רות הבלין
ת"ז- 316243815

בס"ד

ממ"ן 12 - אלגוריתמים

שאלה 1

א) טענה - אם כל הצלעות ב- $p_{s,v}$ שימושיות אז $p_{s,v}$ מסלול מזערי.

הוכחה - נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול

בסיס האינדוקציה - כאשר $n=0$, אז $v=s$ ולכן - $w(p_{s,v})=0$. ונתון גם שלכל הקשתות בגרף יש משקלים חיוביים ולכן לכל מסלול אחר $p'_{s,v}$ יתקיים $w(p_{s,v}) \le w(p'_{s,v})$ ולכן $p_{s,v}$ הוא המסלול המזערי.

צעד האינדוקציה - נניח נכונות עבור אורך המסלול n, ונוכיח על $n+1$: יהי $p_{s,v}$ מסלול מזערי שאורכו $n+1$ וכל קשת בו היא שימושית, נסתכל על מסלול לאורך n, ונסמנו $p_{s,u}$. עפ"י הנחת האינדוקציה כל הקשתות במסלול שימושיות והוא מזערי, נסמן קשת שסיימה מסלול זה, צלע זו היא הצלע האחרונה במסלול מזערי כלשהו $p'_{s,v}$, נניח בשלילה ש- $w(p_{s,v}) > w(p'_{s,v})$, כאשר נוריד את הקשת מ-2 המסלולים נקבל ש- $w(p_{s,u}) > w(p'_{s,u})$ אבל זה סתירה לכך ש- $p_{s,u}$ הוא מסלול מזערי.
ולכן קיבלנו $w(p_{s,v}) \le w(p'_{s,v})$, $p_{s,v}$ מסלול מזערי. מש"ל

ב) יהי $p_{s,v}$ מסלול שבו לפחות צלע אחת אינה שימושית, נסמנה ש, שאינה שימושית ולכן היא לא צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהו $p_{s,u}$, כלומר קיים $p'_{s,u}$ המקיים $w(p_{s,u}) > w(p'_{s,u})$ נחבר את המסלולים ונקבל ש-

$$w(p_{s,v}) = w(p_{s,u}) + w(p_{u,v}) > w(p'_{s,u}) + w(p_{u,v}) = w(p'_{s,v})$$

כלומר $p_{s,v}$ אינו מסלול מזערי. מש"ל

ג) נתון שהמסלול $p_{s,v}$ כמעט מזערי, ולכן עפ"י סעיפים קודמים קיים במסלול זה לפחות קשת אחת לא שימושית, נראה שקיים במסלול רק קשת אחת לא שימושית.
נניח בשלילה שקיימות בו 2 קשתות לא שימושיות ונסמן אותם - $(u_1,u_2), (t_1,t_2)$ כך ש- (u_1,u_2) נמצאת לפני כן במסלול.

המשך

המסלול - $p_{u_2,v}$ מכיל את הקשת (t_1,t_2) שאינה
שימושית ולכן אינו מינימלי עפ"י סעיף ד', כלומר קיים
מסלול אחר $p'_{u_2,v}$ שהוא מינימלי ומקיים $w(p'_{u_2,v})<w(p_{u_2,v})$
נסתכל על המסלול $p'_{s,v}$ שמורכב מ- p_{s,u_2} ו- $p'_{u_2,v}$.
מתקיים: $w(p'_{s,v})=w(p_{s,u_2})+w(p'_{u_2,v})<w(p_{s,u_2})+w(p_{u_2,v})=w(p_{s,v})$

כלומר: $w(p'_{s,v})<w(p_{s,v})$, אבל גם הקשת (t_1,t_2)
אינה שימושית והיא נמצאת במסלול $p'_{s,v}$, ולכן מסלול
זה הוא לא מינימלי עפ"י סעיף ד', וזה סותר לכך ש- $p_{s,v}$
כמעט מינימלי (יש רק מסלול אחד שקטן ממנו),
לכן למסלול כמעט מינימלי $p_{s,v}$ קשת לא שימושית אחת בלבד.

ג) נניח $e=(u_1,u_2)$ הקשת הלא שימושית היחידה במסלול $p_{s,v}$
לכן כל שאר הקשתות במסלול שימושיות.
נסתכל על המסלולים החלקיים p_{s,u_1} ו- $p_{u_2,v}$
הם מורכבים מקשתות שימושיות בלבד ולכן עפ"י סעיף א'
הם מסלולים מינימליים.

