בס"ד

נדב מזרחי

ממן 11

מעולה! 25\25

שאלה 1 -

נפתור בעיה זו ע"י כך שנבנה את הבעיה הזו לבעייה של שידוך יציב של n גברים ונשים. על מנת שנוכל לדמות, נגדיר רשימת העדפות עבור הספינות והנמלים ונריץ את אלגוריתם G-S על קבוצות אלו (עם רשימת העדפות) וע"י כך נקבל ציוות - עבור כל ספינה יתאים נמל יחיד שבו היא תעגור. טיפול - נוודא שאף ספינה לא "תתנגש" עם ספינה אחרת באותו נמל.

נסמן:

S - קבוצת הספינות.

P - קבוצת הנמלים.

ברור כי: $|S|=|P|=n$

כמו כן נמספר את האיברים:

$S=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$

$P=\{P_1,P_2,\dots,P_n\}$

כעת נגדיר העדפות:

נאמר כי ספינה S_k מעדיפה את נמל P_i על פני P_j אם P_i מופיע ביום מוקדם יותר מאשר P_j בלו"ז של S_k.

נאמר כי נמל P_k מעדיף את ספינה S_i על פני S_j אם P_k מופיע בלו"ז של S_i ביום מאוחר יותר מאשר מופיע בלו"ז של S_j.

יצירת רשימת העדפות תהיה באופן הבא:

- עבור כל ספינה S_i ($1\le i\le n$) נעבור מהיום הראשון עד האחרון וברגע שנמצא נמל נכניס אותו לרשימת העדפות (נמל שמופיע ביום מוקדם יותר מהשני, יהיה במקום העדפה גבוהה יותר). סיבוכיות $O(m\cdot n)$
- נעבור על הימים בסדר הפוך, כלומר $d\leftarrow m$ עד $d=1$, ועבור כל יום נעבור על הלו"ז של הספינות באותו יום d, ונכניס את הספינה לתחילת הרשימת

בס"ד

העבודה של הנמל שמגיע אצלה ביום הבא. סיבוכיות: $O(m \cdot n)$.

כעת, באלגוריתם G-S נשתמש בנמלים כגברים, ובספינות כנשים.

אנו יכולים להשתמש באלגוריתם שיפיק יציב מכיוון שישנם n ספינות (בתפקיד הנשים) ו- n נמלים (בתפקיד הגברים) ועבור כל אובייקט ישנה רשימת העדפות.

תהי A קבוצת הזוגות הספציפים שהאלגוריתם החזיר עבור הספינות והנמלים.

נניח בשלילה כי בזוג שנוצר באלג' מתקיים כי ספינה s_i מגיעה לנמל p שכבר "תפוס" ע"י ספינה s_j שהגיעה אליו ביום מוקדם יותר.

מכיוון ש- s_i הגיעה לנמל מאוחר יותר מאשר s_j זה אומר כי הנמל p מעדיף את s_i על פני s_j. מכיוון ש- s_j הגיעה ל- p ביום הנוכחי, זה אומר שהאלג' זיווג אותה עם נמל p' ביום מאוחר יותר. לכן s_j מעדיפה את p על פני p'. כלומר מצאנו כי:

p מעדיף את s_i

s_j מעדיפה את p

אבל מתקיים $\begin{matrix}(p', s_j)\\ (p, s_j)\end{matrix} \in A$

כלומר (p, s_i) מהווה אי-יציבות ביחס ל-A.

אבל לפי נכונות אלג' G-S, לא יתכן שזה יקרה כי האלג' מחזיר זיווג יציב!

לכן הפעלת G-S על הקלט מחזיר פלט נכון.

סיבוכיות האלגו' הינה $O(n^2)$.

