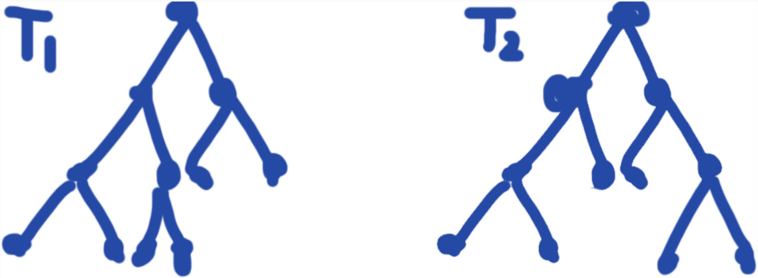
לפני הכל בואו נדבר על:

לפני הכל בואו נדבר על:

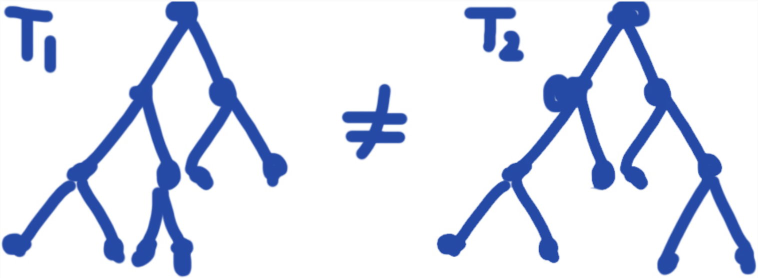
- משפט 4.17

לפני הכל בואו נדבר על:

- משפט 4.17
- הוכחה ע"י הרצה של אלגוריתם



T1
T2


T1
≠
T2

הפרד ומשול

מפגש 7

שבוע שעבר סיימנו

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא
  - מציאת עץ פורש מינימלי

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא
  - מציאת עץ פורש מינימלי
    - אלגוריתם של פרים

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא
  - מציאת עץ פורש מינימלי
    - אלגוריתם של פרים
    - האלגוריתם של קרוסקל

שבוע שעבר סיימנו

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא
  - מציאת עץ פורש מינימלי
    - אלגוריתם של פרים
    - האלגוריתם של קרוסקל
  - דחיסת נתונים - קידוד הופמן

התוכנית להיום

התוכנית להיום

- הצגת הרעיון של הפרד ומשול

התוכנית להיום

- הצגת הרעיון של הפרד ומשול
- בעיית פשוטה - מיון מיזוג

התוכנית להיום

- הצגת הרעיון של הפרד ומשול
- בעיית פשוטה - מיון מיזוג
- ספירת היפוכים בפרמוטציה

התוכנית להיום

- הצגת הרעיון של הפרד ומשול
- בעיית פשוטה - מיון מיזוג
- ספירת היפוכים בפרמוטציה
- הקדמה בנושא FFT

הפרד ומשול - הרעיון

הפרד ומשול - הרעיון

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות

הפרד ומשול - הרעיון

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות
- פתור כל תת בעיה רקורסיבית

הפרד ומשול - הרעיון

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות
- פתור כל תת בעיה רקורסיבית
- אחד את תתי הבעיות

הפרד ומשול - הרעיון

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות
- פתור כל תת בעיה רקורסיבית
- אחד את תתי הבעיות

הפרד ומשול - הרעיון

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות
- פתור כל תת בעיה רקורסיבית
- אחד את תתי הבעיות

בפרק זה אנחנו נעסוק בהרבה בעיות אשר אנו מכירים כבר אלגוריתמים יעילים עבורן (שרצים בזמן פולינומי). טכניקת הפרד ומשול תאפשר לנו לבנות אלגוריתם עם זמן ריצה טוב יותר.

דוגמא - מיון מיזוג

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל
  - נמיין רקורסיבית כל חצי

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל
  - נמיין רקורסיבית כל חצי
  - נאחד

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל
  - נמיין רקורסיבית כל חצי
  - נאחד
- חלוקה ואיחוד בזמן לינארי בגודל הקלט

דוגמא - מיון מיזוג

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל
  - נמיין רקורסיבית כל חצי
  - נאחד
- חלוקה ואיחוד בזמן לינארי בגודל הקלט
- נקבל זמן ריצה של:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

זמן הריצה יהיה $nlog(n)$

איך נאחד שני מערכים ממוינים? (בזמן לינארי)

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:
  - זמן ריצה $nlog(n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:
  - זמן ריצה $nlog(n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

  - זמן ריצה לוגרתמי

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

ניתוח זמן של נוסחאות נסיגה

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:
  - זמן ריצה $nlog(n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

