אלגוריתמים – ממ"ן 15

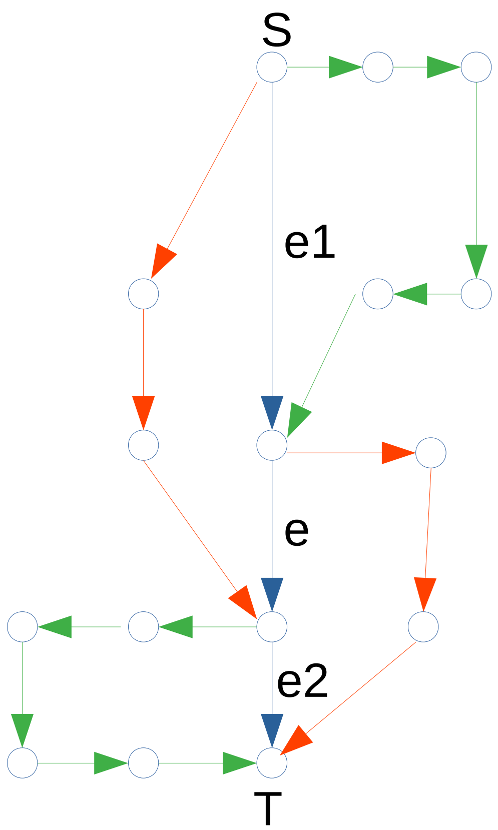
שם : איתי אירמאי

תז : 204078224

תאריך הגשה : 08/02/2020

מייל : I.tai307@gmail.com

.1



$$c(e) = c(e_1) = c(e_2) = 1$$
$$c(e_{other}) = 2$$

<u>הסבר</u> : באיטרציה הראשונה, המסלול הכחול (s,e1,e,e2) הוא הקצר ביותר, וממלאים אותו בכל הקשתות עם זרימה 1 בהתאם לקיבולת שהוגדרה. באיטרציה השנייה, המסלול האדום הופך לקצר ביותר, יחד עם קשת e בכיוון ההפוך – ברשת השיורית בעלת קיבולת 2 (עקב הזרימה השיורית מאיטרציה 1), כמו של שאר המסלול, וזה הערך שיוזרם. לבסוף, נותר המסלול הירוק + e בכיוון הרגיל עם זרימה 2. ברביעית אין יותר קשתות נכנסות ל-T.

[באופן כללי, העיקרון הוא לבנות מסלולים באורך עולה, כך שכל מסלול יתמלא לחלוטין בתום האיטרציה, יתחבר לצדדים מתחלפים של הקשת e, וכל חצי מסלול חדש יהיה גדול ממש מחצי המסלול הקודם + 1, כדי למנוע בהכרח את החלופה של אי שימוש ב-e באיטרציה הקודמת (לדוגמא, אם חצי המסלול האדום היה באורך 2, הוא היה שקול באורכו ל-e1 + e או e + e2 ויכול להחליפם).]

.2

[לפי הבנתי את השאלה, הזרימה חייבת להתקיים בכיוון כלשהו על **כל** הקשתות בגרף – כלומר, אי אפשר לבחור שלא להשתמש בקשת עם קיבולת > 0 כמו בזרימה רגילה; זו בעיה יחסית קלה, כפי שיוצג בהערות. אני מניח שלא ניתן ליצור מעגל זרימה שאינו מתחיל ב-s או מסתיים ב-t – טכנית מקיים את כלל שימור זרימה, אבל עקב שיטת הספירה יכול לגרום למצב מוזר שתהיה זרימה גדולה שכולה מחוץ ל-s; יודגם בשרטוט בסוף. כמדומני, האלגוריתם שיוצג עובד גם עם קשתות דו כיווניות וקיבולת זהה בשני הכיוונים.]

א. תהא f זרימה חוקית ברשת $N = (G,c,s,t)$ עם הגדרת קיבולת מינימאלית.

<u>טענה</u>: אם f קיימת, אזי קיימת f' זרימה חוקית שעבורה ניתן להגדיל את הזרימה בכל קשת מסוימת לכל ערך ממשי, קרי $f'(e) = f'(e) + w$ לכל e, $w \geq 0$ רצויים.

תהא $e=(x,y)$ קשת כלשהי בגרף עבורה $f(e) > 0$ (חשוב שהזרימה בה הייתה חיובית ממש),

ויהא $P = (s,v1,\ldots,x,y,\ldots,t)$ מסלול ללא מעגלים העובר בקשת e וקיימת זרימה בכל הקשתות במסלול; חייב להיות קיים מסלול כזה, כי בהכרח קיים מסלול מ s ל t, ואם אין גישה למסלול זה מ-x,y אז קיימת הפרה של כלל שימור זרימה בקודקוד שכן רחוק כלשהו שלהם. [למעט המקרה בהערות הנ"ל, או כאשר הזרימה כולה 0].

