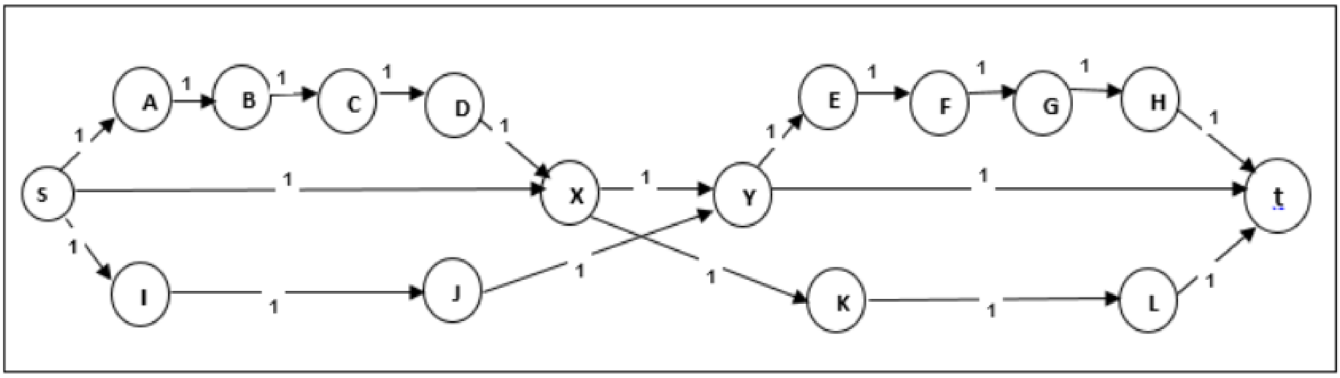
יעל ויצמן

312232655

# **__ממן 15__**

## **__שאלה 1:__**

נתאר את הרשת המקיימת את התנאים הנדרשים בשאלה:

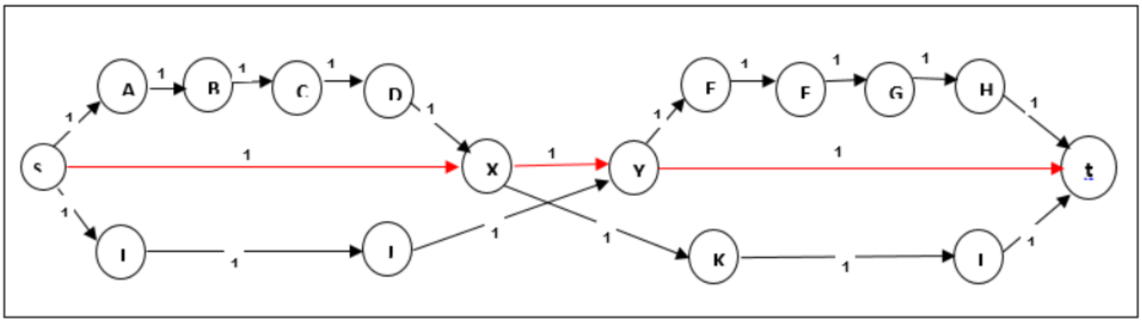



* כאשר הקשת $e=\overrightarrow{(X, Y)}$.
* וכל ערכי הקיבול של כל הקשתות יהיה 1 – כך נבטיח שערך הקיבול יהיה שווה לתוספת הזרימה דרך e כנדרש בשאלה.