  - זמן ריצה לוגרתמי

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

  - זמן ריצה מעריכי

$$T(n) = 2T(n-1) + cn$$

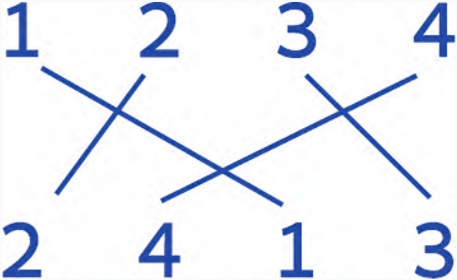
ספירת היפוכים בפרמוטציה

ספירת היפוכים בפרמוטציה

- בהינתן סידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ חשב כמה זוגות יש כך ש $i > j$ וגם $a_i < a_j$

ספירת היפוכים בפרמוטציה

- בהינתן סידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ חשב כמה זוגות יש כך ש $j > i$ וגם $a_i < a_j$
- בייצוג גרפי כמה חיתוכים על n מספרים



האלגוריתם

האלגוריתם

- אם הרשימה היא בגודל 1 - החזר אין היפוכים

האלגוריתם

- אם הרשימה היא בגודל 1 - החזר אין היפוכים
- חלק את הפרמוטציה לשני חלקים A, B

האלגוריתם

- אם הרשימה היא בגודל 1 - החזר אין היפוכים
- חלק את הפרמוטציה לשני חלקים A, B
- ספור היפוכים ומיין כל תת רשימה בצורה רקורסיבית

האלגוריתם

- אם הרשימה היא בגודל 1 - החזר אין היפוכים
- חלק את הפרמוטציה לשני חלקים A, B
- ספור היפוכים ומיין כל תת רשימה בצורה רקורסיבית
- אחד את התוצאות של A ו-B יחד עם מספר ההיפוכים בינהם.

דוגמת ריצה

ניתוח זמן ריצה

ניתוח זמן ריצה

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי

ניתוח זמן ריצה

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי
- ספירת היפוכים עבור חצי מערך - $T(\frac{n}{2})$

ניתוח זמן ריצה

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי
- ספירת היפוכים עבור חצי מערך - $T\left(\frac{n}{2}\right)$
- ספירת היפוכים בין שני החציים וסכימה יחד עם התוצאות של כל חצי - זמן לינארי

ניתוח זמן ריצה

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי
- ספירת היפוכים עבור חצי מערך - $T\left(\frac{n}{2}\right)$
- ספירת היפוכים בין שני החציים וסכימה יחד עם התוצאות של כל חצי - זמן לינארי

ניתוח זמן ריצה

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי
- ספירת היפוכים עבור חצי מערך - $T(\frac{n}{2})$
- ספירת היפוכים בין שני החציים וסכימה יחד עם התוצאות של כל חצי - זמן לינארי

סה"כ:

$$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) = nlog(n)$$

קונבולציה

קונבולציה

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית

קונבולציה

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית
- שימושי ב-

קונבולציה

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית
- שימושי ב-
  - עיבוד אותות

קונבולציה

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית
- שימושי ב-
  - עיבוד אותות
  - מכפלה מהירה של מספרים טבעיים גדולים

קונבולציה

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית
- שימושי ב-
  - עיבוד אותות
  - מכפלה מהירה של מספרים טבעיים גדולים
  - יצירת ממוצע נע (moving average)

קונבולוציה - בעצם אתם כבר מכירים את זה מכיתה ח׳

קונבולוציה - בעצם אתם כבר מכירים את זה מכיתה ח׳

- איך מכפילים שני פולינומים?

$$(4x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) =$$

קונבולוציה - בעצם אתם כבר מכירים את זה מכיתה ח'

- איך מכפילים שני פולינומים?

$$(4x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) =$$

קונבולוציה - בעצם אתם כבר מכירים את זה מכיתה ח'

- איך מכפילים שני פולינומים?

$$(4x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) =$$

$$4x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 3$$

- למעשה מה שעשיתם זה קונבולוציה למקדמי הפולינומים

קונבולוציה - הגדרה

קונבולוציה - הגדרה

- בהינתן שני וקטורים

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

$$B = (b_0, b_1, \dots, b_m)$$

קונבולוציה - הגדרה

- בהינתן שני וקטורים

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

$$B = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

- קונבולוציה של A עם B מסומנת ב: $A * B = C$

קונבולוציה - הגדרה

- בהינתן שני וקטורים

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

$$B = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

- קונבולוציה של A עם B מסומנת ב: $A * B = C$
- עבור וקטור C באורך $m + n + 1$ המוגדר כך:

$$c_i = \sum_{j,k:j+k=i} a_j \cdot b_k$$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (\quad, \quad, \quad\quad, \quad, \quad)$$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (\quad,\quad,\quad\quad,\quad,\quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, \quad , \quad , \quad , \quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, \quad , \quad\quad , \quad , \quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$
- $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, 7, \quad, \quad, \quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$
- $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, 7, \quad , \quad , \quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$
- $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$
- $c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, 7, 12, \quad , \quad)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$
- $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$
- $c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2$

