0,00267 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$\max\{0,003\lambda_1 + 0,027\lambda_2 + 0,022\lambda_3\}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 0,003\lambda_2 + 0,001\lambda_3 \leq 0,1 \\ \lambda_1 + 0,00217\lambda_2 + 0,00267\lambda_3 \leq 0,255 \\ \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Решим двойственную задачу Симплекс-методом.

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные переменные λ_4, λ_5 . При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1 + 2,17\lambda_2 + 2,67\lambda_3 + \lambda_5 = 255 \end{cases}$$

Построим симплекс-таблицу:

$$\lambda_4 = -3\lambda_2 - \lambda_3 + 0,1$$

$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2,17\lambda_2 - 2,67\lambda_3 + 0,255$$

$$f_D = 3\lambda_1 + 27\lambda_2 + 22\lambda_3$$

	λ_1	λ_2	λ_3	β
λ_4	0	-3	-1	100
λ_5	-1	-2,17	-2,67	255
f_D	0,003	0,027	0,022	0

Выбираем наибольшую положительную Δ . Видим, что при увеличении λ_2 быстрее всего до нуля дойдёт λ_4 . Меняем λ_2 и λ_4 местами.

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(-\lambda_3 - \lambda_4 + 100) = -0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33$$

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= -\lambda_1 - 2,17(-0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33) - 2,67\lambda_3 + \\ &+ 255 = -\lambda_1 - 1,9467\lambda_3 + 0,7233\lambda_4 + 182,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_D &= 0,003\lambda_1 + 0,027(-0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33) + 0,022\lambda_3 = \\ &= 0,003\lambda_1 + 0,013009\lambda_3 - 0,0089991\lambda_4 + 0,8999 \end{aligned}$$

	λ_1	λ_4	λ_3	β
λ_2	0	-0,3333	-0,3333	33,33
λ_5	-1	0,7233	-1,9467	182,7
f_D	0,003	-0,0089991	0,013009	0,8999

Выбираем наибольшую положительную Δ . Видим, что при увеличении λ_3 быстрее всего до нуля дойдёт λ_5 . Меняем λ_3 и λ_5 местами.

$$\lambda_3 = \frac{1}{1,9467} (-\lambda_1 + 0,7233\lambda_4 - \lambda_5 + 182,7) =$$

$$= -0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85$$

$$\lambda_2 = -0,3333(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85) -$$

$$-0,3333\lambda_4 + 33,33 =$$

$$= 0,1712\lambda_1 - 0,4573\lambda_4 + 0,1712\lambda_5 + 0,00202$$

$$f_D = 0,003\lambda_1 + 0,013009(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 +$$

$$+93,85) - 0,008999\lambda_4 + 0,8999 =$$

$$= -0,003683\lambda_1 - 0,0041598\lambda_4 - 0,006683\lambda_5 + 2,1203$$

	λ_1	λ_4	λ_5	β
λ_2	0,1712	-0,4573	0,1712	2,02
λ_3	-0,5137	0,372	-0,5137	93,85
f_D	-0,003683	-0,0041598	-0,006683	2,1203

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все $\Delta \leq 0$.

Итак $\lambda_2^* = 2,02$

$$\lambda_3^* = 93,85$$

$$f^* = 2,1203$$

$$\lambda_1^* = \frac{1}{3}(0,027\lambda_2^* + 0,022\lambda_3^* - f^*) = \frac{1}{3}(0,027 * 2,02 +$$

$$+0,022 * 93,85 - 2,1203) = 0$$

Найдем оптимальный план в исходной задаче с помощью уравнения:

$$\lambda_i^*(AX^* - B)_i = 0$$

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,02 \\ 93,85 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0.001 \\ 0.003 & 0.00217 \\ 0.001 & 0.00267 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.027 \\ 0.022 \end{pmatrix}$$

Производим умножение матриц и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,006x_1^* + 0,0043x_2^* - 0,054 = 0 \\ 0,094x_1^* + 0,25x_2^* - 2,068 = 0 \end{cases}$$

