Exercices corrigés

3.1 On considère les matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$, carrées d'ordre 3, définies par $a_{i,j}=i$ et $b_{i,j}=i-j$. Écrire ces matrices sous la forme de tableaux de nombres.

3.2 Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ la matrice à 3 lignes et 4 colonnes telle que $a_{i,j}=Max(i,j)$ et $B=\left(b_{i,j}\right)$ la matrice à 2 lignes et 5 colonnes telle que $b_{i,j}=i\times j$. Écrire les matrices A et B sous la forme de tableaux de nombres.

3.3 On considère les matrices $A=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}$ et $B=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 10\end{vmatrix}$.

a) Calculer $A+B$ et $A-B$.

b) Calculer $(A+B)+(A-B)$. Expliquer le résultat.

3.4 On considère la matrice $A=\begin{vmatrix}0{,}3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}$.

a) Déterminer $A+A$, $3A$ et $-10A$.

b) Est-il possible de trouver un nombre réel x tel que $xA = I_2$? (Justifier)

3.5 Soit A la matrice définie par $A=\begin{vmatrix}10 & 20\\ 8 & 100\end{vmatrix}$. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que tous les éléments de $1/n \times A$ soient strictement inférieurs à 0,01.

3.6 Soient $A=\begin{vmatrix}7 & 0 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}$ et $B=\begin{vmatrix}-9 & 1 & 3\\ 0 & -6 & -5\end{vmatrix}$.

a) Calculer $2A-B$ et $3A-4B$.

b) Déterminer les deux matrices C et D telles que $C+D=A$ et $C-D=B$.

3.7 Un groupe pharmaceutique produit trois types de médicaments M1, M2 et M3 dans chacun de ses deux laboratoires L1 et L2. On associe la matrice A suivante à la production mensuelle (en milliers) de ces médicaments dans chaque laboratoire.

$$A=\begin{vmatrix}54 & 27 & 31\\ 12 & 9 & 10\end{vmatrix}$$

Par exemple, le groupe produit chaque mois 12 000 médicaments du type M1 dans le laboratoire L2.

a) Combien le laboratoire L1 produit-il de médicaments du type M3 par mois ?

b) On peut obtenir, à partir d'une matrice colonne B, le nombre total de médicaments produits par chaque laboratoire en effectuant le calcul $A \times B$. De quelle matrice colonne s'agit-il ?

3.8 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \times B$ puis $A \times (2B)$.

b) Vérifier que $A \times (2B) = 2(A \times B)$.

3.9 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \times B$ et $A \times C$.

b) Peut-on calculer $B \times A$ et $C \times A$? (Justifier)

c) Calculer $B + C$ puis $A \times (B + C)$.

d) Calculer $A \times (B + C) - A \times B - A \times C$. Expliquer le résultat.

3.10 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

3.11 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Faire tous les produits possibles de deux matrices.

3.12 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times B$, $B \times A$ et $A \times C \times B$.

3.13 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) Calculer B^2 puis B^3.

3.14 Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer B^2 et B^3.

b) Montrer que $B^4 = 0$ (matrice nulle) puis que, pour tout $n \geq 3$, $B^n = 0$.

3.15 Une usine fabrique trois types de matériel électronique M1, M2 et M3 en assemblant des composants C1, C2 et C3 suivant la répartition du tableau 3.1.

Tableau 3.1

	M1	M2	M3
Nombre de composants C1	2	7	3
Nombre de composants C2	0	2	6
Nombre de composants C3	3	5	2

Les masses et prix unitaires des composants sont donnés par le tableau 3.2.

Tableau 3.2

	C1	C2	C3
Masse unitaire (en g)	2	1	3
Prix unitaire (en €)	15	6	4

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $B \times A$ et interpréter ce que représentent les lignes de la matrice obtenue.

b) Le directeur de l'usine souhaite fabriquer en une journée 50 matériels M1, 70 matériels M2 et 60 matériels M3.

On pose $D = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Quelle opération matricielle permet d'obtenir le nombre de composants de chaque sorte permettant de réaliser les assemblages ? Effectuer l'opération puis donner la décomposition.

3.16 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

Calculer $A\times B$ et $B\times A$. Que peut-on dire des matrices A et B ?