נגדיר זרימה חדשה:

$$f'(e) = \{f(e) + w\,,\ \text{if } e \in P \mid \quad f(e)\,, \quad \text{otherwise}\}$$

נוודא כי זרימה זו חוקית.

① שימור זרימה:

$$\sum f'((u,v)) = \sum f((u,v)) = 0 \quad ;\ \text{if } v \notin P$$

$$\sum f'((u,v)) = \sum f'((u,v)) + f'(v_i,v) - f'(v_{i+1},v) = \sum f((u,v)) + (f(v_i,v) + w) - (f(v_{i+1},v) + w) =$$

$$= \sum f((u,v)) + f(v_i,v) - f(v_{i+1},v) = \sum f((u,v)) = 0$$

הסבר: הוצאנו את שתי הקשתות מתוך המסלול P מחוץ לסכימה – הנכנסת חיובית, היוצאת שלילית מטעמי אנטי סימטריות; כל שאר הקשתות אינן ב-P כי הוא חסר מעגלים, ועל כן ניתן להציב את הזרימה מתוך f כמתואר; חיברנו חזרה את סך הזרימה, שהינו זהה מבחינה מבנית, ושימור הזרימה של f נכנס לתוקף.

② אנטי סימטריות מתקיימת טריוויאלית, עניין של הסתכלות.

③ אילוץ קיבול:

$$f'((u,v)) = f((u,v)) + w \geq f((u,v)) \geq c((u,v))$$

⇐ נמצאה זרימה חוקית f' גדולה מ-f לכל בחירת קשת וגודל רצויים.

ב. [במידה ולא צריך להשתמש בכל הקשתות, מספיק להפעיל BFS פשוט המוצא מסלול קצר ביותר (s,t) ומזרים דרכו את ערך הקיבול המקסימאלי מבין הקשתות במסלול; שימור זרימה נשמר במסלול פשוט ללא מעגלים עם ערך אחיד, וחסם הקיבולת מתקיים במסגרת המסלול.]

לשם הבהרת האלגוריתם, נגדיר שני מושגים, **זרימה קדמית וזרימה אחורית**.

זרימה קדמית / forewash: בהינתן קודקוד v ומסלול P מ-s ל-t המכיל את v, זרימה קדמית הינה ערך כלשהו, אשר צריך להוסיף לזרימה בקשתות על תת המסלול $P' = (s,\ldots,v)$ של P, על מנת שאפשר יהיה 'להקצות' זרימה זו למסלול אחר $P^* = (v,\ldots)$ המתפצל מתוך v.

זרימה אחורית / backwash: בהינתן קודקוד v, מסלול P מ-s ל-t המכיל את v, ומסלול $P^* = (\ldots,v)$ המסתיים ב-v (אך לא בהכרח מתחיל ב-s), זרימה אחורית הינה ערך כלשהו, אשר צריך להוסיף לתת המסלול $P' = (v,\ldots,t)$ של P, על מנת 'להיפטר' מהזרימה העודפת של P^*.

תיאור האלגוריתם: נפעיל DFS מותאם, המתחיל מ-s, חוזר במקרים של הגעה לt או צומת שבוקר בעבר (אפור / שחור), ומסתיים ב'מבוי סתום' – צומת שאין ממנה יציאה; מסלולים שנמצאו יישמרו ומתורגמים לזרימה (בחלק השני) במושגי זרימה קדמית ואחורית בהתאם לאופן תחילת וסיום המסלול, המקבלים ערך זרימה לפי גודל הקיבולת המקסימאלי שזוהה במסלול. בנוסף, קשתות חדשות בעלות קיבולת 0 מקבלות עדיפות נמוכה ואינן כפופות למבוי סתום בעצמן.

לאחר מכן, עוברים על כל קודקודי הגרף וממלאים את ערכי הזרימה במסלולים לפי סה"כ הזרימה הקדמית והאחורית.

פירוט:

קלט: רשת N המכילה גרף $G = (V,E)$, קודקודי מקור ויעד s, t, קיבולת אי שלילית $c(e) \geq 0$ על כל קשת ב-E.

1) צור פונקציית זרימה f (קרי, מטריצת סמיכויות עם ערכים ממשיים) עם ערכי אפסים.

2) צור שתי רשימות ביקורים VISV,VISE, מערכים בגודל V / E עם ערך בינארי 0.

3) צור שני מערכי זרימה FWASH, BWASH בגודל V עם ערך ממשי 0.

