מגיש: תמיר (צייג)
ת.ז 066035130

<u>שאלה 1</u>

א. טענה: אם כל הצלעות ב P_{sv} עמוקות אזי P_{sv} מסלול מזערי

נוכיח באינדוקציה: יהי P_{ss} $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $w(e)>0$

עבור $n=0$ גודל המסלול המכוון הוא 0 כי $s=v$ ולכן $W(P_{ss})=0$

ומכיון שכל המשקלים בגרף חיוביים כל מסלול אחר P'_{ss}

יקיים $W(P_{ss}) \le W(P'_{ss})$ ולכן P_{ss} הוא המסלול הקצר

נניח נכונות עבור n כלומר שמסלול מכוון $|P_{su}|=n$ ~~הוא מסלול מזערי~~
~~וכל הקשתות בו עמוקות.~~ כל הקשתות בו עמוקות הוא מזערי
~~ונוכיח עבור n+1.~~

~~כל קשת בו עמוקות~~ כך ש $|P_{sv}|=n+1$

~~על המסלול P_{su} $|P_{su}|=n$ ולכן הקשת ב P_{sv} כל הקשתות~~

~~עמוקות ולכן הוא מזערי~~

נוכיח עבור $n+1$.

עבור מסלול $P_{s,v}$ כך ש $|P_{sv}|=n+1$

יהא מסלול V ו P_{sv} ~~...~~ נסמן את הצלע $e=(u,v)$

ולכי הקשת היא צלע עמוקה מכיון כי לכן הקשת

היא צלע אחרונה בתוך מסלול מזערי.

נניח בשלילה כי קיים P'_{sv} כך ש $W(P'_{sv}) < W(P_{sv})$

$$W(P'_{sv}) = W(P'_{su}) + W(e) < W(P_{su}) + W(e) = W(P_{sv})$$

כלומר ~~$W(P'_{sv})$ ...~~ P_{sv} אינו מסלול מזערי וזו סתירה

להנחת האינדוקציה.

~~אם ... במסלול~~

נניח בשלילה: כי קיים בגרף G הלאה כמסלול קצר P_{sv}

אשר הוא אינו פשוט ; P_{sv} אינו מסלול מינימלי.

אם G אינו כולל שליליים אזי קיים לא בגלל מעגל:

המסלול מינימלי P_{su} ולכן קיים P'_{su} שמקיים

$$w(P'_{su}) < w(P_{su})$$

ניצור מסלול חדש $P'_{su} \circ P_{uv}$

$$w(P_{sv}) = w(P_{su}) + w(P_{uv}) > w(P'_{su}) + w(P_{uv}) = w(P'_{sv})$$

ולכן P_{sv} אינו מסלול מינימלי וזו סתירה לכך ש P_{sv} הינו מינימלי

ה. נניח מסלול כזה מינימלי ולפי סעיף א כל תת-מסלול:

אם כל הקשתות ב P_{sv} שליליות אזי הינו מסלול מינימלי

אזי במסלול P_{sv} כזה מינימלי יש קשת לא שלילית

אחת או יותר.

~~נניח~~ ונניח ולכן בשלילה שקיימות קשתות במסלול P_{sv} שאינם

~~קשתות~~ קשתות לא שליליות (a_1, b_1) ; (a_2, b_2)

כך שמסלול ~~...~~

$$P_{sv} = s \ldots a_1, b_1, \ldots, a_2, b_2, \ldots v$$ יראה:

נתבונן בתת מסלול P_{b_1v} הינו מכיל את הקשת הלא שלילית

(a_2, b_2) ולכן לפי סעיף ב הוא לא מינימלי. ~~...~~

~~...~~

~~אם נמצא מסלול אחר מינימלי ... P'_{b_2v}~~

~~$P'_{sv} = P_{sb_2} \circ P'_{b_2v}$ ... $w(P'_{b_2v}) < w(P_{b_2v})$~~

$$\cancel{w(P'_{sv}) = w(P_{sb_2}) + w(P'_{b_2v}) < w(P_{sb_2}) + w(P_{b_2v}) = w(P_{sv})}$$

~~P_{sb} ... ~~יכול ... לא שלילית~~~~

אם ישנו מסלול אחר מצטבר ~~[illegible]~~

$b_1 v$ נסמן כ $P'_{b_1 v}$ אז בהכרח $W(P'_{b_1 v}) < W(P_{b_1 v})$

נגדיר את המסלול $P'_{sv} = P_{sb_1} \circ P'_{b_1 v}$

אז

$$W(P'_{sv}) = W(P_{sb_1}) + W(P'_{b_1 v}) < W(P_{sb_1}) + W(P_{b_1 v}) = W(P_{sv})$$

אבל ב P_{sb_1} ישנו רק קשתות מינימליות a_1, b_1

ולכן לכל סוף ב P_{sb_1} לא מצטבר וכל מסלול יותר מאוחר

הקצה מצטבר הוא מצטבר

ולכן את P_{sv} כמעט מצטבר יש בו כולם אחת ויחידה לא

מינימליות.