3.17 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & -1 & 2\\9 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}-0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2\\3{,}6 & -1{,}8 & -0{,}8\\1{,}8 & -0{,}4 & -0{,}4\end{pmatrix}$.

Montrer que A' est l'inverse de A.

3.18 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\-3 & 4 & -3\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\3 & -1 & 3\\1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Calculer $A\times B$. Quelle est la matrice inverse de A ?

3.19 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\0 & -1 & -1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & -10 & -1\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer $A\times B$. Quelle est la matrice inverse de A ?

3.20 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\-4 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & -2{,}5\\2 & 3{,}5\end{pmatrix}$.

Calculer $A\times B$ et $B\times A$. En déduire la matrice A^{-1}.

3.21 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\2 & 1 & -3\\-3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a & -5 & -7\\7 & 17 & 23\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

a) Dans le produit $A\times B$, calculer, en fonction de a, les coefficients manquants :

$$A\times B=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots & 0 & 0\\ \ldots\ldots\ldots & 1 & 0\\ \ldots\ldots\ldots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Déterminer alors la valeur de a pour que B soit la matrice inverse de A.

3.22 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\2 & 0 & -1\\1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\11 & a & -8\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit $A\times B$.
b) Déterminer alors la valeur de a pour que B soit la matrice inverse de A.

3.23 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que $ad - bc \neq 0$.

a) Montrer que la matrice $A' = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.

b) **Application** : déterminer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

3.24 On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

b) Montrer que $A^2 - 4A = A \times (A - 4I_2)$ et en déduire que A est inversible. Quelle est sa matrice inverse ?

3.25 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 5A$.

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3.26 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calculer $A^2 - 15A$

b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3.27 a) Écrire le système $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$ sous la forme matricielle $AX = B$.

Déterminer A^{-1} à la calculatrice et résoudre le système.

b) Résoudre le système $\begin{cases} 7x + 16y = 31 \\ 5x + 12y = 25 \end{cases}$ à l'aide de matrices.

c) Résoudre le système $\begin{cases} 5x - 3z = 4 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ à l'aide de matrices.

3.28 On considère le système S d'inconnues x, y et z : $\begin{cases} -4x + y + 0{,}1z = -1 \\ 11x - 3y - 0{,}2z = 1 \\ -6x + 2y + 0{,}1z = 4 \end{cases}$

a) Écrire le système sous la forme $AX = B$ en précisant quelles sont les matrices A, X et B.

b) Avec une calculatrice, on a obtenu $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}$. Résoudre le système.

3.29 Résoudre chaque système à l'aide des matrices :

a) $\begin{cases} x + y + z = 23 \\ 2x + 3y - z = 27 \\ -x + y + 4z = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y + 2z = 25 \\ 2x - y - z = -7 \\ x + 3y + z = 27 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + y + 3z = 5 \\ 2x + z = 0 \\ -x + 3y - z = 16 \end{cases}$

3.30 a, b et c étant trois réels, on considère le système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$

1) a) Écrire le système sous forme matricielle.
b) Exprimer x, y et z en fonction de a, b et c.

2) Utiliser les résultats de la question a) pour résoudre les systèmes suivants :

(S_1) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y + 3z = 25 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$ (S_2) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 18 \\ x - y + z = 9 \end{cases}$ (S_3) $\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 27 \\ 6x + 3y + 9z = 6 \\ 3x - 3y + 3z = 15 \end{cases}$

3.31 Au magasin de fournitures de bureau :
– 4 stylos, 2 gommes et 3 pochettes coûtent 10,70 euros.
– 1 stylo, 1 gomme et 5 pochettes coûtent 7,80 euros.
– 2 stylos, 1 gomme et 4 pochettes coûtent 8,10 euros.

a) Traduire l'énoncé par un système puis l'écrire à l'aide de matrices.

b) Combien coûte un stylo ? une gomme ? une pochette ?

3.32 Pour une fabrication, une entreprise utilise x pièces de type 1, y pièces de type 2 et z pièces de type 3. La masse et le coût de chaque type de pièce sont donnés dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3

	Pièce de type 1	Pièce de type 2	Pièce de type 3
Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en euros	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N de pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en euros.

1) Calculer N, M et C lorsque $x = 20$, $y = 30$ et $z = 35$

2) Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

3) On se propose de résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=N \\ 2{,}5x+2y+z=M \\ x+1{,}5y+0{,}5z=C \end{cases}$

dont les inconnues sont x, y et z.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Avec la calculatrice, déterminer A^{-1}.

b) En déduire la solution du système en fonction de N, M et C.