ה) אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מינימלי מקודקוד מקור s
לקודקוד יעד t:
- נריץ אלגוריתם דייקסטרה למציאת מסלולים מינימליים
מ-s, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
- נהפוך את הכיוונים בגרף
- נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת
מסלולים מינימליים מ-t, נשמור את הקשתות ונסמן כשימושיות.
- נהפוך את הכיוונים בגרף בחזרה.
- נעבור על כל הקשתות בגרף, אם הקשת הנוכחית היא

לא שימושית נסמנה $e=(u,v)$. נבדוק האם
$d(s,u)+w(e)+d(v,t)$ זה המרחק המינימלי שנמצא עד כה.
אם כן - נשמור את המסלול - מכיל מסלול מינימלי $p_{s,u}$
ומסלול מינימלי $p_{v,t}$ וקשת אחת לא שימושית.
- בסוף הריצה נקבל את המסלול המינימלי המכיל קשת לא
שימושית אחת בלבד.

בס״ד

חישוב זמן ריצה:
האלגוריתם של דייקסטרה רץ פעמיים וזמן הריצה שלו
הוא - $\Theta(|E|\cdot\log|V|)$
היפוך הצמתים מתבצע פעמיים וזמן הריצה שלו הוא $\Theta(|E|)$
מעבר על הגרף והיפוך לכל צלע מה סוף של הפעולות - $\Theta(|E|)$
לכן סה״כ זמן ריצה של האלגוריתם $\Theta(|E|\cdot\log|V|)$ כנדרש.

שאלה 2

נתון עץ פורש מינימלי T של גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$
עם משקלים אי שליליים $c(e)\geq 0$ לכל אחת מהצלעות.
G' גרף המתקבל מ-G לאחר השמטת צלע e^* מתוך צלעות E של G.
G' קשיר. נציג אלגוריתם שמתקן את T כך שיתקבל ממנו
עץ פורש מינימלי T' עבור G':

הרעיון: נמצא את רכיבי הקשירות של T לאחר שהסרנו את
הקשת e^*. נחפש את הקשת בעלת המשקל המינימלי שמחברת
בין רכיבי הקשירות הללו - וכך T יהפוך שוב לעץ פורש מינימלי.

האלגוריתם:

1. $e^*=(v,w)$ הצלע אותה נשמיט מתוך T
2. נסמן T כ-T' לאחר הסרת הצלע e^*
3. נריץ אלגוריתם BFS מקודקוד בעץ T' עד ל-w, ע״מ לקבל
את רכיבי הקשירות של w.
4. נעבור על כל אחת מהצלעות ב-G' שמקושרות לקודקודים של
רכיב הקשירות - את הצלע הנוכחית (נכנסת לקודקוד שאינו
ברכיב הקשירות) והיא בעלת המשקל המינימלי - נסמנה e
5. נוסיף את הצלע e ל-T' ובכך T' יהיה עץ פורש מינימלי.

הוכחת נכונות:

1. נסמן בתור S את קבוצת הקשירות של w בעץ T',
לאחר הסרת הצלע (v,w).
2. גודל קבוצת הקשירות S קטן מ-V, מכיוון שאם 2 הקבוצות
היו באורך שווה היינו מקבלים לאחר הסרת הצלע e^* גרף
קשיר - משמע היה מעגל בעץ T, וזו סתירה להיותו עץ.
3. הקבוצות S ו-$(V-S)$ אינן ריקות - ולכן עפ״י משפט Cut 4.17

בס"ד

הקשת המינימלית בין 2 הקדקודים הללו חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימלי של G.

4. נניח בשלילה שהעץ T' אינו עץ פורש מינימלי.
לפי ③. הצלע e' הוא חלק מכל עץ פורש מינימלי.
לכן ייתכן רק ש T' שפורש את S אינו מינימלי או T' שפורש את V-S אינו מינימלי. אך חלקים אלה מוכלים בעץ הפורש המינימלי הנתון T - כלומר ניתן להחליף אותם בעץ מינימלי - כלומר העץ T אינו עץ פורש מינימלי - וזוהי סתירה לנתון. לכן נסיק ש האלגוריתם נכון והוא מוצא עץ פורש מינימלי.

חישוב זמן ריצה:
סריקת העץ ע"י BFS הוא $\Theta(|E|+|V|)$
זמן ריצה של מעבר על הקשתות הוא $\Theta(|E|)$
שאר הפעולות - בזמן ריצה קבוע.
כמו כן נתון שהגרף קשיר ולכן מתקיים $\Theta(|E|+|V|)=\Theta(|E|)$
לכן זמן הריצה הוא $\Theta(|E|)$ כנדרש.

