שאלה 1

ב. נוכיח באינדוקציה: עבור $n=0$

גודל המסלול הוא 0 לכן $v=s$

וגודל המסלול סכום $w(e)$ 0 זה מסלול מקצרי

נניח נכונות עבור n.

הוכחה עבור $n+1$:

$$P_{sv} = P_{su} + P_{uv}$$

$$n+1 = n + 1$$

ב P_{su} כל הקשתות מינימליות ולפי הנחת האינדוקציה מסלול מקצרי

ש הקשת של P_{uv} גם מינימלי.

נניח בשלילה שקיים $w(P_{sv}) > w(P'_{sv})$

P'_{sv} מסלול מקצרי ו ש הקשת האחרונה

במסלול P'_{sv} לכן אם עוברים את הקשת

ש מ $w(P'_{sv})$ ומ $w(P_{su})$

ונקבל סתירה להנחת האינדוקציה ש P_{su}

כל הקשתות מינימליות והמסלול מקצרי

ולכן $w(P_{sv}) \le w(P'_{sv})$. מש"ל.

ג. נוכיח בשלילה: קיים מסלול מינימלי P_{sv}

עם קלט לא גימשי ש(כ קלט בו

ימתרונה. במסלול לפי הגדרת קלט גימשי).

נניח $P'_{sv} = P'_{su} \circ P_{uv}$ $w(P'_{sv}) < w(P_{sv})$

מכאן

$$w(P_{sv}) = w(P_{su}) \circ w(P_{uv}) > w(P'_{su}) \circ w(P_{uv}) = w(P'_{sv})$$

$$\Downarrow$$

$$w(P_{su}) > w(P'_{su})$$

וזו סתירה כי לפי א' מסלול $w(P_{su})$ מינימלי.

ד. מסלול P_{sv} כמעט מינימלי לכן יש בו

לפחות יש אות קלט גימשי. נניח בשלילה

שקיימות שתי ~~...~~ קלט גימשיות.

נסמן את הקשתות $(u_1,u_2),(u_3,u_4)$.

נתבונן ב~~...~~ P_{u_2v} זה מסלול לא מינימלי

לפי סעיף ד' כי יש את u_3,u_4 [illegible]

במסלול.

מכאן יש ~~...~~ P'_{u_2v} שסוגו כך

מינימלי $P'_{u_2v} < P_{u_2v}$

$$\Downarrow$$

נגדיר $P'_{sv} = P_{su_2} \circ P'_{u_2v}$ $w(P'_{sv}) < w(P_{sv})$

אך P'_{sv} גם אינו מינימלי כי יש u_1,u_2

ומוכל כעוט ולכן סתירה לכך ש P_{sv}

כמעט מינימלי, לכן אין P_{sv} כמעט מינימלי

יש בו רק קשת אחת לא גימשי—

ג. גם מסלול $P_{u_1 u_3}$ אשר הקשתות הן מינימליות
לפי סעיף ב לכן: המסלול $P_{s u_1}$
מכיל רק קשתות מינימליות ולכן מסלול קצר ביותר.
כמו כן הסופי $P_{s u_3}$ מכיל רק קשתות
מינימליות ולכן מסלול קצר ביותר.

ד. נריץ באלג' דייקסטרה מקודקוד s
לכל שאר הקודקודים נקבל את עץ המסלולים
הקצרים ביותר T המושרש ב s.
נקבל חלוקה לקשתות G שנמצאות ב T
וקשתות שלא נמצאות בו.
הקשתות שנמצאות ב G ולא ב T הן קשתות
מינימליות והקשתות שנמצאות ב G בלבד
הן לא מינימליות.

כעת ניצור גרף חדש G^* ונחלק לב חלקים
כאשר בכל חלק יש המרחק של הקשתות המינימליות
ב G יחד עם כל המרחקים של הקודקודים
שמחוברים אליהם.

בין שני חלקי הגרף נחבר את הקשתות לא
מינימליות מ G וגם הגרף המשולב ב G^*
נקבל גרף עליו נריץ את האלג' של דייקסטרה.
נקבל בתוצאה את מסלולים קצרים T^*
שבו נחפש מסלול מקודקוד s לקודקוד t''
שאכן יש כך. זה המסלול שאנו מחפשים.