4) L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées 140 pièces, pour une masse totale de 275 g et un coût total de 135 euros. Dans ces conditions, calculer le nombre de pièces de chaque type qui seront utilisées pour cette fabrication.

3.33 Le responsable d'un club informatique souhaite acheter des souris, des clés USB et des tapis de souris, les matériels de chaque type étant identiques.

– S'il achète 3 souris, 5 clés USB et 3 tapis, il paiera 132,10 €.
– S'il achète 6 souris, 4 clés USB et 5 tapis, il paiera 172,90 €.
– Enfin, il paiera 118,90 € pour 4 souris, 6 clés USB et 1 tapis.

a) Traduire les données par un système de trois équations dont les inconnues sont les prix en euros des trois types de matériels.

b) Résoudre ce système à l'aide des matrices.

c) Combien coûte chaque type de matériel ?

3.34 On a demandé aux 215 étudiants de BTS SIO d'une académie de dire quel est leur langage de programmation préféré parmi Python, Xcas, Java et C. Chaque étudiant devait fournir une seule réponse.

On sait que 163 étudiants ont déclaré préférer Python ou Xcas, 65 ont déclaré préférer Xcas ou C, 158 ont déclaré préférer Python ou C.

a) Traduire les données par un système de quatre équations à quatre inconnues.

b) Résoudre ce système par les matrices.

c) Quelle est la répartition des préférences pour les quatre langages ?

3.35 Dans un repère du plan, on considère les points $A(-3;-23)$, $B(2;12)$ et $C(4;-2)$ et on cherche s'il existe une parabole passant par ces trois points. Pour cela, on prend $y = ax^2 + bx + c$ comme équation générale d'une parabole.

a) Montrer que A est sur la parabole si et seulement si $9a - 3b + c = -23$.

b) Traduire le fait que les points B et C appartiennent à la parabole.

c) Résoudre le système de trois équations dont les inconnues sont a, b et c.

d) Quelle est l'équation de la parabole ?

3.36 Dans un repère du plan, on considère les points $A(-2;-7)$, $B(-1;3,5)$, $C(2;17)$ et $D(3;25,5)$. En s'inspirant de l'exercice 3.35, trouver les nombres réels a, b, c et d tels que les points A, B, C et D appartiennent à la courbe d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3.37 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = I_3 + A$.

1) Calculer A^2. En déduire que $B \times A = 2A$.

2) On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel a_n tel que $B^n = I_3 + a_n A$.

a) Que vaut a_1 ?

b) Exprimer B^{n+1} en fonction de I_3, A et a_{n+1}, puis en fonction de I_3, A et a_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.

d) Déterminer a_2, a_3 et a_4.

3) On peut démontrer (voir exercice 2.29 du chapitre sur les suites numériques), que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n = 2^n - 1$. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Solutions

3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&3&4\\3&3&3&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&6&8&10\end{pmatrix}$

3.3 a) $A+B=\begin{pmatrix}2&3\\6&10\end{pmatrix}$; $A-B=\begin{pmatrix}-4&1\\-4&-10\end{pmatrix}$

b) $(A+B)+(A-B)=\begin{pmatrix}-2&4\\2&0\end{pmatrix}$

On trouve $2A$. C'était prévisible car $(A+B)+(A-B)=A+B+A-B=A+A=2A$.

3.4 a) $A+A=\begin{pmatrix}0{,}6&2\\8&-4\end{pmatrix}$; $3A=\begin{pmatrix}0{,}9&3\\12&-6\end{pmatrix}$; $-10A=\begin{pmatrix}-3&-10\\-40&20\end{pmatrix}$

b) $xA=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0{,}3x&x\\4x&-2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}3x=1\\x=0\\4x=0\\-2x=1\end{cases}$

Ce système n'a pas de solution, il est donc impossible de trouver x tel que $xA=I_2$.