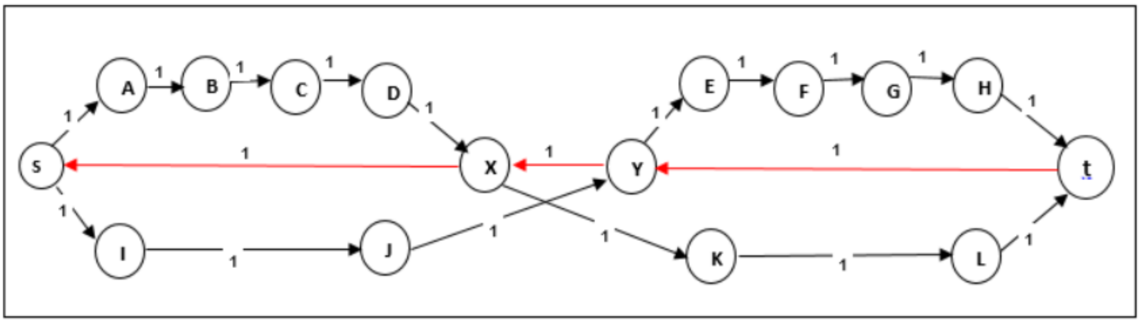
**__נתאר כעת איך יראה הגרף + הגרף השיורי בעת ריצת אלגוריתם Edmonds-Karp:__**

באיטרציה הראשונה:

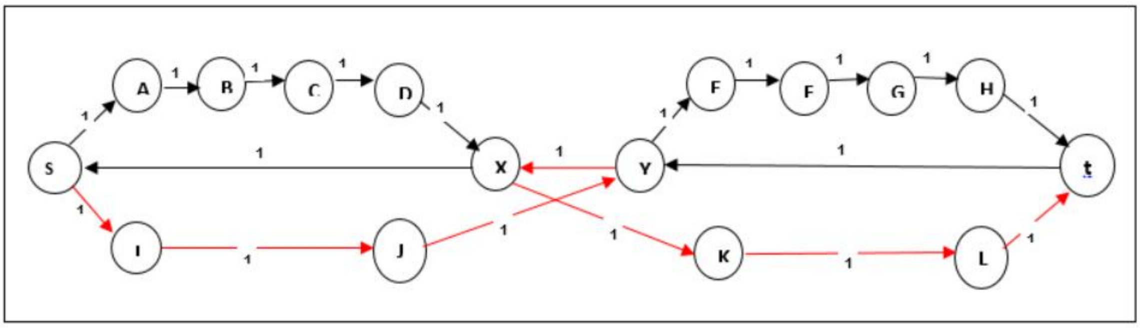
האלגוריתם יבחר את  מסלול השיפור הקצר ביותר (על פי BFS) בגרף השיורי:  **S-> X-> Y -> t  ---> צלע מוסרת**



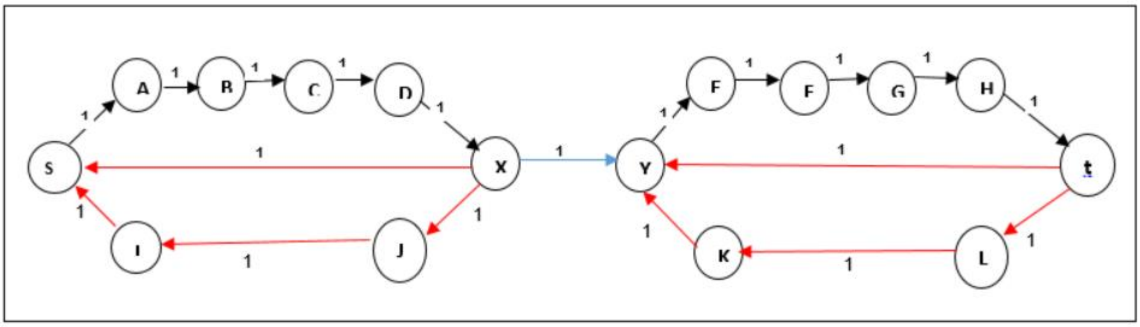
בתחילת האיטרציה השניה הגרף השיורי יראה כך:



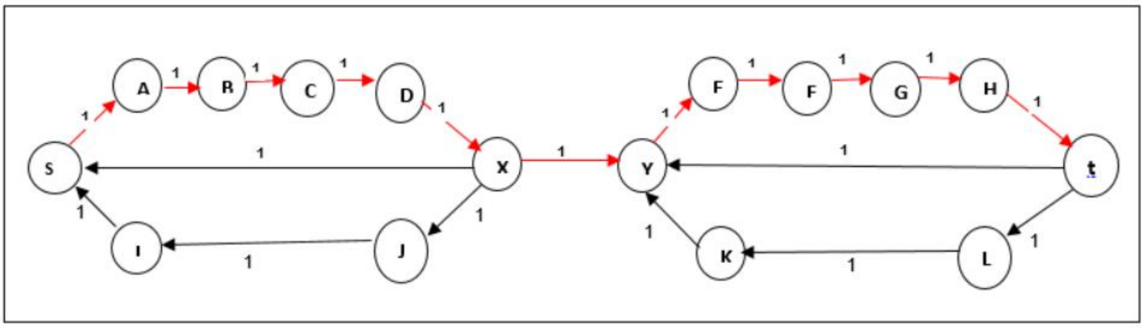
ולכן מסלול השיפור הקצר ביותר שקיים אותו יבחר האלגוריתם יהיה: **S->I->j->Y->X->K->L->T ----> צלע שנוספת**




בתחילת האיטרציה השלישית הגרף השיורי יראה כך:




ולכן המסלול השיפור הקצר ביותר שיהיה לו לבחור יהיה: S->A->B->C->D->X->Y->F->E->G->H->t צלע ששוב מוסרת




בצורה זו קיימנו את כל התנאים שנדרשו בשאלה, ראינו שבשני איטרציות שונות תוספת הזרימה היתה זהה לקיבולת השיורית של e. ושהצלע e מחברת בין שני קודקודים שהמרחק שלהם שונה מהקודקוד S.

## שאלה 2:

הגרף המוגדר בשאלה:

* גרף מכוון G=(V, E) עם מקור ויעד .
* הקיבולת עבור כל צלע היא C(e)>0 כאשר ערך הזרימה הוא מספר ממשי כלשהו, C(e) חסם תחתון על ערך הזרימה , ללא חסם עליון.
* חוק שימור הזרימה מתקיים: $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) = 0$

דהיינו, ערך הזרימה שנכנס לכל קודקוד שהוא לא S או t = לערך הזרימה שיצא מהקודקוד.

**א.** אם קיימת זרימה חוקית ברשת , דהיינו היא מקיימת את כל התנאים שהוגדרו בשאלה,

נגדיר: $f(v)^{in}$ = ערך הזרימה הנכנס לקודקוד v .

$f(v)^{out}$ = ערך הזרימה היוצא מקודקוד v .

ומתקיים: $f(v)^{in} = f(v)^{out}$

*כעת, נגדיר X>0 להיות תוספת הזרימה שנוסיף לזרימה החוקית: f(e)+X > f(e) ≥ C(e) > 0 , עבור e - קשת כלשהי,

בכך אנו עומדים באילוץ **הקיבולת**.

* עמידה **באילוץ השימור**, נגדיר 3 קודקודים (u, v, w) כך שיתקיים: $e_i$ = (u,v), $e_{i+1}$ = (v,w) , כך שמה שנכנס לקודקוד v דרך הקשת $e_i$ יהיה מה שיצא מ v דרך הקשת $e_{i+1}$
* ומכיוון שלא ניתן חסם עליון על ערך הקיבולת, לא משנה עד כמה יהיה ערכו של X גדול ככל שיהיה עדיין נקבל זרימה חוקית.

**ב.** ע"מ שהאלגוריתם ימצא זרימה חוקית עליו לקיים את תנאי השימור והקיבול

רעיון האלגוריתם + האלגוריתם:

נניח לכתחילה שעבור כל קשת e£E יתקיים ש C(e) - הקיבולת המינימלית שלה תהיה ערך הקיבולת שלה.

