שרה שירי לנדאו
305362121

ממן 12

שאלה 1

א. טענה: *אם כל הצלעות ב $P_{s,v}$ שימושיות אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.*

הוכחה: באינדוקציה על אורך המסלול $P_{s,v}$, *n*.

בסיס האינדוקציה: כאשר $n = 1$, במצב כזה $P_{s,v}$ מכילה קשת אחת בלבד והיא קשת שימושית. נסמן אותה - $e = (s, v)$. נתון שמשקלי הקשתות הם חיוביים, ולכן לכל מסלול $P'_{s,v}$ אחר, מתקיים בהכרח כי $w(P'_{s,v}) \geq w(P_{s,v})$, ולכן $P_{s,v}$ הינו מסלול מזערי.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח שהיא נכונה גם עבור n+1:

נגדיר מסלול $|P_{s,v}| = n + 1$, אשר כל קשתותיו שימושיות, ונסמן את הקשת האחרונה שלו $e = (u, v)$. נסמן $P_{s,u} = P_{s,v} - \{e\}$ ומתקיים ש - $|P_{s,u}| = n$, ולכן עפ"י הנחת האינדוקציה $P_{s,u}$ הינו מסלול מזערי. נביט בצלע *e*, ולפי הגדרה היא הקשת האחרונה במסלול מזערי כלשהו. נניח בשלילה שהיא אחרונה במסלול מזערי כלשהו אחר $P'_{s,v}$, אז מתקיים $w(P'_{s,v}) > w(P_{s,v})$, הגדרנו ש*ew* מוכלת בשני המסלולים ומשקלה חיובי, כך שאם נוריד אותה מאי השוויון הנ"ל הוא עדיין יתקיים, וזאת בסתירה לכך ש $P_{s,u}$ הינו מסלול מזערי. לכן בהכרח מתקיים ש $w(P'_{s,v}) \leq w(P_{s,v})$ ומכאן ש $P_{s,v}$ הינו מסלול מזערי, **מש"ל**.

ב. טענה: *אם יש צלע לא שימושית ב $P_{s,v}$, אז $P_{s,v}$ איננו מסלול מזערי*

הוכחה: נסמן את הצלע הלא שימושית $e = (x, y)$, עפ"י הגדרה היא אינה קשת אחרונה במסלול מזערי כלשהו $P_{s,y}$ לכן יש מסלול אחר $P'_{s,y}$ שעבורו מתקיים: $w(P'_{s,y}) < w(P_{s,y})$.

נוסיף קשת (y, v) ונקבל:

$$w(P_{s,v}) = w(P_{s,y}) + w(P_{y,v}) > w(P'_{s,y}) + w(P_{y,v}) = w(P'_{s,v})$$

קיבלנו מסלול מזערי $P'_{s,v}$ שסכום משקלי קשתותיו קטן משל $P_{s,v}$, ולכן $P_{s,v}$ אינו עץ מזערי, **מש"ל**.

ג. טענה: *אם $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה*

הוכחה: יהי $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי, לכן קיימת בו לפחות קשת לא שימושית אחת, אחרת עפ"י סעיף א' היה מסלול מזערי בסתירה להיותו כמעט מזערי.

תהי $e = (x, y)$ הקשת הלא שימושית, ונניח בשלילה שקיימת קשת אחרת e* שמופיעה במסלול אחריו ואף היא אינה שימושית. נביט במסלול $P_{y,v}$ המכיל את הקשת הלא שימושית e*, ולכן עפ"י סעיף ב' הוא לא מזערי.

כלומר קיים מסלול אחר $P'_{y,v}$ שהוא בן מזערי, ולכן מתקיים $w(P'_{y,v}) < w(P_{y,v})$.

נגדיר מסלול חדש $P'_{s,v}$ המכיל את חיבור 2 המסלולים – $P'_{y,v}$, $P_{s,y}$ ומתקיים:

$$w(P_{s,v}) = w(P_{s,y}) + w(P_{y,v}) > w(P'_{y,v}) + w(P_{s,y}) = w(P'_{s,v})$$

קיבלנו ש - $w(P_{s,v}) > w(P'_{s,v})$, אך $P'_{s,v}$ מכיל בתוכו את הקשת הלא שימושית e, ולכן עפ"י סעיף ב' איננו מסלול מזערי, בסתירה לכך ש $P_{s,v}$ הינו מסלול כמעט מזערי, וכחל מסלול בעל משקל קטן ממש ממנו הינו מסלול מזערי.

לכן, אם $P_{s,v}$ הוא מסלול כמעט מזערי, קיימת בו צלע לא שימושית אחת ויחידה, **מש"ל**.

