סריקות לעומק ומיון טופולוגי

מפגש 3

שבוע שעבר ראינו

- מעבר על BFS
- תכנון אלגוריתם מבוסס רדוקציה

התוכנית להיום

- סריקת עומק - DFS
- מיון טופולוגי

חלק I

DFS - סריקה לעומק

הקדמה

האלגוריתם DFS פעול באופן רקורסיבי כאשר תמיד יעדיף לחפש "עמוק" יותר בגרף לפני מעבר לשכנים נוספים של קודקוד נסרק.

- בסריקה נוצר יער עומר G_π. צלע ביער מהסוג $(\pi(x), x)$.
- לכל קודקוד 3 מצבים אפשריים:
  - קודקוד מאותחל בלבן - ונשאר לבן כל עוד לא התגלה בסריקה
  - קודקוד הפוך אפור ברגע גילויו
  - קודקוד הופל מאפור לשחור לאחר שהסתיימה סריקת כל הקודקודים שנגישים ממנו.

הקדמה

- לכל קודקוד מספר שדות:
  - $d(v)$ - זמן גילוי הקודקוד
  - $f(v)$ - זמן סיום הטיפול הקודקוד
  - $\pi(v)$ - קודקוד אשר ממנו התגלה v.
  - $color(v)$ - צבע הקודקוד

דוגמת ריצה על הלוח

DFS - האלגוריתם

DFS(G)

$Init: t = 1$ color[u]=white for all $u \in V$

FOR $u \in V$ DO

IF color[u] = white THEN

DFS-Visit(u)

DFS - האלגוריתם

```
DFS-Visit(u)
    color[u] = gray
    d[u] = t
    t = t + 1
    FOR (u,v) ∈ E DO
        IF color[v] = white THEN
            π[v] = u
            DFS-Visit(v)
    color[u] = black
    f[u] = t
    t = t + 1
```

תכונות DFS

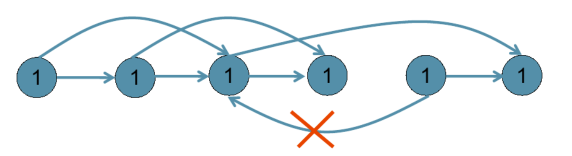
- סורק את כל הקודקודים
- מוצא מעגלים
- מציאת מיון טופולוגי
- סיבוכיות $O(|V| + |E|)$

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: יהי גרף קשיר ולא מכוון ויהי $u \in V$. אם קיימת הרצת DFS מ- u על G והרצת BFS מ- u על G הנותנות את אותו עץ T אז בהכרח $G = T$

מיון טופולוגי

- מיון טופולוגי של גרף מכוון $G = (V, E)$ הינו סידור $(v_1, ..., v_n)$ של קודקודי הגרף, כך שלכל $1 \leq i, j \leq n$ אם $i < j$ אז אין קשתות מ j ל i בגרף



דוגמה על הלוח

מיון טופולוגי

משפט: אם הגרף DAG אזי יש מיון טופולוגי.
הוכחה בבניה (עמוד 111 בספר).

מיון טופולוגי באמצעות DFS

- **טענה:** אם G חסר מעגלים ו- $(u,v) \in E$ אז בכל סריקת DFS(G) מתקיים $f(v) < f(u)$
- **אלגוריתם מבוסס DFS למציאת מיון טופולוגי:**
  - הרץ DFS(G)
  - (אם לא התגלתה קשת אחורה) החזר סידור של V לפי זמני f בסדר יורד.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות הטענה (על הלוח).

שאלה 4

- **הגדרה:** גרף מעורב הוא גרף שבו כמה מהקשתות מכוונות והאחרות אינן מכוונות.
- הוכיחו שאם בגרף מעורב התת-גרף המתקבל מכל צמתי הגרף ומהקשתות המכוונות בלבד אינו מכיל מעגל מכוון, אז תמיד ניתן לכוון את הקשתות הלא מכוונות כך שבגרף המכוון המתקבל אין מעגל מכוון. הראו כיצד ניתן למצוא כיוון מתאים לקשתות בזמן לינארי.
- **רמז:** מצאו קודם את האלגוריתם המבצע את הכיוון ומהוכחת נכונותו הסיקו כי קיים כיוון כנדרש.

שאלה 5

נתון גרף מכוון.
כיצד יכול להשתנות מספר הרכיבים הקשירים היטב בגרף אם מוסיפים קשת חדשה?

שאלה 6

הוכח או הפרך-
אם בגרף מכוון יש קשתות הנכנסות לצומת u וגם קשתות היוצאות ממנו, אזי לא ייתכן שבהרצת DFS על הגרף הצומת u יימצא בעץ המכיל אותו בלבד.

שאלה 7

הוכח או הפרך-

יהי גרף קשיר ולא מכוון, יהי $V \ni s$ ויהי T עץ המתקבל מהרצת DFS על G מ- s . אז עומקו של T הוא לפחות כעומקו של כל עץ המתקבל מהרצת BFS על G מ- s.

שאלה 8

יהי G גרף לא מכוון וקשיר. הוכח או הפרך:

- כל עץ המתקבל מריצת DFS על G ניתן לקבל על ידי ריצת BFS על G .
- כל עץ המתקבל מריצת BFS על G ניתן לקבל על ידי ריצת DFS על G .