1. עבור כל קשת e£E נציב ש f(e) = c(e) – שערך הזרימה בקשת יהיה שווה לקיבולת המינימלית של הקשת.
2. נעבור על כל הקודקודים מ S ועד t, בעזרת סריקת BFS נעבור על כל קודקוד v£V ונבדוק:
   - אם $f(v)^{in} = f(v)^{out}$ נמשיך לקודקוד הבא.
   - אם $f(v)^{in} > f(v)^{out}$ נוסיף לערך הזרימה שיוצא מV (ניתן באופן רנדומלי לאחת הקשתות) זרם w כך שיתקיים $f(v)^{in} - f(v)^{out}$=w , ובכך יתקיים עבור צומת זו $f(v)^{in} = f(v)^{out}$ .
   - אם $f(v)^{in} < f(v)^{out}$ נמשיך.
3. נעבור על כל הקודקודים מ t ועד S, בעזרת סריקת BFS נעבור על כל קודקוד v£V ונבדוק:
   - אם $f(v)^{in} = f(v)^{out}$ נמשיך לקודקוד הבא.
   - אם $f(v)^{in} < f(v)^{out}$ נוסיף לערך הזרימה שנכנס לV (ניתן באופן רנדומלי לאחת הקשתות) זרם w כך שיתקיים $f(v)^{out} - f(v)^{in}$=w , ובכך יתקיים עבור צומת זו $f(v)^{in} = f(v)^{out}$ .
   - המקרה ש $f(v)^{in} > f(v)^{out}$ לא יתקיים כי טיפלנו בו בשורה 2.

לאחר ביצוע שלבים אלו נקבל זרימה חוקית המקיימת את תנאי הקיבול והשימור.

נכונות:

1. נכונות עבור שורה 1 באלגוריתם, בכך שקבענו שערך הזרימה יהיה שווה לערך הקיבול המינימלי – c(e) =f(e) בהכרח מתקיים: c(e)≤f(e) – ובכך נשמר תנאי הקיבול.
2. נכונות סריקת BFS מוכחת בספר, במעבר על הקודקודים בכיוון של מS ועד ל t , נוכל לתקן את תנאי השימור עבור הצמתים שלא מתקיים בהם תנאי השימור + ומקיימים $f(v)^{in} > f(v)^{out}$ , מפני שאנו בכיוון של הזרימה החוצה מן הקודקוד נוכל להוסיף זרימה לקשתות היוצאות מv ובכך לגרום לצמתים אלו לקיים את תנאי השימור.
3. במעבר על הקודקודים בכיוון של מt ועד ל s , נוכל לתקן את תנאי השימור עבור הצמתים שלא מתקיים בהם תנאי השימור + ומקיימים $f(v)^{in} < f(v)^{out}$ , מפני שאנו בכיוון של הזרימה פנימה מן הקודקוד נוכל להוסיף זרימה לקשתות הנכנסות לv ובכך לגרום לצמתים אלו לקיים את תנאי השימור.

בכך השגנו זרימה חוקית המקיימת את כל האילוצים.

ניתוח זמן ריצה:

*על מנת לעדכן את כל ערכי הזרימה של הקשתות ייקח לנו – O(|E|).

* הרצת אלגוריתם BFS כפול 2 ייקח (ומוכח בספר) O(|E|+|v|) ביצוע בדיקות הביניים ייקח זמן קבוע,

קיבלנו שזמן ריצת האלגוריתם יהיה O(|E|+|V|).

**ג.** על מנת למצוא זרימה חוקית מזערית ברשת שתקיים את ערכי הזרימה והקיבול נבצע את האלגוריתם:

<u>האלגוריתם:</u>

1. נבצע על הגרף G את האלגוריתם שמצאנו בסעיף א' למציאת זרימה חוקית בגרף = f.
2. יהיה G' העתק של גרף המקור (אותם צמתים ואותם קשתות) , כך שעבור כל קשת e'£E בגרף תהיה שווה ל C(e') = f(e)-C(e).
3. נמצא זרימה מקסימלית f' בגרף G' – ע"י האלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית של אדמונדס קארפ.
4. בגרף שהתקבל משורה 1 - עבור כל קשת e£E נבצע: f''(e)=f(e)-f(e') .