4) צור שני מערכי מסלול FPATH, BPATH בגודל V המכילים צמתות ומאותחלים ב-NULL.

5) cf = DFS_FLOW (N,s,s,0,VISV,VISE,FWASH,BWASH)

6) וודא כי כל קשת בעלת קיבולת חיובית וכן t בוקרו; וודא כי לכל צומת בעל BWASH != 0 קיים FPATH; אם לא, העלה שגיאה – אין זרימה חוקית בגרף.

*7) בקר את כל הצמתות בסדר זמן הופכי ל-DFS הנ"ל (כלומר, להתחיל מהצומת במסלול האחרון שנסגר ולסיים ביציאה הראשונה מ-s):

7.1) אם v != s:

7.1.1) f[(BPATH[v],v)] += FWASH[v]

7.2) אם BPATH[v] != s:

7.2.1) FWASH[BPATH[v]] += FWASH[v]

*8) בקר את כל הצמתות בסדר זמן DFS:

8.1) אם v != t:

8.1.1) f[(v,FPATH[v])] += BWASH[v]

8.2) אם FPATH[v] != t:

8.2.1) BWASH[FPATH[v]] += BWASH[v]

* סדר הביקור חשוב לצורך שמירה על סיבוכיות נמוכה – נרצה לוודא שכל ה'נחלים' שזרמו לתוך ה'נהר' לכיוון t יצטברו במהלך אחד נוסף בלבד, ולהיפך עם הפיצול לנחלים. למחסנית אין כמעט מודעות כיוונית.

$\underline{\text{DFS\_FLOW}}$ (N,src,v,cf,VISV,VISE,FWASH,BWASH):

1) VISV[v] = T

2) לכל w ∈ v.neighbours,

כאשר e = (v,w) ממוינים על פי c(e) וקשתות חוזרות לצמתים שבוקרו:

2.1) cf = max(cf,c(e))

2.2*) אם w = t אזי:

2.2.1) f[e] = cf

2.2.2) FPATH[v] = t; יהא c = v; כל עוד FPATH[BPATH[c]] = NULL ו-c != s:

2.2.2.1) FPATH[BPATH[c]] = c   // קטע זה מקבע את חלק המסלול שעברנו כמסלול זרימה ליעד.

2.2.2.2) c = BPATH[c]

2.2.3) יהא c = v; כל עוד c שונה מ-src:

2.2.3.1) f[(BPATH[c],c)] += cf

2.2.3.2) c = BPATH[c]

2.2.4) cf = 0

2.2.5) src = v

2.3) אחרת אם VISV[w] = T אזי:

2.3.1) BWASH[w] += cf

2.3.2) יהא c = v; כל עוד c שונה מ-src:

2.3.2.1) f[(BPATH[c],c)] += cf

2.3.2.2) c = BPATH[c]

2.3.3) FWASH[src] += cf

2.3.4) cf = 0

2.3.5) src = v

2.4) אחרת:

2.4.1) אם w != t וגם BPATH[w] = NULL אזי BPATH[w] = v

2.4.2) cf = DFS_FLOW (N,src,w,cf,VISV,VISE,FWASH,BWASH)

2.4.3) אם cf = 0 אזי src = v.

2.4.4) אחרת אם (cf != 0 וגם) c(e) > 0, העלה שגיאה – אין זרימה חוקית בגרף.

2.5) VISE[e] = T

4) החזר cf.

* על פי ההגדרה הפורמאלית אין קשתות יוצאות מ-t, אז אפשר לסיים ברגע שהגענו אל הצומת.

<u>סיבוכיות</u>: **O(E + V)**

- ה-DFS המותאם מבקר בכל קשת לכל היותר פעמיים – אחת בהוספת צומת חדש, ושנייה לעדכון כל הקשתות במסלול המסתיים ב-t. מנגנון FWASH / BWASH דוחה את כל העדכונים מחדש של הזרימה. – סה"כ O(E)

- לולאות הזרמת FWASH / BWASH מחדש רצות בסה"כ על כל הצמתות פעמיים. – סה"כ O(V)

<u>הוכחה</u>: נרצה להראות כי פונקציית הזרימה המוחזרת הינה חוקית, קרי שימור זרימה וקיבול מלרע, או שמוחזרת שגיאה ⇔ לא קיימת זרימה כזו.

שגיאה מוחזרת:

① כאשר קשת בעלת קיבולת חיובית או t לא בוקרו: עקב שימוש ב-DFS, מצב זה אפשרי כאשר קיימת אי קשירות בגרף (שהינה סבילה במידה ולא צריך להזרים דבר בקשת).

