שאלה 1.

א.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

$(-1, -3, 2, 1)$

$1, i, -1, -i$ ניקח את שורשי היחידה:

$P_o(x) = (-3, 1) = x - 3$

$P_e(x) = (-1, 2) = 2x - 1$

$P_o(1) = -2$ $\quad P_e(1) = 1$

$P_o(-1) = -4$ $\quad P_e(-1) = -3$

$\cancel{p(1) = 1 + (-2)}$

$p(1) = 1 + 1(-2) = -1$

$p(i) = -3 + i(-4) = -3 - 4i$

$p(-1) = 1 - 1(-2) = 3$

$p(-i) = -3 - i(-4) = -3 + 4i$

$(-1, -3-4i, 3, -3+4i)$

2

$(-1, -3-4i, 3, -3+4i)$

$P_e(x) = (-1, 3) = 3x + 1$

$P_o(x) = (-3-4i, -3+4i) = (-3+4i)x - 3 - 4i$

$(1, -i, -1, i)$ ניקח את שורשי היחידה:

$P_o(1) = -6$ $P_e(1) = 2$

$P_o(-1) = -8i$ $P_e(-1) = -4$

$p(1) = 2 + 1 \cdot (-6) = -4$

$p(-i) = -4 - i(-8i) = -12$

$p(-1) = 2 - 1(-6) = 8$

$p(i) = -4 + i(-8i) = 4$

$(-4, -12, 8, 4) \xRightarrow{/4} (-1, -3, 2, 1)$

לפי מקדמים הפולינום $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

20\30

שאלה ב

נכפל שני מספרים חיוביים בעלי אורך שווה n

נחלק אותם ל k בלוקים. נשתמש במספרים בבסיס 2.

נניח את המספרים כ: $x=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} x_i\cdot 2^{ik}$, $y=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} y_i\cdot 2^{ik}$

לא מספיק מדויק. צריך לתאר את הפולינום ולהסביר שו x_i הם המקדמים שלו

נריץ FFT על x, y ונכפול את התוצאה

$$z_i = x_i\cdot y_i$$

נריץ FFT שוב על הפולינום z

$$z=\sum_{i=0}^{\frac{2n}{k}-1} z_i 2^{ik}$$

נעבור על התוצאה כדי לקבל את המספר המוכפל

סיבוכיות

חלוקה לבלוקים $O(n)$

FFT - בכל קריאה רקורסיבית נכפיל שני בלוקים בגודל k עבור גודל 2n

$O(k^2)$

$k=\log n$

לא ברור לי למה המעבר הזה נכון
זה אמור להיות nlogn

$$T(2n)=2T(n)+\frac{n}{k}\Theta(k^2)=2T(n)+\Theta(n\log^2 n)$$

וכך גם FFT שוב יקח זמן כמו FFT

לכן נקבל $T(n)=O(n\log^2 n)$

25/30

שאלה 3

נגדיר $A = (n!a_n, (n-1)!a_{n-1}, ..., 0!a_0)$

A מכיל את כל המקדמים של x_0 לכל הנגזרות (אפשרי).

$$B = \left(\frac{x_0^0}{0!}, \frac{x_0^1}{1!}, \frac{x_0^2}{2!} \dots \frac{x_0^n}{n!}\right)$$

נבצע FFT ל A,B ונכפיל

נקבל למעשה את הנגזרת ה-k: בנקודה x_0

חסר: נביט בוקטור ההכפלה בכניסה n-k

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le k \,\wedge\\ i+j=k}} A_iB_j = n!a_n\frac{x_0^k}{k!} + \dots + (n-k)!a_{n-k}\frac{x_0^0}{0!} = f^{(k)}(x_0)$$

זמן ריצה 2 FFT וכפל FFT הפוך $3\cdot\Theta(n\log n)=\Theta(n\log n)$

שאלה 4

אם נגדיר רקורסיה שמחלקת כל בעיה ל $\frac{n}{2}$ (פעולות הכפל) מקבלים $\rightarrow$ פעולות כפל בלבד

כמו בקבוצה חיבור חיסור.

פעולות חיבור חיסור מטריצות הן

בסדר גודל $\Theta(n^2)$

נקבל $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$

לפי נוסחת המאסטר מקרה א'

$T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})$