<u>רעיון+נכונות:</u>

1. לאחר ביצוע שורה 1 באלגוריתם נקבל זרימה חוקית כפי שהוכח בסעיף הקודם.
2. G' יהיה העתק של גרף המקור, כך שקיבולי הקשתות שלו יהיו ההפרש בין ערך הזרימה שבו לבין הקיבול המינימלי – בעצם קיבולי קשתותיו יכילו את הפער בין הזרימה לקיבולת המינימלית שזה מה שאנו רוצים להשיג על מנת למצוא מסלול מזערי.
   משום ש 0<c(e)≤f(e) נקבל עבור ההפרש c(e') = f(e)-c(e) ≥ 0. – גרף זה ייצג עבור כל קשת את הפער בין הקיבול לזרימה שבגרף המקור.
3. ע"י כך שמצאנו זרימה מקסימלית f' בגרף G' , בעצם במילים אחרות מצאנו את הפער המקסימלי שניתן להפחית מהזרימה החוקית f שמצאנו בשורה 1 (ובסעיף א').
4. עבור שורה 4 באלגוריתם, החסרנו מגרף הזרימה החוקי שהתקבל בשורה 1, את הפער המקסימלי שניתן להחסיר מהזרימה ביחס לקיבולת.

   * הזרימה המתקבלת היא מינימלית בהכרח , משום שאם נניח שלא נקבל מצב שבו הזרימה המקסימלית שהתקבלה בשורה 3 באלגוריתם אינה מקסימלית וזו סתירה לנכונות האלגוריתם.

*תנאי שימור- לאחר ביצוע האלגוריתם אנו שומרים על תנאי השימור משום שאני מחסירים באופן כולל את f' מ f.

*תנאי קיבול – לאחר ביצוע האלגוריתם גם תנאי הקיבול ישמר, ונוכיח:

$$f''(e) = f(e)-f'(e) \geq f(e)-f(e)+c(e)=c(e) \quad \rightarrow \quad f''(e) \geq c(e)$$

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

האלגוריתם שבסעיף א ייקח O(m+n) כפי שהוכחנו שם.

בניית G' תיקח זמן של O(m+n)

אלגוריתם אדמונדס קארפ יקח זמן של $O(m^2n)$ כפי שמוכח בספר.

ביצוע שורה 4 באלגוריתם תיקח O(m)

**ולכן זמן הריצה יהיה $O(m^2n)$**

a
15/25

## שאלה 3:

**א.**

נחשוב על זה כך:

* f נתונה כזרימה מקסימלית (ז"א שאין ב f מסלול שיפור)- באופן וודאי.
* נתון שערכי הקיבולות הם מספרים שלמים.

כעת, הגדלנו את הקיבולת של *e ב1. מה שעלול להיות מהגדלת ערך הקיבולת של *e ב1 הוא : או שיתווסף מסלול שיפור אחד בלבד נוסף , או שלא יקרה כלום.

דורש הוכחה.

נוכיח: נריץ את אלגוריתם של אדמונדס קארפ על הגרף לאחר הגדלת ערך הקיבולת של *e ב 1 , כפי שאמרנו, יכולה להיות אופציה שעל הגרף השיורי שנותן האלגוריתם נמצא מסלול שיפור נוסף, אך לא יותר מזה! מפני שהגדלנו במס 1 בלבד!!

- נשלול את האופציה שנמצאו שני מסלולי שיפור, אם נמצאו שני מסלולים אזי מחייב שלפחות אחד מהם הוא מסלול שאין בו את הקשת *e.- ובהכרזה זו בעצם סתרנו את הנתון בשאלה ש f היא זרימה מקסימלית- ולכן לא יתכן.
- כעת, נשארנו עם המסקנה שהאלגוריתם של אדמונדס קארפ במקרה זה מחפש במקרה הגרוע מסלול שיפור אחד בלבד, ולכן בין אם נמצא מסלול שיפור ובין אם לא, זמן הריצה שלו במקרה זה יהיה כזמן הריצה של אלגוריתם BFS עבור מעבר על כל הקשתות והצמתים פעם אחת והוא יהיה כפי שמוכח בספר( $O(|E|+|n|)$. זמן לינארי.