ד. ~~[illegible]~~ מכיוון ש $e=(u_1,u_2)$ היא הכבדה ביותר

מינימליות יחידה במסלול P_{sv} כמעט מצטבר אז לכל סוף v כל קשת היא מינימליות

נגדיר את הראשונה של P_{sv} כ P_{su_1} מכיל רק קשתות

מינימליות כי כל הקשתות שונות לכן ש $e' \in E$

ולכן לכל סוף v P_{su_1} מצטבר

וזאת דבר ו ~~[illegible]~~ סתירה

ה.

תיאור האלגוריתם: נבנה רדוקציה לאלגוריתם של דייקסטרה

נריץ דייקסטרה על גרף G ונקבל את עץ T

עם המרחקים הקצרים ביותר עכשיו מכיון שעץ זה מראה

מינימלי כל הצלעות בו הם שימושיות ואין צלע X

וכל שאר הצלעות אינן שימושיות

כנכפיל את העץ ל G' ובין העצים נחבר רק

עם הצלעות הלא שימושיות

ואז נחפש מסלול בין $s\in G$ ל $t\in G'$

<u>אלגוריתם</u>

נריץ את דייקסטרה על גרף $G=(V,E)$ מצומת s ונקבל

את עץ המסלולים הקצרים T

את כל הקשתות אשר נכנסו לעץ T כלומר הקשתות

השימושיות נגדיר כ E_T

ניצור גרף חדש G' ; G''

עבור כל קשת $e=(u,v) \in E_T$

ניצור צמתים בגרף G' ; G'' אם הם לא הוגדרו עדיין

ועבור כל קשת $e=(u,v)\in E\setminus E_T$ (כלומר כל הקשתות הלא שימושיות)

נחבר קשת צ בין e $u\in G'$; $v\in G''$ כך $e=(u\in G'', v\in G'')$

נריץ שוב אלגוריתם דייקסטרה על הגרף החדש

מצומת $s'\in G'$ ל $t''\in G''$

אם נמצא מסלול כזה נחזיר אותו ואת הערך אם לא

נחזיר ∞

הוכחה:

משפט: זהו האלגוריתם מחזיר מסלול בין s ל t

המסלול יהיה כמעט מצטבר.

טענה: ~~אם~~ קיים מסלול כמעט מצטבר בין s ל t ב G

$\Downarrow$

קיים מסלול מצטבר בין $s \in G'$ ל $t \in G''$ ב G^*

הגרף אשר מחולק לשני עותקים G' ו G'' אשר מחוברים רק בקשתות לא מונוטוניות.

יהי מסלול p ב G שהוא מצטבר כך e ~~במסלול~~ v', u'' אינו במסלול

~~נבנה מסלול p' ב G^* בין s' ל t''~~

כך $w(P_{v',u''}) < w(e \in E/E_T)$ כלומר $e=(v',u'')$ היא הקשת הלא מונוטונית המינימלית

$$w(P_{st}) < w(P_{sv'}) + w(P_{su''})$$

נבנה: מסלול p' ב G^* בין s' ל t''

אז לפי סעיף 2 הרישא $P(s'v')$ יהיה מצטבר

והסיפא $P(u'', t'')$ יהיה גם מסלול מצטבר אזי המסלול $P'_{s't''}$

$$P'_{s't''} = P_{s'v'} \circ (v'u'') \circ P_{u''t''}$$

הינו מסלול כמעט מצטבר.

הוכחת המשפט:

נחלק למקרים!

1) האלגוריתם מצא מסלול מ t, s ב G^* בעזרת דייקסטרה

אזי הוא המחזיר את מסלול p^* שהוא מסלול קצר אשר

מכיל בדיוק קשת אחת לא מונוטונית מינימלית ולפי טענה העזר

כך שהמסלול שקיבלנו הוא כמעט מצטבר.

2) קבלנו ∞ כלומר לא נמצא מסלול מצטבר בין s ל t

זמן ריצה:

פעמיים דייקסטרה $\overset{\Theta(|E| \cdot \log|V|)}{\checkmark}$ + בניית גרף G^* זמן לינארי

$$T(|E|,|V|) = 2\Theta(|E| \cdot \log|V|) + \Theta(2|E| + 2|V|) = \Theta(|E| \cdot \log|V|)$$

שאלה 2:

תיאור האלגוריתם: נחרם את רכיבי הקשירות של עץ T
לאחר הסרת e^* כדי לתקן את העץ נוסיף את הקשת
בעלת המשקל המינימלי שמחבר בין רכיבי הקשירות האלו.