3.5 $\frac{1}{n}A=\begin{pmatrix}\frac{10}{n}&\frac{20}{n}\\\frac{8}{n}&\frac{100}{n}\end{pmatrix}$. Le plus grand élément de la matrice est $100/n$. Tous les éléments de la matrice seront donc strictement inférieurs à 0,01 dès que $100/n<0{,}01$.

$$\frac{100}{n}<0{,}01 \Leftrightarrow 100<0{,}01n \Leftrightarrow \frac{100}{0{,}01}<n \Leftrightarrow 10000<n$$

Le plus petit entier cherché est donc 10001.

3.6 a) $2A-B=\begin{pmatrix}23&-1&-5\\8&2&1\end{pmatrix}$; $3A-4B=\begin{pmatrix}57&-4&-15\\12&18&14\end{pmatrix}$

b) On a les deux équations : $\begin{cases}C+D=A\\C-D=B\end{cases}$

Par addition, $(C+D)+(C-D)=A+B$, donc $2C=A+B$,

d'où $C=\frac{1}{2}(A+B)=\begin{pmatrix}-1&0{,}5&1\\2&-4&-3{,}5\end{pmatrix}$.

Par soustraction, $(C+D)-(C-D)=A-B$ donc $2D=A-B$,

d'où $D=\dfrac{1}{2}(A-B)=\begin{pmatrix} 8 & -0,5 & -2 \\ 2 & 2 & 1,5 \end{pmatrix}$.

3.7 a) Le laboratoire L1 produit 31 000 médicaments de type M3 par mois.

b) $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.8 a) $A\times B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$; $2B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; $A\times(2B)=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 22 & 32 \\ 38 & 56 \end{pmatrix}$

b) La vérification est facile.

3.9 a) $A\times B=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 26 & -21 \\ 9 & -39 \end{pmatrix}$; $A\times C=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 16 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) On ne peut pas calculer $B\times A$ et $C\times A$ car le nombre de colonnes de B et de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

c) $B+C=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $A\times(B+C)=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 27 & -5 \\ 3 & -36 \end{pmatrix}$

d) $A\times(B+C)-A\times B-A\times C=O$ (matrice nulle)

Le résultat était prévisible puisque $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$.

3.10 Les produits possibles sont A^2, $A\times B$, $C\times A$ et $C\times B$. En effet, dans chaque cas, le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde.

$$A^2=\begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \qquad A\times B=\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$C\times A=\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 11 & 21 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C\times B=\begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.11 $B^2 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & -19 \\ 42 & 33 & -48 \\ -38 & -16 & 51 \end{pmatrix}$ $B \times A = \begin{pmatrix} -16 \\ -60 \\ 51 \end{pmatrix}$ $B \times C = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -6 & 42 \\ 10 & -17 \end{pmatrix}$

3.12 $A \times B = B \times A = I_2$ $A \times C \times B = \begin{pmatrix} -16 & 30 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}$

3.13 a) $A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 14 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 149 & 82 \\ 41 & 26 \end{pmatrix}$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $B^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 9 & -18 & 9 \\ 9 & 9 & -18 \end{pmatrix}$

3.14 a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

b) $B^4 = B^3 \times B = O \times B = O$ et pour tout $n \geq 3$, $B^n = B^{n-3} \times B^3 = B^{n-3} \times O = O$.

3.15 a) $B \times A = \begin{pmatrix} 13 & 31 & 18 \\ 42 & 137 & 89 \end{pmatrix}$

13, 31 et 18 sont les masses unitaires respectives (en grammes) des matériels M1, M2 et M3.

42, 137 et 89 sont les prix unitaires respectifs (en euros) des matériels M1, M2 et M3.

b) On doit calculer le produit $A \times D = \begin{pmatrix} 770 \\ 500 \\ 620 \end{pmatrix}$.

770 composants C1, 500 composants C2 et 620 composants C3 seront nécessaires.

3.16 $A \times B = B \times A = I_2$ donc A et B sont inverses l 'une de l'autre.

3.17 On calcule $A \times A'$ ou $A' \times A$. Dans les deux cas, le résultat est I_3.

3.18 $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$ donc $A \times \left(\frac{1}{2}B\right) = I_3$.

L'inverse de A est donc $\dfrac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -0,5 & 1,5 \\ 0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$.

3.19 $A \times B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$ donc $A \times \left(\dfrac{1}{9}B\right) = I_3$.