ד. טענה: *תהי $e = (u_1, u_2)$ הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי $P_{s,v}$. הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל- u_1 מהווה מסלול מזערי, וגם שהסיפא של $P_{s,v}$ מ- u_2 ל-v מהווה מסלול מזערי.*

הוכחה: כל הקשתות האחרות בגרף $e' \in (E - \{e\})$ הינן קשתות שימושיות. מסלול הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל- u_1 מכיל רק קשתות שימושיות, ולכן עפ"י סעיף א' מסלול הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל- u_1 הינו מסלול מזערי.

באותו אופן בדיוק, הסיפא של $P_{s,v}$ מ- u_2 ל-*v* מהווה מסלול מזערי, **מש"ל**.

שרה שירי לנדאו
305362121

ה. אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקדקוד *s* ל t בגרף $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$

תיאור האלגוריתם:

i. נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת כל המסלולים המינימליים מקדקוד *s*. נשמור את כל הקשתות שמצאנו ב E_1

ii. נהפוך את כיווני הקשתות בגרף כדי למצוא מסלולים מינימליים מ *t*.

iii. נריץ שוב את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת כל המסלולים המינימליים מקדקוד *t*. נשמור את כל הקשתות שמצאנו ב E_2

iv. נהפוך חזרה את כיווני הקשתות בגרף

v. נבצע עבור כל קשת $e = (u, v)$ בגרף:

a. אם $e \in (E - (E_1 \cup E_2))$ אז *e* היא צלע לא שימושית.

b. אם מתקיים ש: $d(s,u) + w(e) + d(v,t)$ הוא המרחק המינימלי שנמצא עד כה, אז נשמור את המסלול.

c. בסיום ריצת האלגוריתם המסלול שנשמר הוא המסלול הכמעט מזערי בין קדקוד מקור *s* לקודקוד יעד *t*.

הוכחת נכונות:

כמו שהוכחנו בסעיף ד' כל מסלול כמעט מזערי בנוי מרישא שהוא מזערי + צלע לא שימושית + סיפא שהוא מזערי. מנכונות דייקסטרה נובע כי האלגוריתם שתיארנו לעיל בהכרח ימצא בכל ריצה שלו את עץ המסלולים המזעריים המושרש ב *s*, עד לקשתות הלא שימושיות, ולכן בסופו של דבר נמצא את המסלול בעל המשקל המינימלי מבין כל המסלולים הגדולים ממשקל המסלול המינימלי, לכן נמצא מסלול כמעט מזערי אם קיים אחד כזה.

ניתוח זמן ריצה:

i. הרצת דייקסטרה $\theta(|E|\,log\,|V|)$

ii. היפוך קשתות $\theta(|E|)$

iii. הרצת דייקסטרה $\theta(|E|\,log\,|V|)$

iv. היפוך קשתות $\theta(|E|)$

v. מעבר על כל קשתות הגרף $\theta(|E|)$\

סה"כ זמן ריצה: $\boldsymbol{\theta(|E|\,log\,|V|)}$ כנדרש.

שרה שירי לנדאו
305362121

·תיאור אלג' – 5 נק'
·הוכחת נכונות – 5 נק'
***ניתוח זמן ריצה – 2 נק'**

שאלה 2

תיאור האלגוריתם:

נמצא את רכיבי הקשירות של העץ הפורש המינימלי הנתון T, לאחר הסרת הקשת *e. נמצא את הקשת המינימלית e המחברת בין רכיב הקשירות שמצאנו לרכיב קשירות השני שהוא שאר העץ T, ונוסיף אותה לעץ 'T (חייבת להיות קשת כזאת כי נתון ש 'G קשיר) . עפ"י משפט החתך (4.17) מובטח לנו שבכל עפמ כולל את הקשת e, וכך בדומה לאלגוריתם של קרוסקאל נוכיח כי 'T הוא עפמ עבור 'G.

שלבי האלגוריתם:

1. נסיר מ T את הקשת $e^* = (u,s)$
2. נפעיל BFS על צומת s של T, כדי לקבל את רכיב הקשירות שלו S. תוך כדי סימון במערך עבור כל צומת שאכן עברנו עליו והוא משויך לרכיב S.
3. נעבור על כל הקשתות $e = (x,y)$ ב 'G המקיימות $y \in S$ וגם $x \in (V-S)$ ונמצא קשת e בעלת משקל מינימלי מביניהן.
4. נוסיף את e ל T וכך נקבל את 'T המתוקן כנדרש.

