שאלה 1

ב.

נוכיח באינדוקציה: עבור $n=0$

גודל המסלול הוא 0 לכן $v=s$

והמסלול מינימלי כי $w(e)>0$ זה מסלול מקצרי

נניח נכונות עבור n.

הוכחה עבור $n+1$:

$$P_{sv} = P_{su} + P_{uv}$$

$$n+1 = n+1$$

כי P_{su} כל הקשתות מינימליות ולפי הנחת האינדוקציה מסלול מקצרי

פה הקשת של P_{uv} גם מינימלית.

נניח בשלילה שקיים $w(P_{sv}) > w(P'_{sv})$

P'_{sv} מסלול מקצר ו-e הקשת האחרונה

במסלול P'_{sv} לכן אם נוריד את הקשת

e מ-$w(P'_{sv})$ ומ-$w(P_{sv})$

נקבל סתירה להנחת האינדוקציה: e ו-P_{su}

כל הקשתות מינימליות והמסלול מקצרי

ולכן $w(P_{sv}) \le w(P'_{sv})$. מש"ל.

ה. נוכיח בשלילה: קיים מסלול מינימלי P_{sv}
עם קטע לא מינימלי — ש (כ קטע לא
מתרנו. במסלול לפי הגדרת קטע מינימלי —).

נניח $P_{sv} = P'_{su} \circ P_{uv}$ $\qquad w(P'_{sv}) > w(P_{sv})$

מכאן

$$w(P_{sv}) = w(P_{su}) \circ w(P_{uv}) > w(P'_{su}) \circ w(P_{uv}) = w(P'_{sv})$$

$$\Uparrow$$

$$w(P_{su}) > w(P'_{su})$$

ולכן סתירה כי לפי א' מסלול $w(P_{su})$
מינימלי.

ו. מסלול P_{sv} כמעט מינימלי לכן יש כן
מסלול — יש אותו לא מינימלי. נניח בשלילה
שיש יותר — שני ~~קשתות~~ קטעים לא מינימליים.
נסמן את הקשתות $(u_1,u_2),(u_3,u_4)$.

נתבונן ב ~~P_{su}~~ $P_{u_2 v}$. זה מסלול לא ~~מ~~מינימלי
לפי סעיף ד' כי יש u_3,u_4 ומכילו —
במסלול.

מכאן יש ~~$P(u_2v)$~~ $P'_{u_2 v}$ שקולו קטן
מינימלי $P'_{u_2 v} < P_{u_2 v}$

נגדיר $P'_{s,v} = P_{su_2} \circ P'_{u_2 v}$ $\Leftarrow$ $w(P'_{sv}) < w(P_{sv})$

אך P'_{sv} גם אינו מינימלי כי יש u_1,u_2
ומכילו — כמוכן ולכן סתירה לכך ש P_{sv}
כמעט מינימלי, לכן אם P_{sv} כמעט מינימלי
יש לו רק ~~קשת~~ אחת לא מינימלית —

ג. המסלול $P_{u,v}$ שאר הקשתות הן מינימליות
לפי סעיף ב לכן הקשתות P_{s,u_1}
מכיל רק קשתות מינימליות ולכן מסלול מזערי
כמו כן הסיפא P_{s,u_k} מכיל רק קשתות
מינימליות ולכן מסלול מזערי.

ד. נריץ באלג' דייקסטרה מקודקוד s
לכל שאר הקודקודים נקבל את כל המסלולים
המזעריים T המושרש ב s.
נקבל חלוקה לקשתות שנמצאות ב T
וקשתות שאינן נמצאות בו.
הקשתות שנמצאות ב G ולא ב T הן קשתות
מינימליות והקשתות שנמצאות ב G בלבד
הן לא מינימליות.

כעת נייצר גרף חדש G^* ונחלק לפי חלקים
כאשר בכל חלק יש רק את הקשתות המינימליות
ב G יחד עם כל הקודקודים של הקשתות
שמחוברים אליהם.

בין שני חלקים הגרף מחבר את הקשתות לבין
מינימליות של G ועל הגרף שנוצר ב G^*
נפעיל שוב את האלג' של דייקסטרה.
נקבל כתוצאה את מסלולים מזעריים T^*
שכל מסלול מלווה יעל לקודמות ל t
שאם קיים כזה. זה המסלול שאנו מחפשים.