L'inverse de A est donc $\dfrac{1}{9}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

3.20 $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$ donc $A^{-1} = \dfrac{1}{3}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

3.21 a) Les coefficients manquants sont : $\begin{cases} 5a+7+4 = 5a+11 \\ 2a+7-3 = 2a+4 \\ -3a-7+1 = -3a-6 \end{cases}$

b) B est l'inverse de A si et seulement si $\begin{cases} 5a+11 = 1 \\ 2a+4 = 0 \\ -3a-6 = 0 \end{cases}$.

Ces trois équations ont la même solution : $a = -2$.

Donc : $B = A^{-1} \Leftrightarrow a = -2$

3.22 a) $A \times B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7+a & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7+a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7+a}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7+a}{3} & 1 \end{pmatrix}$

b) B sera la matrice inverse de A si et seulement si $(7+a)/3 = 0$ c'est-à-dire $a = -7$.

3.23 a) $A \times A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+ad \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Donc $A \times A' = I_2$, ce qui prouve que A' est l'inverse de A.

b) $A^{-1} = \frac{1}{7\times 8 - 3\times 12} \times \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,15 \\ -0,6 & 0,35 \end{pmatrix}$

3.24 a) $A^2 - 4A = -I_2$.

b) $A \times (A - 4I_2) = A \times A - A \times (4I_2) = A^2 - 4A$

Par conséquent, $A \times (A - 4I_2) = I_2$. Le produit de A par $A - 4I_2$ est égal à la matrice I_2, donc A est inversible et $A^{-1} = A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3.25 a) $A_2 - 5A = I_2$

b) $A^2 - 5A = -I_2 \Leftrightarrow -A^2 + 5A = I_2 \Leftrightarrow A \times (-A + 5I_2) = I_2$ donc A est inversible et on a :

$$A^{-1} = -A + 5I_2 = -\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

3.26 a) $A^2 - 15A = 4I_2$

b) $A^2 - 15A = 4I_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(A^2 - 15A) = I_2 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{A - 15I_2}{4} \right) = I_2$ donc A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 15I_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -6 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -1,25 \\ -1,5 & -3,25 \end{pmatrix}$$

3.27 a) Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

À la calculatrice, on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La solution est $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}$, d'où $x = 19$ et $y = 11$.

b) $x = -7$; $y = 5$

c) $x = 3$; $y = -8/3$; $z = 11/3$

3.28 a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0.1 \\ 11 & -3 & -0.2 \\ -6 & 2 & 0.1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$

3.29 a) $x = 10, y = 5, z = 8$ b) $x = 2, y = 7, z = 4$ c) $x = 1, y = 5, z = -2$

3.30 a) Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) $X = A^{-1}B$ d'où : $x = 2a - b + c$; $y = 0{,}5a - 0{,}5c$; $z = -1{,}5a + b - 0{,}5c$

2) Pour (S_1), $a = 12$, $b = 25$ et $c = 10$ donc $x = 9$, $y = 1$ et $z = 2$.

Pour (S_2), $a = 7$, $b = 18$ et $c = 9$ donc $x = 5$, $y = -1$ et $z = 3$.

En divisant tous les coefficients de (S_3) par 3, on obtient un système similaire aux deux autres : $a = 9$, $b = 2$ et $c = 5$ d'où $x = 21$, $y = 2$ et $z = -14$.

3.31 a) On appelle x, y et z les prix respectifs, en euros, d'un stylo, d'une gomme et d'une pochette.

L'énoncé se traduit par le système : $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 10{,}70 \\ x + y + 5z = 7{,}80 \\ 2x + y + 4z = 8{,}10 \end{cases}$

b) Un stylo coûte 1,40 euro, une gomme 0,90 euro et une pochette 1,10 euro.

3.32 1) Pour $x = 20$ pièces de type 1, $y = 30$ pièces de type 2 et $z = 35$ pièces de type 3 :

$$N = 20 + 30 + 35 = 85 \text{ (pièces)}$$

$$M = 20 \times 2{,}5 + 30 \times 2 + 35 \times 1 = 145 \text{ (grammes)}$$

$$C = 20 \times 1 + 30 \times 1{,}5 + 35 \times 0{,}5 = 82{,}50 \text{ (euros)}$$

2) $N = x + y + z \qquad M = x \times 2{,}5 + y \times 2 + z \times 1 = 2{,}5x + 2y + z$
$C = x \times 1 + y \times 1{,}5 + z \times 0{,}5 = x + 1{,}5y + 0{,}5z$

3) a) $\quad {}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -1 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = {}^{-1} \times \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} = -0{,}5 \quad + \quad - \\ = -0{,}25 \quad -0{,}5 \quad +1{,}5 \\ = 1{,}75 \quad -0{,}5 \quad -0{,}5 \end{cases}$

4) La fabrication est optimale lorsque $N = 140$, $M = 275$ et $C = 135$.