② ווידוא כי לכל צומת בעל BWASH != 0 קיים FPATH: על פי ההגדרה באלגוריתם, BWASH שקול לקשת (קודקוד) בין רכיבי קשירות, ו-FPATH בהכרח נקבע באופן מלא לכל המסלולים המובילים ל-t (עדיפות הביקור של DFS מכריחה את יחידות המסלול, הנשמר בתור BPATH, ואז בלולאה FPATH מעודכן בכל הצמתים שטרם נמצא להם מסלול) – כלומר, אם לא קיים FPATH, משמע ששימור הזרימה מופר בצומת הקישור הנ"ל (או לחלופין אם לא הייתה זרימה, מופר הקיבול בקשתות המעגל).

③ ב-DFS, יש בדיקה אם לקשת בעלת קיבולת חיובית cf != 0: מעיד על כך שבצומת כלשהו במסלול, הופיעה קשת 'חובה' שאין אחריה מסלול ל-t או מעגל ⇐ הפרת כלל קיבול. כמו כן, עקב בדיקת הקשתות בסדר קיבול יורד וישן, מובטח כי קשתות בעלות קיבולת 0 יכנסו לתוקף רק לצורך קישור מינימאלי (כלומר פיצול ללא זרימה בתורשה במידת האפשר), והחיפוש בהן יכול להתפצל ללא הגבלה במידה ורק חלק מהמסלולים החינמיים מובילים ל-t.

נחלק את פעולת האלגוריתם למקרים:

① אם קיים מסלול ישיר העובר דרך v ומגיע ל-t, אז בעת העדכון חזרה הקשת היוצאת והקשת הנכנסת (פרט ל-s ו-t) במסלול זה יקבלו את ערך הקיבולת המקסימאלית במסלול, שהינה בפרט ג"ש מקיבולת הקשתות ושומרת על שימור זרימה מבחינת שתיהן.

② אם v הינו צומת במסלול המסתיים במעגל, עדכון דומה ל ① חל עד לצומת src; כאשר src נקבע רק כאשר נמצא מסלול ישיר או עקיף קודם לכן מצומת src ל-t.

③ אם v הינו צומת קישור למעגל או על מסלול ל-t שהחל בסגירת מעגל, כלל זרימה אחורית קובע כי הזרימה מהמעגל תתווסף לזרימה הקיימת, מבחינת קשת יוצאת ונכנסת במסלול FPATH (או נכנסת מהמעגל בנקודת הקישור) – שימור זרימה מתקיים לזוג החדש, קיבולת ממשיכה להתקיים כי אין הפחתה בזרימה. כפי שצוין לעיל, אי קיום אפשרות לחזור מהמעגל ל-t גורר שגיאה, אז FPATH בהכרח קיים.

④ אם v הינו צומת אב לצמתים שמתוכם היה פיצול לזרימה קדמית נוספת, או צומת פיצול, אז כלל זרימה קדמית מוסיף זרימה כלשהי בקשת הנכנסת והיוצאת של כל אב BPATH ברשימה (לפי מסלול הגילוי המקורי – תמיד קיים), שימור זרימה מתקיים וחסם הקיבולת אינו מושפע.

ג. [במידה ולא צריך להשתמש בכל הקשתות, מספיק להפעיל פרים לאיתור עפ"מ המתחיל בs ומכיל את t, עם הקיבול בתור משקל, רק שבמקום להשתמש בסכום משקלי הקשתות נבחר את המסלול מs לt ונזרים דרכו את הקיבול המקסימאלי במסלול. שאר הקשתות נזרקות.]

נשתמש ברדוקציה הבאה על מנת להפוך את כלל החסימה מלרע לרשת סטנדרטית.

קלט: N = ((V,E),c,s,t) רשת זרימה מלרע עם פונקציה קיבול c ופונקציית זרימה חוקית ולא אופטימאלית f, שהתקבלה מהאלגוריתם בסעיף ב.

ממיר קלט: יהא N' = ((V,E),c',s,t) רשת זרימה רגילה, ומכאן c'(e) := f(e) – c(e).

קופסא שחורה: נפעיל אלגוריתם פורד פולקרסון או אדמונדס קארפ על N' לקבלת רשת זרימה מקסימאלית f'.

ממיר פלט: יהא $f''(e) = f(e) - f'(e)$. נחזיר f'' בתור פונקצייה הזרימה המזערית ב-N.

סיבוכיות: $\mathbf{O(V*E^2)}$ בהתאם להפעלת אדמונדס קארפ (או אלגוריתם יותר טוב). הממירים בעלי סיבוכיות O(E) זניחה.