דוגמא

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, 7, 12, 7, 4)$$

- $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2$
- $c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$
- $c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2$

קונובולוציה - זה בעצם שקול להכפלת שני פולינומים

קונובולוציה - זה בעצם שקול להכפלת שני פולינומים

- בדוגמא הקודמת:

$$(1,3,4) \to 4x^2 + 3x + 1$$

$$(2,1,1) \to x^2 + x + 2$$

קונובולוציה - זה בעצם שקול להכפלת שני פולינומים

- בדוגמא הקודמת:

$$(1,3,4) \to 4x^2+3x+1$$

$$(2,1,1) \to x^2+x+2$$

- $(1,3,4)*(2,1,1) \to (4x^2+3x+1)\cdot(x^2+x+2) =$

$$4x^4+7x^3+12x^2+7x+2 \to (2,7,12,7,4)$$

הכפלת שני פולינומים

הכפלת שני פולינומים

- נגביל את הבעיה למקרה בו שני הפולינומים מאותו סדר, כלומר m=n (אחרת פשוט אפשר להוסיף אפסים)

הכפלת שני פולינומים

- נגביל את הבעיה למקרה בו שני הפולינומים מאותו סדר, כלומר $m=n$ (אחרת פשוט אפשר להוסיף אפסים)
- מה זמן הריצה להכפלת שני פולינומים מסדר n?

הכפלת שני פולינומים

- נגביל את הבעיה למקרה בו שני הפולינומים מאותו סדר, כלומר $m=n$ (אחרת פשוט אפשר להוסיף אפסים)
- מה זמן הריצה להכפלת שני פולינומים מסדר n?
- האם אפשר לעשות את זה בזמן טוב יותר?

ייצוג פולינומים

בהינתן פולינום מדרגה m ניתן לייצג אותו:

ייצוג פולינומים

בהינתן פולינום מדרגה n ניתן לייצג אותו:

- ע"י $n+1$ מקדמים

ייצוג פולינומים

בהינתן פולינום מדרגה n ניתן לייצג אותו:

- ע"י $n+1$ מקדמים
- ע"י $n+1$ נקודות

ייצוג פולינומים

בהינתן פולינום מדרגה n ניתן לייצג אותו:

- ע"י $n+1$ מקדמים
- ע"י $n+1$ נקודות

ייצוג פולינומים

בהינתן פולינום מדרגה n ניתן לייצג אותו:

- ע"י $n+1$ מקדמים
- ע"י $n+1$ נקודות

המשפט היסודי של האלגברה: דרך $n+1$ נקודות עובר פולינום יחיד ממעלה n

ההבדלים בין הייצוגים

ההבדלים בין הייצוגים

- קבלת הערך בנקודה

ההבדלים בין הייצוגים

- קבלת הערך בנקודה
- מכפלת שני פולינומים

ההבדלים בין הייצוגים

- קבלת הערך בנקודה
- מכפלת שני פולינומים

ההבדלים בין הייצוגים

- קבלת הערך בנקודה
- מכפלת שני פולינומים
  - בייצוג מקדמים - דורש זמן ריבועי

ההבדלים בין הייצוגים

- קבלת הערך בנקודה
- מכפלת שני פולינומים
  - בייצוג מקדמים - דורש זמן ריבועי
  - בייצוג בנקודות - אם יש לנו $2n+1$ נקודות של כל פולינום ניתן לחשב בזמן לינארי

דוגמא

דוגמא

- $(1,1,1) * (1,0,2) =$

דוגמא

- $(1,1,1) * (1,0,2) =$
- $(x^2+x+1)\cdot(2x^2+1) = x^4+x^3+3x^2+2x+2 = (2,2,3,1,1)$

דוגמא

- $(1,1,1) * (1,0,2) =$
- $(x^2+x+1)\cdot(2x^2+1) = x^4+x^3+3x^2+2x+2 = (2,2,3,1,1)$
-

דוגמא

- $(1,1,1)*(1,0,2)=$
- $(x^2+x+1)\cdot(2x^2+1)=x^4+x^3+3x^2+2x+2=(2,2,3,1,1)$
-
-