2. ## תיאור האלג'

נעבור על הגרף ונחפש את כל הקשתות
הקלה אחר הוצאת T ולכן: יגעו היא
T_g מכל הקשתות הקלה נמצא את
המינימלי ואותה נוסיף לעץ T ונקבל
עץ פורש מינימלי.

האלג':

נמצא את שני רכיבי הקשירות ב-T'
הרצת BFS מקודקוד כלשהו $v \in T'$
כדי לבדוק קודקודים $u \in T'$ ולהם סימון:
ושמירה. נריץ BFS
לכל $e \in T'$ שר קלה אחת נמצא בקבוצה
הראשונה והשני נמצא בקבוצה השניה
נמצא את: e הקשת המינימלי
ונוסיף אותה ל-T' ונקבל
עץ פורש מינימלי של G

ההוכחה לא נכונה. מה שצריך להוכיח שמה שבנית הוא מינימלי ועץ פורש
• תיאור אלג' – 5 נק'
• הוכחת נכונות – 0 נק'
*ניתוח זמן ריצה – 2 נק'

הוכחה:

נסמן $e^* = (u,v)$ הקשת שיוצרת שני רכיבי קשירות
שונים מעצם הגדרת T כעץ.
אם נניח שלילה: שיש רכיב קשירות בין שני
החלקים ב-T' סימן של מסלול בין u ל-v
ולכן ב-T המקורי יש מעגל וזו סתירה
ש-T עץ.
אם יש ב-T' 2 רכיבי הקשירות כאשר
נחבר את הקשת e^* נקבל של T יש
2 רכיבי קשירות סתירה לכך ש-T עץ

כיון ש G הוא קשיר ניתן לקבוע
T' פורש.

מכל האפשרויות שמחזירות כן — שני אברי
הקשירים — לקחנו את המינימלי
ולכן נקבל עץ פורש מינימלי

<u>זמן ריצה</u>

זמן ריצת BFS — $O(|E|+|V|)$

זמן ריצת המעבר על כל הקשתות ב T' — $O(|E|)$

כיון ש $|V|-1 \le |E|$

$$O(|E|+|V|) = O(|E|)$$

3 דוגמה של נוסחת 3-CNF ספיקה!

$$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4$$

$$\phi_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$\phi_2 = x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4$$

$$\phi_3 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4$$

$$\phi_3 = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$$

נספור את הופעות המשתנים ונקבל טבלה
השמה היא לא מספקת.

$x_1 \rightarrow 3T, 1F$

$x_2 \rightarrow 2T, 1F$

$x_3 \rightarrow 2T, 1F$

לכן עבור ϕ_3 נקבל F והשמה לא מספקת

אלג' אם כן

$X_1 = T$

$X_2 = F$

$X_3 = T$

$X_4 = T$

ניקח

$$\phi = (T,F,T) \land (T,T,F) \land (T,F,F) \land (F,T,F) = T$$

יש כן השמה מספקת — לכן האלג' נכשל

4.

ניקח $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס $d=0$: אז העומק הוא 0 ויש עלה 1. $f_1 = \frac{1}{2^0} = 1$ לכן לפי הופמן כלל

עלה 1.

נניח שנכונות עבור עומק d ונוכיח עבור עץ בעומק $d+1$.

יהי $T=(V,E)$ עץ בינארי מלא בעומק $d+1$

לכן קיים צומת אחד לפחות $d(u)=d+1$

ומכיוון ש T עץ בינארי מלא יש לו אח

v הוא גם עלה. ומהיות $d(v)=d+1$

נפעיל את T על T' ונמצא את

העלים u',v'.

נוכל לראות שאם את סכום השכבות —

$\frac{1}{2^d}$ ונשמר גם u',v'

נקבע את ע.צ. סדיר כל העלים בעומק
$d+1$ נקבל עץ בעומק d
עם סיכויים לעלים של $\frac{1}{2^d}$

נשתמש את הנחת האינדוקציה
וקיבלנו עץ בינרי למילים בעומק d

שמקיים
$$p_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$$

ולפי הנחת האינדוקציה יש עץ הופמן כזה.
נוכל לבנות מ T' את T ע״י הוספת
העלים חזרה.
מכאן שכל עץ עבור בינרי למילים T
היות סדרת סיכויים כך שהוא מעצי הופמן
של הסדרה. (ע.ו.) T מ.ש.ל

•רעיון הבניה – 3 נק'
•הוכחה מלאה – 0 נק'
a