הוכחה: צ"ל כי N' הינה רשת זרימה רגילה, וכי f'' היא פונקצייה זרימה חוקית ומזערית.

N' הינה רשת זרימה על פי הגדרה, מכיוון ש(V,E) הוא גרף מכוון, s / t הם שני צמתים שונים זה מזה בגרף, ו-c' הינה פונקצייה מ-E ל-R (כי היא מורכבת מ-f ו-c ששניהם פונקציות מ-E ל-R).

⇐ f' המוחזרת מקיימת את כללי שימור הזרימה:

$$① \sum[\, f'(u,v) \;;\; \forall u \in \text{neighbours}(v)\,] = 0 \qquad ; \forall v \in V$$

חסם קיבול:

$$② \; 0 \leq f'(e) \leq c'(e) = f(e) - c(e) \qquad ; \forall e \in E$$

וזרימה מקסימאלית:

$$③ \sum f'(e) \geq \sum f^*(e); \qquad \forall f^* \text{ זרימה חוקית ברשת } N' \;;\; \forall e = (u \in V, t)$$

נתבונן, אם כך, ב-f'', מבחינת קיום הכללים ברשת N:

$$\sum[\, f''(u,v) \;;\; \forall u \in \text{neighbours}(v)\,] =[\text{def}] \sum(f((u,v)) - f'((u,v))) = \sum f((u,v)) - \sum f'((u,v)) =① \; 0$$

השוויון האחרון נובע מכך ששתי זרימות הנ"ל מקיימות את שימור הזרימה כמתואר לעיל.

$$f''(e) = f(e) - f'(e) \geq② \; f(e) - (f(e) - c(e)) = c(e)$$

כלומר, הזרימה החדשה עדיין נחסמת מלרע בקיבול של N.

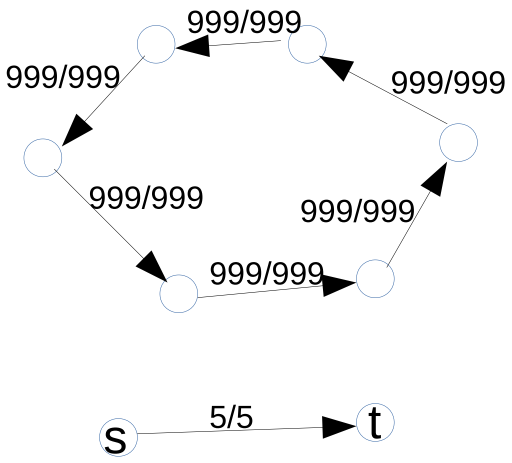
$$\sum f''(e) = \sum f((e) - f'(e)) = \sum f(e) - \sum f'(e) \leq③ \sum f(e) - \sum f^*(e) = \sum(f(e) - f^*(e)) = \sum f^{**}(e)$$

הסבר שני השיוויונים האחרונים – כיוון שמדובר באותן קשתות נכנסות ל-t, אפשר להסתכל על כל קשת בנפרד; על פי הגדרת f^* כזרימה חוקית כלשהי ב N' היא מקיימת את אותו תנאי ②, ולכן ניתן לראות בהפרש של כל קשת כזרימה חוקית כלשהי (גדולה מ-c(e)) ב N – עד סדר גודל f, ומן הסתם גם זרימות גדולות יותר. בסה"כ קיבלנו כי f'' הינה מזערית מבין הזרימות החוקיות.

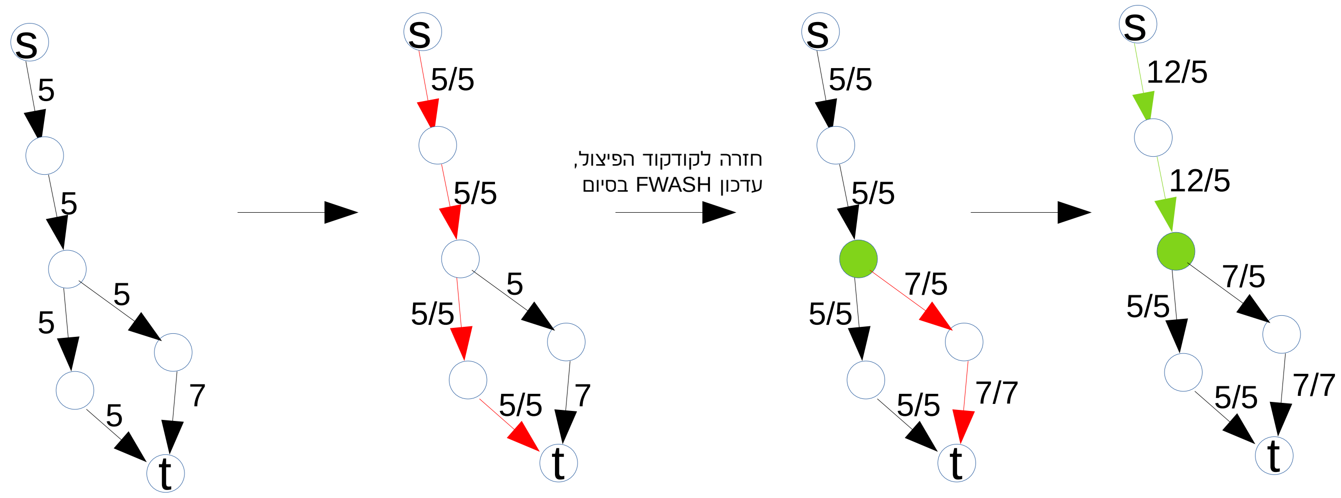
⇐ f'' הינה זרימה חוקית ב N (מקיימת שימור זרימה, חסימה מלרע) ומזערית מבין הזרימות. ▌