אלגוריתם

$e^*=(v,u)$ הקשת המוסרת

נסיר את הקשת e^* מ-T

נריץ BFS מקודקוד u על העץ T נקבל את רכיבי הקשירות של w

נעבור על הקשתות בגרף G' ונמצא את e' הקשת בעלת
משקל מינימלי שנכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות

נוסיף את e' לעץ T ונקבל את עץ T'' המתוקן.

הוכחה:

קבוצת הקודקודים של w ב-$T\setminus\{e^*\}$ היא $|V|$ אחרת היינו
מקבלים n-1 קשתות בגרף G וכן ב-T היו n קשתות
וזו סתירה לכך ש-T עץ

נסמן את קבוצת הקודקודים של w ב-$T\setminus\{e^*\}$ כ-V'
V' לא ריקה וגם $V-V'$ לא ריקה וכן הקשת המינימלית
בין V' ל-$V-V'$ חייבת להיות חלק מ~~עץ~~ פורש מינימלי של G'

זמן ריצה:

זמן הסרת e^* הוא $O(\deg_T(v)+\deg_T(w))=O(2n-1)=O(|E|)$

זמן הרצת BFS על עץ הוא $O(|V(T)|+|E(T)|)=O(2n-1)=O(|E|)$

זמן מציאת קשת מינימלית בין רכיבי הקשירות היא $O(|E|)$
מכיוון ש-G' גרף קשיר

זמן ריצה של האלגוריתם הוא $O(|E|)$

שאלה 3

$$\varphi = \varphi_1 \land \varphi_2 \land \varphi_4 \land \varphi_5$$

$$\varphi_1 = x_1 \lor x_2 \lor x_3$$

$$\varphi_2 = x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3$$

$$\varphi_3 = x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3$$

$$\varphi_4 = x_4 \lor x_2 \lor x_3$$

$$\varphi_5 = \neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	3	3	3	1
$\neg x_i$	1	2	2	0

נמצא כי האלגוריתם החמדן שהצגנו יציב ב

$$T \to x_1, x_2, x_3, x_4$$

~~בהצבה של השמה~~ אז לפי ההצבה הזו הנוסחה תהיה כך

$$\varphi = (T \lor T \lor T) \land (T \lor F \lor T) \land (T \lor T \lor F) \land (T \lor T \lor T) \land (F \lor F \lor F) = F$$

אז ההשמה לא מספקת!

אבל יש לנו השמה מספקת אחרת

$$F \to x_1$$

$$T \to x_2, x_3, x_4$$

$$\varphi = (F \lor T \lor T) \land (F \lor F \lor T) \land (F \lor T \lor F) \land (T \lor T \lor T) \land (T \lor F \lor F) = T$$

משמע ההשמה מספקת ולכן האלגוריתם לא אופטימלי

שאלה 4

מספיק נוכיח בעזרת אינדוקציה על עומק העלה:

~~הטענה~~ המשפט: לכל עץ מושרש בינארי ומלא T בעל n

~~הטענה~~ עלים קיימת סדרת שכיחויות $l_1, l_2, \ldots, l_n$ כך

שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T

הנחת האינדוקציה: לכל עץ בינארי T שעומקו d

אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות l_i הוא T

לכל עלה בעץ T בעל עומק d שכיחות העלה $l_i = \frac{1}{2^{d_i}}$

d_i - עומק העלה u_i

בסיס ~~האינד~~ נבדוק עבור עומק $d=0$:

עץ בעל עומק 0 הוא עץ עם עלה 1 וסדרת השכיחויות היחידה מכילה איבר בודד 1 שהוא $1 = \frac{1}{2^0} = l_1$

כמובן שעץ הופמן של סדרה זו הוא עץ בעל עלה אחד ולכן זהו T

נניח כי את נכונות האינדוקציה עבור עץ בעומק d

נוכיח עבור עץ בעומק d+1:

$T=(V,E)$ הוא עץ בינארי עם עומק של d+1 כלומר ישנו לפחות זוג אחים בעומק d. ומכיון שזהו עץ T בינארי מלא ק"ר לו את אותו עומק.

עכשיו אם ה"ז עלה בעומק d+1 נחבר את האח של העומק לה ונאחד אותם תחת האב אשר יקבל את סכום השכיחויות שלהם $\frac{1}{2^{d+1}} + \frac{1}{2^{d+1}} = \frac{2}{2^{d+1}} = \frac{1}{2^d}$.

נקבל שהאב הוא עלה בעומק d והשכיחות שלו היא $\frac{1}{2^d}$ שזה מקיים את סדרת השכיחויות l_i

נמחק מ: עץ את העלים ונקבל עץ בינארי לחלוטין:

נסמן d שמגדיר את סדרת השכיחויות $f_i = \frac{1}{2^{d(e_i)}}$

ומי הפונקציה האינקודינג עם עץ הופמן של סדרת שכיחויות

הנ"ל הם הדרש