2. תיאור האלגו'

נעבור על העץ ונחפש את כל הקשתות
הקלות אחרי הוצאת T_1 ו-T_2: שגוי היא
T_2 מכל הקשתות האלה נמצא את
המינימלית ונוסיף אותה ל-T' ונקבל
עץ פורש מזערי.

האלגו'

נמצא את שני רכיבי הקשירות ב-T'
הרצת BFS מקודקוד כלשהו $v\in T'$
כאשר נמצא קודקוד $u\in T'$ שלא סומן:
נסמנו ונריץ BFS
לכל $e\in T'$ שבה קצה אחד נמצא ברכיב
הראשון והקצה השני נמצא ברכיב השני
נמצא את: הצלע הקלה המינימלית
ונוסיף אותה ל-T' כאשר T' הוא
עץ פורש מזערי של G

הוכחה:

תהא הקשת $e^*=(u,v)$ יוצרת שני רכיבי קשירות
שונים מעצם הגדרת T כעץ.
אם נניח בשלילה: שיש רכיב קשירות אחד בין
החלקים ב-T' סימון של מסלול בין u ל-v
ולכן ב-T המקורי יש מעגל וזו סתירה
ש-T עץ.

אם יש ב-T' 3 רכיבי הקשירות כאשר
נחזיר את e^* נקבל שב-T יש
2 רכיבי קשירות סתירה לכך ש-T עץ

כיון ש-G הוא ישיר ניתן לקבוע
T' פורש.

מכל האפשרויות שמחברות את שני הרכיבים
הישירים לקחנו את המינימלי
ולכן נקבל עץ פורש מזערי

<u>זמן ריצה</u>

זמן ריצת BFS $O(|E|+|V|)$
זמן ריצה במעבר על כל הקשתות ב-T' $O(|E|)$

כיון ש $|V|-1 \le |E|$

$\theta(|E|+|V|) = O(|E|)$

3 נבחר את השמה ה-3-CNF הבאה!

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4$

$\phi_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$\phi_2 = x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4$

$\phi_3 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4$

$\phi_3 = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$

נפעיל את האלגו' המוצע ונקבל שכל
השמה לכל משתנה

$x_1 \rightarrow 3T,\ 1F$

$x_2 \rightarrow 2T,\ 1F$

$x_3 \rightarrow 2T,\ 1F$

לכן עבור ϕ_3 נקבל F ולכן לא מסופק

אלא אם נציב

$X_1 = T$

$X_2 = F$

$X_3 = T$

$X_4 = T$

נציב

$$\phi = (T, F, T) \wedge (T, T, F) \wedge (T, F, F) \wedge (F, T, F) = T$$

אכן כל נוסחה מסופקת — לכן הפלט נכון

4.

נבחר $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס $d=0$: אז העומק הוא 0 ויש עלה

1 $f_1 = \frac{1}{2^0} = 1$ זה לעלה יופיע רגל

עלה 1.

נניח שנכונות עבור עץ בעומק d ונוכיח

עבור עץ בעומק $d+1$.

יהי $T=(V,E)$ עץ בינארי מלא בעומק $d+1$

לכן קיים עלה אחד לפחות $d(u) = d+1$

ומאחר ש T עץ בינארי מלא יש לו אח

v הוא גם עלה. ומהיות $d(v) = d+1$

נסתכל על T ל T' ונמחק את

העלים u, v.

נקבל הפך שהם את סכום השכיחויות

$\frac{1}{2^d}$ ונשמר כי u, v

נבחר את צ.י. סדור כל העלים בעומק

$d+1$ נוכל אל בעומק d

עם שכיחות העלים של $\frac{1}{2^d}$

ומאחר את הנחת האינדוקציה

קיבלנו עץ בינארי לחלוטין בעומק d

שמקיים

$$f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$$

ולפי הנחת האינדוקציה יש עץ הופמן כזה.

נוכל לעבור מ T' אל T ע"י הוספת

העלים מחדש.

מכאן שכל עץ שהוא בינארי לחלוטין T

קיימת סדרת שכיחויות כך שהוא עץ הופמן

של הסדרה (f_i) T מ.ש.ל.