[נספח גרפים לשאלה.]

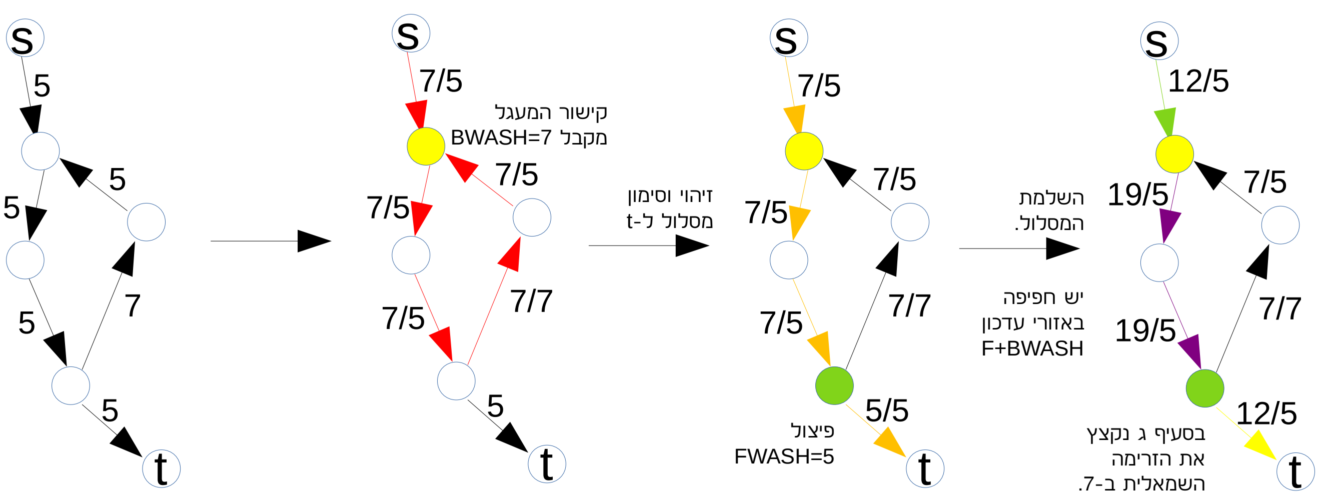
1. מקרה פסול



2. דוגמא לזרימה קדמית



3. דוגמא לזרימה אחורית



15/25

.3

א. הגדלת קיבולת $e^* = (u,v)$, או הגדרת $c'(e^*) = c(e^*) + 1$:

נחלק למקרים.

① אם $f(e^*) < c(e^*)$, נחזיר את f – להגדלת הקיבולת אין השפעה על מבנה הרשת השיורית, רק על ערך הזרימה בקשת. עדיין לא יימצא מסלול מ-s ל-t, ולכן f אופטימאלית.

② אם$f(e^*) = c(e^*)$, אז נוספה קשת בגודל 1 ברשת השיורית.

הרצת איטרציה אחת של אדמונדס קארפ (או bfs על הרשת השיורית) תמצא מסלול העובר בהכרח דרך e^*, תזרים דרכו ערך 1 והזרימה החדשה הינה אופטימאלית ; נדרשת הוכחה - ראה סעיף a

לחלופין, יכול להיות שעדיין אין מסלול, ונחזיר את f כמו שהיא.

בכל מקרה, האלגוריתם יסתיים בהכרח אחרי איטרציה אחת כי כל וריאציה של פורד פולקרסון מגדילה את הזרימה לפחות ב-1, ומכיוון ש-f אופטימאלית ברשת המקורית אין בה מסלולים אחרים מעבר לאחד שנוצר.