**ב.**

יהיה $G=(V, E)$ גרף מכוון עם קיבולת מקסימלית $c(e)>0$ ותהיה הזרימה $f(e)$ וזרימה חוקית מקיימת: $f(e)\leq c(e)$

<u>רעיון האלגוריתם:</u>

נקטין מהזרימה בערך הקיבול ספרה 1. ואז נבדוק, אם ערך הזרימה גדול מערך הקיבול – ז"א שתנאי הקיבול הופר, ולכן נצטרך לתקן זאת. נתקן זאת כך שנעבור על כל המסלולים מs לt שדרכם עוברת הקשת *e ונוריד את ערך הזרימה במסלול זה

לעבור על כל המסלולים זה לא פולינומי

ב-1. לאחר מכן יכול להיות לנו מסלול שיפור נוסף(מקסימום 1 , כמו בסעיף הקודם) בגרף ולכן נריץ את אלגוריתם ולכן ע"מ למצוא אותו נריץ את אלגוריתם של אדמונדס קארפ למציאת זרימה מקסימלית בגרף.

<u>האלגוריתם:</u>

1. נקטין את ערך הקיבול של *e ב1 ← $c(e^*)=c(e^*)-1$.
2. נבדוק אם $f(e^*)>c(e^*)$:
   - ע"י אלגוריתם BFS מקודקוד S נחפש את המסלול מS לT העובר דרך *e . אבל BFS לא בהכרח ימצא אותו
   - עבור כל קשת מקשתות המסלול שמצאנו נוריד 1 מערך הזרימה שלהן.
   - כעת, נריץ את אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית f' בגרף של אדמונדס קארפ.
3. נחזיר את הזרימה f'.

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

*שורה 1 באלגוריתם נובעת מהדרישה בשאלה.

*שורה 2 באלגוריתם נובעת מכך שתנאי הקיבול יופר באם $f(e^*)>c(e^*)$ (במצב כזה הקשת *e בגרף השיורי הייתה בעלת הקיבול השיורי המינימלי ביותר ועל פייה הוסיפו ערך זרימה לכל המסלול ממנה והלאה) ולכן אם ייווצר מצב שכזה נצטרך לתקן את ההפרה הזו. בשלב זה לא נחשוש שיופר תנאי השימור משום שלא נגענו בערכי הזרימה של הגרף.

- נתקן את הפרת תנאי הקיבול, ע"י כך שנוריד מערך הזרימה 1. ונוכיח:

  לפני השינוי: התקיים $f(e)\leq c(e)$

  הורדנו מערך הזרימה 1 , ז"א $(e^*)=c(e^*)-1$ פה עלול להיווצר המצב ש $f(e^*)>c(e^*)$, ואז לא מתקיים תנאי הקיבול ניתן לראות כמובן שעד כה לא יקרה דבר (כי לא שינינו, אז מן הסתם ...) לערך הזרימה.
- ההורדה מערך הזרימה במסלול שלם תגרום לכך שנשמור על תנאי השימור.
- לאחר השינויים שעשינו עלול להיות מסלול שיפור אחד בלבד לכל היותר שנוצר מן השינויים, ולכן, נמצא זרימה מקסימלית פעם נוספת על הגרף לאחר השינוי.

<u>ניתוח סיבוכיות:</u>

הקטנת הקיבולת של *e תיקח זמן קבוע .

בדיקת $f(e^*)>c(e^*$ יקח זמן קבוע.

חיפוש את המסלול מS לT העובר דרך *e - יקח זמן של $O(|E|+|V|)$.

הורדת ערך הזרימה מהמסלול שמצאנו יהיה במקרה הגרוע מעבר על כל קשתות ( $O(|E|)$

מציאת הזרימה המקסימלית ע"י אלגוריתם אדמונדס קארפ כפי שמוכח בספר, תיקח זמן של $O(|E| + |V|)$/

קיבלנו זמן ריצה לינארי.