לכן הסיבוכיות של סידור רשימת העדכנית והפעלת G-S:

$$\max\{O(n^2), O(m\cdot n)\} = O(m\cdot n)$$

(כי $m>n$). $\square$

שאלה 2-

·תיאור אלג' – 3 נק'
·הוכחת נכונות – 0 נק'
·ניתוח זמן ריצה – 0 נק'

חסר הסבר למה זה תנאי הכרחי

תחילה נבחין בתנאי הכרחי לכך שלכל צומת דרגת הכניסה תהיה גדולה ממש: זה אומר שעבור כל קודקוד v, קיימת קשת שנכנסת אליו (לפחות אחת) ולכן בגרף הזה מכוון $G=(V,E)$ (עם הקשתות הללו מכוונות) יש לפחות $|V|$ קשתות (נניח בשלילה כי זה קיים מעגל. נבחר $v\in V$ כלשהו וניתן לבנות מסלול. לכל v יש דרגת כניסה גדולה מאפס ולכן בגרף הזה מכוון $G=(V,E)$ יש ל-v קשת סמוכה. כלומר

גם בגרף עם צלע יחידה יש קשת מכל קודקוד אבל מספר הקשתות הוא |V|-1

v ——— u

כעת נבחר את הצומת האחרת שסמוכה ל-u (בהכרח) יש, כי דרגת הכניסה של u גדולה ממש מאפס והקשת $\{v,u\}$ "כבר מכוונת" ל-v).

הקשת הבאה מחובר לצומת $z\in V$ כלומר

v ——— u ——— z

ברור כי $z\neq v$ (אחרת יש מעגל) בסתירה להנחה. נמשיך לבנות כך מסלול ע"י הוספת n קשתות שונות ונגיע למצב שיש לנו $|V|+n$ קודקודים. (כי בכל שלב אנו לא מוסיפים צומת שכבר הייתה כי לפי ההנחה אין מעגל) - קיבלנו סתירה.

כעת האלגוריתם יעשה את הדבר הבא:

לא הבנתי מה זה קשור כל מה שכתבת בעמוד הזה.

בס"ד

נסרוק את רכיבי הקשירות. אם ברכיב הקשירות לא קיים מעגל, אזי מהטענה קודם ברור כי התכונה שדרגת הכניסה של כל צומת תהיה גדולה מאפס לא מתקיימת (אם נניח בשלילה שכן יכולה להתקיים התכונה נקבל סתירה לטענה לעיל).

את הטענה לעיל, היית צריך לכתוב כטענה ולהוכיח אותה על-מנת להשתמש בה

עבור כל רכיב קשירות נמצא 1 מעגל (ע"י DFS למשל) ונכוון את הקשתות "בכיוון ההתקדמות". כל צומת ששייכת למעגל תיצבע בשחור. לאחר מכן נעבור על הצמתים שלא שייכים למעגל (לא צבועים שחור) אך שייכים לרכיב קשירות ונבחר שדרגת הכניסה שלהם תהיה גדולה מאפס והקשת שלהם (שמחברת אותם לצומת במעגל) תהיה מהצומת ששייכת למעגל "לפניהם".

ככה נעשה עבור כל רכיב קשירות. חסר הוכחה וחסר וניתוח זמן ריצה.

שאלה 3 -

הי אורן, כמו שאמרת בכיתה, אני כותב כאן שקראתי והבנתי את הפתרון.

הרעיון הינו: ליצור גרף שהקודקודים הם $x_1,\dots,x_n,\neg x_1,\dots,\neg x_n$. הקשתות יהיו:

אם $x_i \vee x_j$ אזי:

$$(\neg x_i, x_j), (\neg x_j, x_i) \in E$$

כלומר הקשתות ב-E הינם זוג סדור כאשר הקשת $(a,b)\in E$ משמעותה בעצם $a \to b$ (אימפליקציה) ולפי לוגיקה ישנה שקילות בין $a \vee b \equiv (\neg a \to b) \wedge (\neg b \to a)$ ולכן זה מייצג את אותו האובייקט הלוגי.

בסופו של דבר לאחר שיוצרים את הגרף, בודקים אם קיימים מסלולים המקיימים $x_i \dashrightarrow \neg x_i$ וגם $\neg x_i \dashrightarrow x_i$

בס״ד

(זה גרף <u>מכוון</u> ולכן בודקים את שני הכיוונים). מהרלוונטיות של אימפליקציה מסיקים כי זוהי סתירה ולכן לא קיימת השמה שמספקת את הפסוק הנ״ל.
אחרת (אם לא קיים מסלול מפסוק לשלילתו וההיפך) $\Rightarrow$ קיימת השמה.