<u>סיבוכיות</u> : $O(V)$ או $O(E)$ להרצת BFS, במידה והמבנים (רשת שיורית) כבר הוכנו מראש או לאו – אחרת צריך לבדוק קיום כל קשת בזמן ריצה.

ב. הקטנת קיבולת $e^* = (u,v)$, או הגדרת $c'(e^*) = c(e^*) - 1$:

נחלק למקרים.

① אם $f(e^*) < c(e^*)$, נחזיר את f – לאחר ההפחתה הזרימה עדיין חוקית, ומן הסתם אינה יכולה לגדול, אז f אופטימאלית גם בגרף החדש.

② אם$f(e^*) = c(e^*)$, אז הזרימה הפכה להיות לא חוקית (הפרת כלל קיבוב).

הערה b

נצטרך למצוא מסלול כלשהו בשם P מ-s ל-t העובר דרך e^* : נשתמש ב-BFS כדי לאתר את תתי המסלול מ-s ל-u, ומ-v ל-t, בהם הזרימה חיובית ממש. נגדיר P כהרכבת שני תתי המסלולים ו-e^*. לכל אורך P, ניצור זרימה f' שבה $f'(P) = f(P) - 1$. זרימה זו חוקית, אך אינה בהכרח אופטימאלית.

שלא כמו בסעיף א, כאן נוספה יותר מקשת אחת, ולכן לכאורה תידרש יותר מאיטרציה אחת של FF ; אך זה לא המקרה.

טענת עזר : קיימת לכל היותר קשת חוצה אחת במסלול P בין רכיבי הקשירות של s, t ברשת השיורית.

לא הבנתי למה צריך את ט"ע

נניח בשלילה שלא, כלומר קיימות קשתות e1, e2 במסלול שיכלו לאפשר זרימה בלתי תלויה בערך חיובי אילולא היו מוקצות למסלול P. נתבונן בזרימה f^*, שבה נפחית 1 מכל מסלול P, ונוסיף 1 בכל אחד מהמסלולים הבלתי תלויים של e1, e2. זוהי זרימה חוקית על N, שערך הזרימה בה גדול ב-1 מ-f, בסתירה לאופטימאליות f.

⇐ ט"ע מתקיימת. ⇐ נריץ איטרציה אחת של אדמונדס קארפ / BFS לחיפוש מסלול המכיל את הקשת החוצה ברשת השיורית על f' : אם קיים, נוסיף 1 לזרימה f' במסלול זה ונחזיר אותה, אחרת נחזיר את f' כמו שהיא.

<u>סיבוכיות</u> : $O(V)$ או $O(E)$ להרצת BFS. ∎

.4

בהינתן נוסחא המורכבת מפסוקיות $p_i = (x_{i1},x_{i2},x_{i3})$, נגדיר רשת זרימה $N = (G,c,s,t)$, כדלקמן:

$G = (\{s\} \cup L \cup R \cup \{t\},E1 \cup E2 \cup E3)$

$L = \{pi\}, R = \{xi\}$

$E1 = \{(s,L)\}, E2 = \{(pi,xj) \mid xj \in pi \text{ OR } \overline{xj} \in pj\}, E3 = \{(R,t)\}$

$c(E1) = c(E2) = c(E3) = 1$

בגרף זה נגדיר <u>שידוך</u> של זוג קודקודים pi,xj בתור בחירת ערך T/F ל-xj כך שפסוקית pi תתקיים, כאשר שידוך הינו 1-1 עבור כל קודקוד ב-L, R. נשים לב כי השידוך שהוגדר הינו תנאי **חזק יותר** מאשר הנדרש בנוסחא – בחירת ערך xj מסוים בתיאוריה יכולה לקיים פסוקיות נוספות אוטומטית, אך לפחות בפסוקית שנבחרה אין צורך בתנאים נוספים; כמו כן, עקב ייחודיות השידוך, הוא תמיד יוביל להשמה תקינה הן עבור הפסוקית והמשתנה (אין בעיה של שידוך הופכי של המשתנה בפסוקית אחרת). שידוך מיוצג ברשת ע"י זרימה בין שני הקודקודים.

על פי ההגבלות בשאלה, כל משתנה מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות, ובכל פסוקית תמיד יש 3 משתנים שונים. המשמעות לכך מבחינת G, היא שלכל קודקוד ב-L (פסוקית) יש בדיוק 3 שכנים ב-R, ולכל קודקוד ב-R יש גם כן 3 שכנים ב-L.

נוכיח שתנאי הול מתקיים עבור (L,R), כלומר עבור כל $A \subseteq L$ מתקיים $size(Adj(A)) \geq size(A)$.