הוכחת נכונות:

<u>טענה 1</u>: *לאחר הסרת הקשת *e מהעץ T נוצרים 2 בדיוק רכיבי קשירות שונים*

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי הגרף החדש T' נשאר קשיר, כלומר שיש קשת אחרת e' שיוצרת מסלול בין u ל s, אזי ב T קיים מעגל בסתירה לכך שנתון ש T הוא עץ. ולכן בהכרח נקבל 2 רכיבי קשירות .

<u>טענה 2</u>: *לאחר מציאת והוספת הקשת* e *ל* T *נקבל עץ מתוקן* 'T *שהוא עץ פורש עבור* 'G

<u>הוכחה</u>: רכיבי הקשירות שקיבלנו לאחר הרצת הסריקה לרוחב מכילים את כל הצמתים שמופיעים ב G', וכן את כל הקשתות המופיעות ב $\mathrm{T}-\{e^*\}$. ברור כי הוספת קשת שקודקוד אחד שלה נמצא ברכיב קשירות אחד וקודקוד שני שלה נמצא ברכיב קשירות זר לו – יוצר גרף פורש T'. נוכיח שהגרף שהתקבל הינו עץ:

- היות ושני רכיבי הקשירות היו מוכלים בעץ, ומהגדרת עץ אינם הכילו מעגלים, לכן הוספת קשת אחת ביניהם לא יוצרת מעגל חדש.
- בנוסף שני רכיבי הקשירות קשירים כל אחד ביחס לעצמו ובעת הוספנו קשת המקשרת ביניהם לכן הגרף שהתקבל הינו עץ פורש ל G'.

a
ההוכחה של טענה 3 לא נכונה

<u>טענה 3</u>: 'T *הינו עץ פורש מינימלי עבור* 'G

<u>הוכחה</u>: קיבלנו עץ פורש, ע"י הוספת הקשת המינימלית המחברת בין 2 רכיבי הקשירות S ו $(V-S)$. ברור שהקבוצה S אינה ריקה, היא מכילה לפחות את $\{s\}$ כמו"כ ברור שהיא אינה שווה ל G' בשלמותה. לכן עפ"י משפט 4.17 הקשת בעלת העלות המינימלית, שקצה אחד שלה נמצא ברכיב קשירות אחד והקצה השני שלה נמצא ברכיב השני - בהכרח תיכלל בכל עץ פורש מינימלי.

לצורך נוחות נסמן : $T_1 = S\,,\ T_2 = (V-S)$

נניח בשלילה כי $T' = T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$ אינו עץ פורש מינימלי, כלומר קיים עץ אחר $T'' = T_1'' \cup T_2'' \cup \{e''\}$ שהוא עץ פורש מינימלי של G', ומתקיים $w(T'') < w(T')$, ובהכרח משקל אחד מרכיבי הקשירות T_1, T_2 קטן בהתאמה ממשקל אחד מרכיבי הקשירות T_1'', T_2'' , בה"ה נניח כי שהוא מתקיים עבור T_1 אזי יתקבל השוויון הבא:

$$w(T'')=w(T_1'') + w(T_2'')+w(e) \leq w(T_1'') + w(T_2) + w(e) < w(T_1) + w(T_2) + w(e*) = w(T)$$

השוויון כאן לא נכון

בסתירה לכך ש T הוא עץ פורש מינימלי על G'.

מכאן ש T' הינו עץ פורש מינימלי על G' כנדרש.

שרה שירי לנדאו
305362121

ניתוח זמן ריצה:

1. הסרת הקשת $O(|E|)$
2. הפעלת BFS על T כדי לקבל את S $\theta(|E|+|V|)$. בגרפים קשירים מתקיים כי $|E| \geq |V|-1$, הגרף T במקור הוא קשיר כי נתון שהינו עפמ, בשלב זה לאחר הסרת $e*$ הוא כמעט קשיר - ובהוספת קשת אחת הוא יהיה קשיר. השוויון הנ"ל עדיין מתקיים וסה"כ זמן ריצת *BFS* על T הינו $O(|E|)$
3. מעבר על כל קשתות G' למציאת הקשת המינימלית העומדת בדרישות $O(|E|)$
4. הוספת הקשת לקבלת T' $O(1)$

סה"כ זמן ריצה: $\boldsymbol{O(|E|)}$ כנדרש.

שרה שירי לנדאו
305362121

שאלה 3

האלגוריתם החמדן בונה השמה אחד אחרי השני, לפי יתרון הרוב. בסוף יגיע המשתנה האחרון וייכשל כי ייצר השמה שהיא לא ספיקה, למרות שיתכן וקיימת השמה שהינה ספיקה עבור הנוסחה הנתונה.