סה״כ ישנם $2m$ קשתות ו-$2n$ קודקודים ואז מבצעים סריקת DFS מצומת x_i שרירותית ומבצעים השמה לצומת (T או F) בהתאמה שקיבלנו עד כה בסריקה. אם הגענו בסריקה לצומת $\neg x_i$ נריץ סריקת DFS על $\neg x_i$, ואם מצאנו ש-x_i נמצא בסריקה זו - נקבל שהפסוק אינו ספיק.

לכן, לאורך ריצת האלגוריתם אנו מגדירים השמה המספקת את הפסוק - או שאנו מוצאים סתירה ולכן מחזירים כי אין השמה חוקית.

·תיאור אלג' – 5 נק'
·הוכחת נכונות – 5 נק'
·ניתוח זמן ריצה – 0 נק'

שאלה הבאה בעמ׳ הבא.

חסר ניתוח זמן ריצה
a

בס"ד

שאלה ד

רעיון האלגוריתם:

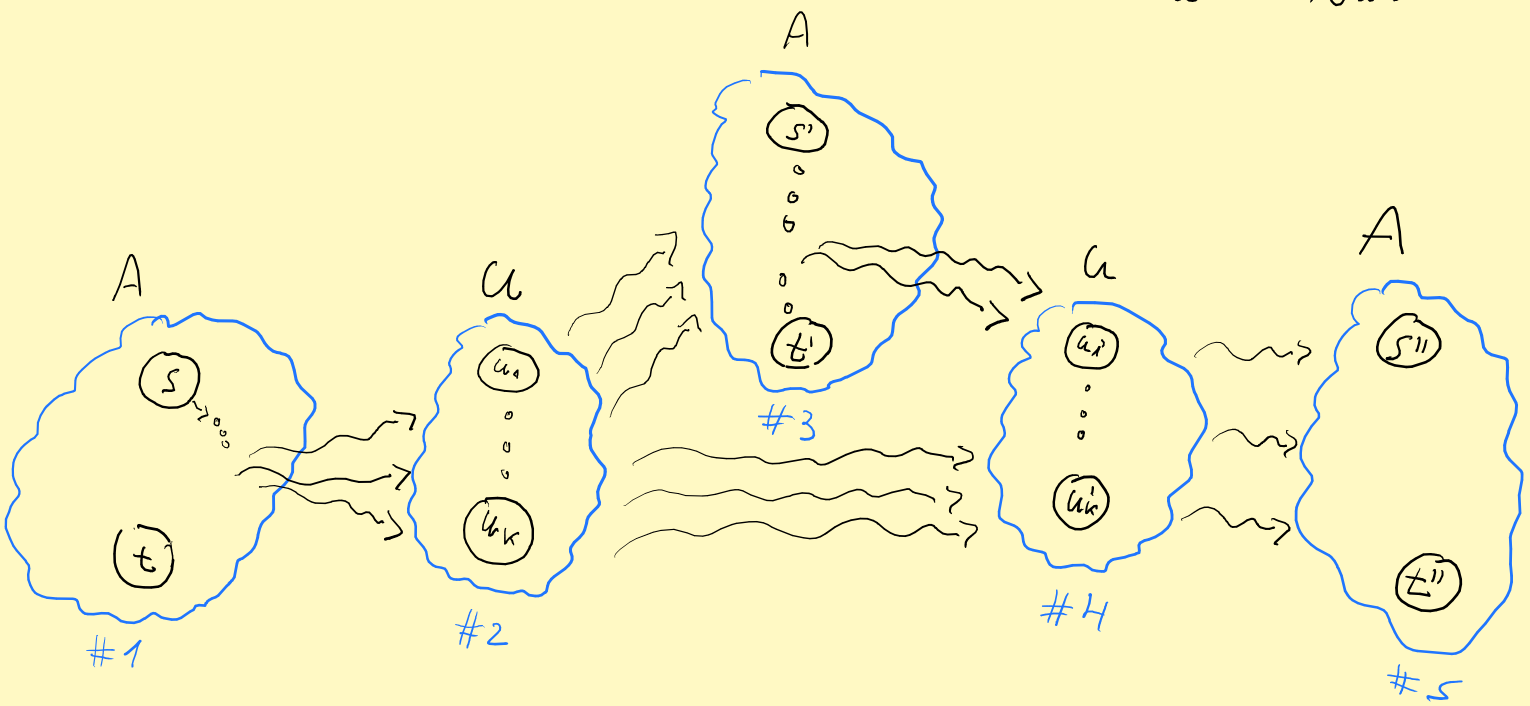
נעבור ברדוקציה לגרף מכוון G' שנראה באופן הבא:

תחילה נגדיר קבוצה:

$$A = V \setminus U$$

כלומר A הינה קבוצת הקודקודים הלא המיוחדים (כולל s ו-t).