## שאלה 4: 15/25

נתון לנו :

$X = \{x1, \dots , xn\}$ - כפי הנתון בשאלה n משתנים

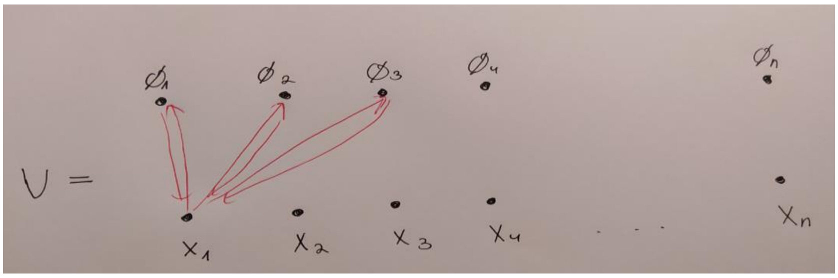
$Y = \{\varphi1, \dots ,\varphi n\}$ – *מפני שנתון שעבור כל 3 משתנים יש 3 פסוקיות שונות ולכן n משתנים יצביעו לעבר 3n פסוקיות.

* נניח שיש m פסוקיות, כל פסוקית יכולה להכיל 3 חיצים ולכן יש 3m חיצים שכל הפסוקיות מכילות .

אם n>m ז"שיהיו חיצים שלא יתקבלו בפסוקיות ולכן זה לא יתכן,

אם n<m שיש פסוקיות שלא תהיינה להן 3 משתנים. ולכן **m=n**.

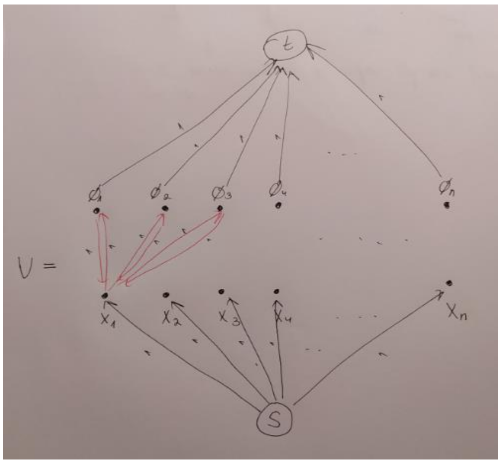
$V = X \cup Y$ - הדגמה (השירטוט נועד להמחשה בלבד):




רעיון+אלגוריתם+נכונות:

נתאר את המבנה:

* G'=(V, E) גרף דו כיווני.
* בצידו האחד של הגרף יהיו המשתנים X. ובצידו השני יהיו הפסוקיות Y.
* עבור כל משתנה $X_i$£X תהיה קשת ממנו אל הפסורית שבה הוא נמצא (כיוון הקשת יהיה לכיוון הפסוקית)
* עבור כל פסוקית, נעביר קשת אל המשתנה שנמצא אצלה. מיותר
* כעת, ממשפט Hall מתקיים התנאי $|\Gamma(A)| \geq |A|$ ולכן יש זיווג מושלם בגרף. זה מה שדורש הוכחה. -10
* נמתח קשת מכל איבר בX לקודקוד יחיד S כשהקשת בכיוון מS לאיברי X.
* נמתח קשת מכל איבר Y לקודקוד יחיד T כשהקשת בכיוון של T.
* נעדכן את כל ערכי הקיבול להיות 1 . המחשה(בלבד)




כעת נמצא את ערך הזרימה המקסימלי בעזרת אלגוריתם של פורד פולקרסון, נשתמש בגרף G' שהגדרנו לעיל, ונקבל מהאלגוריתם שעבור כל מתנה יהיה חיבור עם פסוקית אחת בלבד שזה בעצם הזרימה המקסימלית עם החתך המינימלי ובכך פתרנו את בעיית הספיקה, כי עבור כל משתנה אם הוא חיובי ניתן לו ערך אמת ואם הוא בסימון שלילי ניתן לו שקר והוא יהפוך לאמת. ובכך עבור כל הפסוקיות נמצא פיתרון- ומכך שהנוסחא כולה מסופקת.

ניתוח זמן הריצה:

בניית :G': O(n)

O(n^2) ריצת אלגוריתם פורד פולקרסון

קביעת השמה ע"מ להשיג סיפוק עבור כל פסוקיתO(n)

סה"כ: O(n^2)