נציג נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם החמדני ייכשל:

$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5 \wedge \varphi_6$

$\varphi_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_4$

$\varphi_2 = x_1 \vee x_3 \vee x_4$

$\varphi_3 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$

$\varphi_4 = x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4$

$\varphi_5 = x_4 \vee x_3 \vee \neg x_1$

$\varphi_6 = \neg x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_2$

האלגוריתם החמדן סורק את המשתנים, ובוחר השמה שממקסמת את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות. כך שבמקרה של הנוסחה לעיל, האלגוריתם יציב:

$x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \leftarrow x_4 \leftarrow T$

שבעקבותיהם מוגדרים:

$\neg x_1 \leftarrow \neg x_2 \leftarrow \neg x_3 \leftarrow \neg x_4 \leftarrow F$

ונקבל:

$$\boxed{T \wedge T \wedge T \wedge T \wedge T \wedge F = \boldsymbol{F}}$$

קיבלנו השמה לא מספקת, בעוד שקיימת השמה שהינה מספקת, לדוג':

$x_4 \leftarrow \boldsymbol{F}$

$x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \leftarrow \boldsymbol{T}$

שבעקבותיהם מוגדרים:

$\neg x_4 \leftarrow \boldsymbol{T}$

$\neg x_1 \leftarrow \neg x_2 \leftarrow \neg x_3 \leftarrow \boldsymbol{F}$

ונקבל:

$$\boxed{T \wedge T \wedge T \wedge T \wedge T \wedge T = \boldsymbol{T}}$$

קיבלנו שהנוסחה אכן ספיקה, ומכאן שהאלגוריתם החמדן למציאת השמה מספקת לנוסחת 3-CNF נכשל בעוד שהנוסחה ספיקה, **כנדרש**.

שרה שירי לנדאו
305362121

•רעיון הבניה – 3 נק'
•הוכחה מלאה – 0 נק'
a

שאלה 4

נוכיח שלכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות $f_1, f_2, \dots, f_n$ כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T .

יהי T עץ בינרי לחלוטין בעל n עלים. לכל עלה v_i נגדיר שכיחויות $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$.

נוכיח באינדוקציה על עומק העץ d שיש עץ הופמן לסדרת השכיחויות שהוא T עצמו.

בסיס האינדוקציה: כאשר $d = 0$, במצב כזה יש ב T עלה אחד, סדרת השכיחויות שלה הינה: $f_0 = \frac{1}{2^0} = 1$. עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו הוא גם בעל עלה אחד, הוא T עצמו. **מש"ל**.

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור עומק עץ d ונוכיח שהיא מתקיימת אף עבור d+1:

יהי T עץ בינרי לחלוטין, שעומקו הוא d+1 , לכן קיים לפחות צומת u אחד המקיים: $d(u) = d + 1$. ומכיוון ש T הינו עץ בינרי לחלוטין, לכן עפ"י תכונות עץ בינרי לחלוטין, בהכרח יש לצומת u את v שגם הוא עלה. גם עבור העלה v מתקיים $d(v) = d + 1$.

נבנה עץ חדש 'T שהוא שכפול העץ T ונבצע:

- כל עוד קיים צומת $u \in V_{T'}$ המקיים : $d(u) = d + 1$:
  - נמצא את אחיו $v \in V_{T'}$
  - נציב בצומת האב של u,v את סכום השכיחויות שלהם: $\frac{1}{2^{d+1}} + \frac{1}{2^{d+1}} = \frac{2}{2^{d+1}} = \frac{1}{2^d}$
  - נמחק את u,v מ 'T.

נקבל כי אבותיהם של כלל העלים האחים שמצאנו הם בעומק d, היות והבנים שלהם היו בעומק של d+1, ומצאנו שהשכיחות שלהם היא $\frac{1}{2^d}$, בהתאם לסדרת השכיחויות f_i. בנוסף נבחין כי בעת עומק העץ הוא d היות ומחקנו את האחים מהעץ ואיחדנו אותם לעומק d, כלומר הגענו לעץ 'T שהוא בינרי לחלוטין והוא בעומק d והוא מקיים את סדרת השכיחויות f , לכן עפ"י הנחת האינדוקציה יש עץ הופמן לסדרת השכיחויות f שהוא T' עצמו. בעת נבנה את T המקורי מ T' ע"י פעולות הפוכות שביצענו בבניית T' לעץ בעומק d ונקבל עץ הופמן תקין שהוא T עצמו ומתאים לסדרת השכיחויות f, **מש"ל**.