שאלה 3

נציג נוסחה 3-CNF עליה האלגוריתם שהוצע נכשל:
דוגמה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3\wedge\varphi_4\wedge\varphi_5\wedge\varphi_6\wedge\varphi_7$ כך ש:

$$\varphi_1=(X_1\vee X_2\vee X_3)$$
$$\varphi_2=(X_1\vee X_2\vee X_4)$$
$$\varphi_3=(X_4\vee X_2\vee X_3)$$
$$\varphi_4=(X_5\vee X_2\vee X_3)$$
$$\varphi_5=(X_5\vee X_4\vee X_3)$$
$$\varphi_6=(\neg X_5\vee X_4\vee X_3)$$
$$\varphi_7=(\neg X_1\vee \neg X_2\vee\neg X_3)$$

ההשמה: $X_1=F$ ו- $X_2, X_5=T$ מספקת את הנוסחה φ ולכן הנוסחה ספיקה.
נראה כי האלגוריתם החמדני שהוצע נכשל:
האלגוריתם יבחר השמות שממקסמות את מס' הפסוקיות החדשות. תחילה עבור המשתנה X_1 האלגוריתם

בס"ד

יבחר בהשמה $X_1 = T$ כי השמה זו מספקת את 2 הפסוקים ℓ_1, ℓ_2 לעומת פסוק אחד ב-ℓ עבור הערך F.
באותו האופן יבחר עבור X_2 את ההשמה T כי היא מספקת את ℓ_3, ℓ_4 לעומת ב-ℓ שמסופק עבור הערך F.
גם X_3 ייבחר ההשמה T עפ"י אותו רעיון.
כלומר - עד כה האלגוריתם בחר את ההשמה $X_1 = X_2 = X_3 = T$
כלומר הפסוק ב-ℓ לא יסופק לעולם! דבר המוביל לכך ש-ℓ לא יסופק כי הנוסחה φ מסופקת רק אם כל הפסוקיות שבה מסופקות.
לסיום - ראינו שהאלגוריתם יחזיר השמה לא מספקת עבור הפסוק, אך ראינו שהפסוק אכן ספיק, לכן האלגוריתם נכשל.

שאלה 4

טענה: לכל עץ מושרש בינארי למחצה T קיימת סדרת שכיחויות f כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

הוכחה: עצי הופמן הם עצים בינאריים למחצה שכל צומת בהם מייצג מספר אותיות יחד כאשר מיקום הצמתים בעץ הבינארי תלוי בשכיחות של האותיות שמיוצגות על ידו בקידוד מסוים.
יהי $T=(V,E)$ עץ בינארי למחצה, נסמן $|V|=n$ ולכל v_i נגדיר את שכיחות הצומת $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$

נוכיח את הטענה באינדוקציה על עומק העץ.

- בסיס האינדוקציה: כאשר $d=0$, לעץ יש רמה אחת בה נמצא השורש, ולכן מתקיים $f_1 = \frac{1}{2^0} = 1$, עץ הופמן של הסדרה יכלול גם הוא עץ עם עלה אחד ולכן יהיה זהה ל-T.
- הנחת האינדוקציה: לכל עץ בינארי למחצה T לעומק מרבי של d, אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$ הוא T.
- צעד האינדוקציה: נוכיח שעבור עצים בינאריים למחצה בעומק $d+1$ קיים עץ הופמן לסדרת השכיחויות שזהה ל-T!

יהי $T=(V,E)$ עץ בינארי למחצה בעומק $d+1$ הרי שקיים לפחות צומת אחד ששייך לעומק המקסימלי, נסמן אותו ב-v.
T הוא עץ בינארי למחצה ולכן ל-v יש אח מאותו $p[v]$,

נסמן אותם ב- u.
ניצור עץ חדש מעל T, כאשר לכל 2 אחים בעומק $d+1$
נוסיף את השכיחויות שלהן לאב שלהן, כמתואר באלגוריתם
הופמן בספר, נסמן את העץ החדש ב- S.
כך שלכל $v,u \in V$ בעומק $d+1$ נוסיף לאב הקדמון
המינימלי המשותף להם את שדה ~~[illegible]~~ השכיחות שלהם -

$$\frac{1}{2^{d+1}} + \frac{1}{2^{d+1}} = \frac{2}{2^{d+1}} = \frac{1}{2^d}$$

את העלים v,u נמחק מהעץ S.
הגענו למצב בו הסרנו את כל העומק $d+1$ כאשר
שימרנו את התכונה של סדרת השכיחויות, שכן לכל צומת
i עדין מתקיים $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$ בפרט עבור $i=d$.
עומק העץ הנוכחי הוא d, ולפי הנחת האינדוקציה, קיים
עץ הופמן לסדרת השכיחויות $f_1 \dots f_n$ הזהה ל- S.
מתוך S נוכל לבנות חזרה את T באמצעות בנייה הפוכה
לזו שבה בנינו את S, כך שלכל צומת בעומק d (או לחלק מהם)
נחלק את השכיחות בצורה שווה בין 2 הבנים שלהם,
ובכך נייצר עץ הופמן תקין.
הרי שאחת מהאפשרויות השונות תייצר את T,
ובכך מצאנו עץ הופמן זהה ל- T בעומק $d+1$.
מש"ל