על פי המגבלות הנ"ל, אם $size(A) = K$ (יש K פסוקיות בקבוצה) אז לכל הפחות קיימים

$3 * (K/3) = K$ משתנים שונים בקבוצה: 3 משתנים לפסוקית, כל משתנה יכול להופיע לכל היותר 3 פעמים. המשתנים בפסוקיות הם השכנים, אז קיבלנו בסה"כ ש $size(A) \leq size(Adj(A))$ כנדרש.

⇐ על פי משפט הול, קיים שידוך מושלם בגודל N בין L ל-R.

⇐ במונחי הנוסחא, ניתן לבחור ערך T / F מסוים לכל משתנה המקיים את כל הפסוקיות.

⇐ הנוסחא ספיקה על פי הגדרה.

<u>תיאור אלגוריתם</u>: ניתן למצוא שידוך מושלם באמצעות זרימה מקסימאלית ברשת שהוגדרה – אדמונדס קארפ – ואז לכל קשת בשידוך להגדיר את הערך T / F למשתנה בהינתן התנאי שהוגדר למשתנה בפסוקית.

<u>סיבוכיות</u>: $O(N^2)$. בכל איטרציה מריצים BFS על הרשת השיורית, ונדרשות N איטרציות.

<u>הוכחה</u>: מנכונות אדמונדס קארפ נקבל זרימה מקסימאלית, וכפי שהראינו לעיל זרימה זו הינה בגודל N שקשתותיה מייצגות השמה מספקת אחרי בחירת הערכים למשתנים.

אלגוריתם חלופי, שאינו מבוסס זרימה:

<u>תיאור</u>: נקצה שידוכים עם עדיפות לקודקודים בעלי מספר השכנים הנמוך ביותר. באופן כללי אפשר להשתמש במפת קדימויות, אבל במגבלה של 3 אפשר להשתמש ב-3 משתני קבוצות קדימות.

<u>פירוט</u>:

קלט: נוסחת 3-CNF בצורת גרף דו"צ $G = (L \cup R,E)$ עם אינדיקציית ערך בוליאני הנדרש לפסוקית עבור כל משתנה.

1) צור 3 קבוצות קדימות, "גבוהה", "בינונית" ו"נמוכה". הכנס את כל קודקודי L, R לקדימות נמוכה.

2) כל עוד קיימת קבוצת קדימות שאינה ריקה:

2.1) שלוף איבר v1 מהקבוצה בעלת הקדימות הגבוהה ביותר שאינה ריקה.

2.2) מבין שכני v1 שטרם שודכו, בחר v2 = השכן בעל הקדימות הגבוהה ביותר של v1.

2.3) שדך את v1 ל-v2: שמור למשתנה (v1 או v2) את הערך הבוליאני הנדרש בפסוקית, והוצא את שני הקודקודים מקבוצות הקדימות.

2.3) העלה את הקדימות של כל שכני v1, v2 ברמה אחת.

<u>סיבוכיות</u>: O(N) עבור מעבר על כל הפסוקיות / משתנים, מתוך הנחה שפעולות הוספה, הוצאה ואיתור בקבוצות הינן O(1). כל איטרציה מעדכנת את הקדימויות של לכל היותר 6 קודקודים (שתי השמטות, ארבע העלאות).

צריך להראות שעבור כל כמות קודקודים נותרים, השידוך המתועדף אינו פוגם בקיום תנאי הול. מכיוון שהתעדוף עולה רק עבור שכנים, איטרציות שידוך מרובות יופעלו בסה"כ רק על תת קבוצה של כל הפסוקיות והמשתנים שלהם באופן בלתי תלוי בשאר הנוסחא. שידוך של עדיפות גבוהה חייב להיות תקין, אחרת הקודקוד המשודך הינו השכן היחיד של קודקוד נוסף בניגוד לתנאי הול. בשידוך של עדיפות בינונית, תנאי הול המינימאלי קובע כי לכל הפחות לקודקוד המשודך ולשכן של השכן שלו יש שני שכנים ביחד. אם זו קליקה של שני משתנים, סדר השידוך אינו משנה; אחרת (צורת 'שיני מסור'), לפי סדר בחירת העדיפות לשכנים האחרים חייבת להיות עדיפות < גבוהה, ועל כן כמות השכנים של כל תת קבוצה עדיין מקיימת את תנאי הול אחרי הפחתת שתי קשתות של שכני המשודכים. שידוך עדיפות נמוכה הינו שקול למצב ההתחלתי – כפי שהוכחנו, תמיד קיים שידוך מושלם, וכל בחירה ראשונית סימטרית. ∎