On a alors $x = 70$, $y = 30$ et $z = 40$ c'est-à-dire 70 pièces de type 1, 30 de type 2 et 40 de type 3.

3.33 a) On note , et le prix en euros d'une souris, d'une clé USB et d'un tapis.

x, y, z sont solutions du système : $\begin{cases} 3 \quad +5 \quad +3 \quad = 132{,}10 \\ 6 \quad +4 \quad +5 \quad = 172{,}90 \\ 4 \quad +6 \quad + \quad = 118{,}90 \end{cases}$

b) Le système s'écrit $\quad = \quad$ avec $\quad = \begin{pmatrix} 132{,}10 \\ 172{,}90 \\ 118{,}90 \end{pmatrix}$, $\quad = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\quad = \begin{pmatrix} 132{,}10 \\ 172{,}90 \\ 118{,}90 \end{pmatrix}$.

$\quad = {}^{-1} \times \quad = \begin{pmatrix} 6{,}90 \\ 12{,}50 \\ 16{,}30 \end{pmatrix}$ donc $\quad = 6{,}90$, $\quad = 12{,}50$ et $\quad = 16{,}30$.

c) Une souris coûte 6,90 €, une clé USB 12,50 € et un tapis 16,30 €.

3.34 a) On note , , et le nombre d'étudiants préférant respectivement Python, Xcas, Java et C.

D'après l'énoncé, on a $\begin{cases} \quad + \quad = 163 \\ \quad + \quad = 65 \\ \quad + \quad = 158 \end{cases}$ et $p + x + j + c = 215$

d'où le système $\begin{cases} \quad + \quad = 163 \\ \quad + \quad = 65 \\ \quad + \quad = 158 \\ \quad + \quad + \quad + \quad = 215 \end{cases}$

b) $p=128$, $x=35$, $j=22$ et $c=30$.

c) Les préférences sont donc : 128 pour Python, 35 pour Xcas, 22 pour Java et 30 pour C.

3.35 a) Dans l'équation de la parabole, on remplace x et y par les coordonnées de A :

$$-23=a\times(-3)^2+b\times(-3)+c\Leftrightarrow 9a-3b+c=-23$$

b) L'appartenance de B à la parabole se traduit par $4a+2b+c=12$. Celle de C par $16a+4b+c=-2$.

c) $a=-2$; $b=5$; $c=10$

d) L'équation de la parabole est $y=-2x^2+5x+10$.

3.36 $a=0{,}5$; $b=-1$; $c=4$; $d=9$. L'équation de la courbe est $y=0{,}5x^3-x^2+4x+9$.

3.37 1) On trouve que $A^2=A$, donc :

$$B\times A=\left(I_3+A\right)\times A=I_3\times A+A^2=A+A=2A$$

2) a) $a_1=1$

b) D'une part, $B^{n+1}=I_3+a_{n+1}A$.

D'autre part, $B^{n+1}=B^n\times B=\left(I_3+a_nA\right)\times\left(I_3+A\right)$

$$\begin{aligned}&=I_3\times I_3+I_3\times A+a_nA\times I_3+a_nA\times A\\&=I_3+A+a_nA+a_nA^2\\&=I_3+A+a_nA+a_nA\\&=I_3+\left(1+2a_n\right)A\end{aligned}$$

c) $I_3+a_{n+1}A=I_3+\left(1+2a_n\right)A\Rightarrow a_{n+1}=1+2a_n$ (par unicité)

d) $a_2=3$; $a_3=7$; $a_4=15$

3) $B^n=I_3+\left(2^n-1\right)A=\begin{pmatrix}1+2\left(2^n-1\right) & -\left(2^n-1\right) & 2^n-1\\ -2\left(2^n-1\right) & 1+3\left(2^n-1\right) & -2\left(2^n-1\right)\\ -4\left(2^n-1\right) & 4\left(2^n-1\right) & 1-3\left(2^n-1\right)\end{pmatrix}$