כעת נגדיר את הגרף החדש ע"י הרעיון הבא, נחלק את הגרף החדש לחמישה "עננים":



בענן #1 נשים את הקבוצה A והקשתות ביניהם. במעבר לענן #2 נשאיר את הקשתות שמחברות בין קודקודי A לבין U. בענן #2 נשים את קודקודי U ללא הקשתות ביניהם. בענן #3 נשים את קודקודי A ובמעבר בין ענן #2 לענן #3 נשאיר את הקשתות מ-U אל A. בענן #4 שוב נשים את U ונחבר אליהם את הקשתות שנכנסות מקודקודי A (מענן #3) ומקודקודי U (שבענן #2). לבסוף נשים בענן #5 את קודקודי A ונחבר מענן #4 את הקשתות מ-U ל-A. כמו כן, נסמן את קודקודי A שבענן #3 בעזרת תג אחד (v'). נסמן את קודקודי A שבענן #5 בעזרת תגיים. (v'')

בס"ד

כעת נריץ BFS על הגרף G' (שמורכב מחמש שכבות של "עננים")

- אם התקבל מסלול מקודקוד s אל קודקוד t'' - נחזיר את המסלול ובהכרח זהו המסלול הקצר ביותר (כי הרצנו BFS) שיש בו שני קודקודים מ-U (כי עברנו בהכרח בעננים #2 ובענן #4). כמו כן, בענן #2 ובענן #4 (ענני הקודקודים המועדפים) עברנו פעם אחת, אז נקבל שמספר קודקודי U במסלול הוא לפחות 2.

מכיוון שבתוך העננים #2 ו-#4 ניתקנו את הקשתות בין הקודקודים, מובטח שנעבור רק בקודקוד אחד בענן #2 ובקודקוד אחד בענן #4 ולכן נקבל שבמסלול יש לכל היותר שני קודקודים מועדפים. לכן ממסקנה נסיק כי זהו המסלול הקצר ביותר בעל 2 קודקודים מועדפים.

בניית הגרף תהיה כדלקמן:

- בניית "ענן" ראשון: אין מה לעשות.
- בניית "ענן" שני: עבור כל קשת בין שני קודקודים מועדפים - נתק אותה.
- בניית "ענן" שלישי: עבור כל $v\in A$ תעתיק את v ותסמנו בעזרת תג v',
  עבור כל $u\in U$, אם קיימת (u,v), תייצר את (u,v').
  עבור כל $y\in V$ תייצר (y,v').
- בניית "ענן" רביעי: עבור כל קודקוד $u\in U$ תעתיק אותו ותייצר u'.
  עבור כל $v\in A$ אם קיימת (u,v), תייצר (u',v')

.

- בניית "ענן" חמישי: עבור כל $v\in V$ תייצר v''.
  עבור כל $u\in U$ תייצר (u',v'').
  עבור כל $y\in V$ תייצר (y,v'').

בס"ד

בניית הגרף G' ומורכבת לכל היותר $4\cdot(|V|+|E|)$ (שלבים #2 עד #3).

כמות הקודקודים והצלעות שיש ב-G' הינה לכל היותר $5(|E|+|V|)$

[באופן גס ישנם 5 שלבים, לכן לכל היותר הכפלנו בחמש את כמות האובייקטים - כמובן שיש פחות אבל נסיון :)

לכן ישנם $O(|E|+|V|)$ קודקודים וצלעות.

BFS על גרף זה כמובן לוקח $O(|E|+|V|)$ ולכן זוהי הסיבוכיות של השיגרה.

כמובן שיש מסלול מבוקש $\iff$ הקודקוד t'' נמצא ברכיב הקשירות של s. כאמור זהו המסלול הקצר ביותר (כי הפעלנו BFS) שמייצג מעבור בשני שלבים של u. □