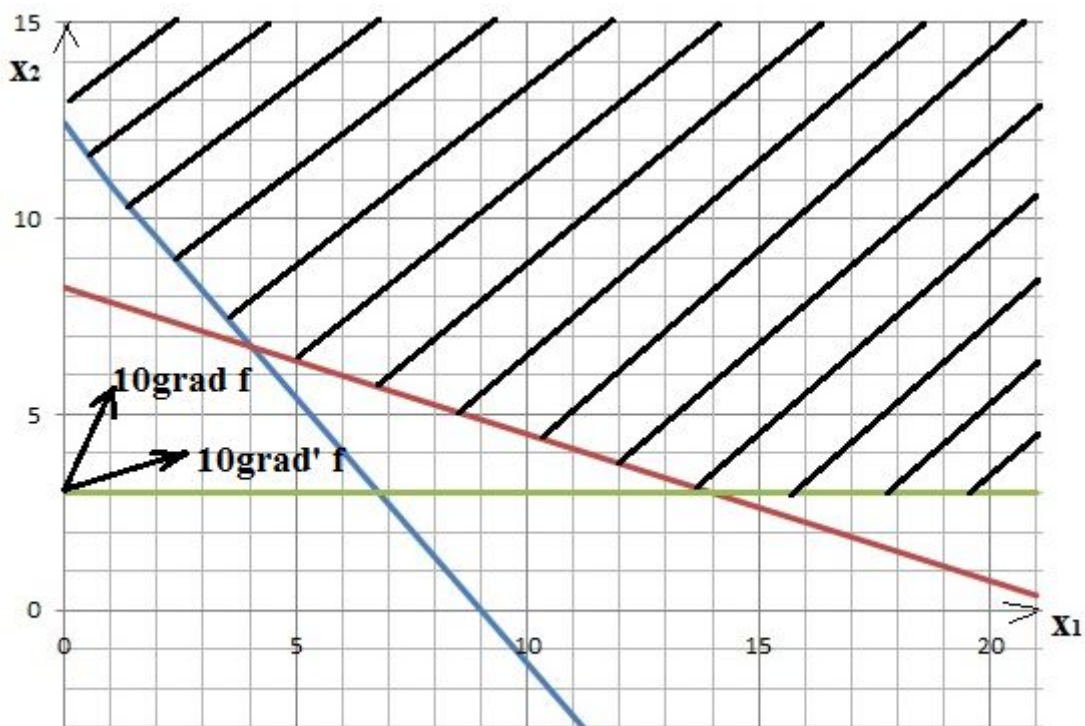
Из которой

$$X^* = \begin{pmatrix} 6.678 \\ 4.17 \end{pmatrix}$$

$$f_{\Pi}(x^*) = 0,1 * 4,17 + 0,255 * 6,678 = 2,11989 \approx 2,12$$

Вывод: видим, что во всех трёх методах ответы совпадают.

VI. Найдем при какой цене на смесь 1 её будет невыгодно использовать в рационе.



Будем поворачивать градиент по часовой стрелке до тех пор, пока он не станет перпендикулярен прямой $3x_1 + 2,17x_2 = 27$. В случае, когда градиент перпендикулярен этой прямой, оптимальным решением будут являться все точки этой прямой, лежащие в G. Если мы будем поворачивать градиент дальше по часовой стрелке, то оптимальным решением будет $x_1^* = 0$, $x_2^* = 12,4424$, то есть смесь 1 будет невыгодно использовать в рационе.

Обозначим C_1^* - цена на смесь 1, выше которой её невыгодно будет использовать в рационе.

Тогда $grad' f = (C_1^*, 0,255)^T$ перпендикулярен прямой $3x_1 + 2,17x_2 = 27$ и параллелен вектору $\begin{pmatrix} 3 \\ 2,17 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{C_1^*}{3} = \frac{0,255}{2,17} \quad C_1^* = 0,3525$$

Таким образом если $C_1 > 0,3525$ р/кг, то смесь 1 невыгодно использовать в рационе.

Общий вывод: мы определили наиболее дешевый рацион, который состоит из 4,136 г. смеси 1 и 6,602 г. смеси 2 и нашли цену на смесь 1, при которой её будет невыгодно использовать в рационе.

Ответ: $x_1^* = 4,17$ г.

$$x_2^* = 6,678 \text{ г.}$$

$$f^* = 2,12 \text{ руб.}$$

$$C_1^* = 0,3525 \text{ руб.}$$

$$\lambda_1^* = 0$$

$$\lambda_2^* = 2,02$$

$$\lambda_3^* = 93,85$$

$$f_D = 2,12$$