פתרון מטלת מנחה 13

20417, אלגוריתמים. 2020ב

אור חליפה ת.ז: 325373959

שאלה 1:

סעיף א':

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

הצגה כוקטור $(-1,-3,2,1)$ ושורש יחידה פרימיטיבי $w = i$

נקבל:

$$(-1,2) \qquad P_{even}(x^2) = -1 + 2x = 2x - 1$$

$$(-3,1) \qquad P_{odd}(x^2) = -3 + 1 \cdot x = x - 3$$

כך שמתקיים:

$$P(x) = P_{even}(x^2) + x P_{odd}(x^2)$$

$$P_{even}(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad P_{odd}(1) = 1 - 3 = -2$$

$$P_{even}(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \qquad P_{odd}(-1) = -1 - 3 = -4$$

$$p((i)^0) = p(1) = P_{even}(1) + 1 P_{odd}(1) = 1 + 1 \cdot (-2) = -1$$

$$p((i)^1) = p(i) = P_{even}(-1) + i P_{odd}(-1) = -3 + i(-4) = -3 - 4i$$

$$p((i)^2) = p(-1) = P_{even}(1) + (-1) P_{odd}(1) = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$p((i)^3) = p(-i) = P_{even}(-1) + (-i) P_{odd}(-1) = -3 - i(-4) = -3 + 4i$$

ולכן התוצאה היא: $(-1, -3-4i, 3, -3+4i)$

סעיף ב:

הוקטור מסודר כך הוא $(-1, -3-4i, 3, -3+4i)$

ו- $w = i \Leftarrow w^{-1} = (i)^{-1} = -i$

נפצל: $(-3-4i, -3+4i)$ $\quad$ $(-1, 3)$

$P_{odd}(x) = -3-4i + (-3+4i)x$ $\quad$ $P_{even}(x) = -1 + 3x = 3x - 1$

$P_{odd}(1) = -3-4i-3+4i = -6$ $\quad$ $P_{even}(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$P_{odd}(-1) = -3-4i+3-4i = -8i$ $\quad$ $P_{even}(-1) = 3(-1) - 1 = -4$

$$P((-i)^0) = P(1) = P_{even}(1) + 1P_{odd}(1) = 2 + 1 \cdot (-6) = -4$$
$$P((-i)^1) = P(-i) = P_{even}(-1) - i P_{odd}(-1) = -4 - i(-8i) = -12$$
$$P((i)^2) = P(-1) = P_{even}(1) - 1P_{odd}(1) = 2 - 1 \cdot (-6) = 8$$
$$P((i)^3) = P(i) = P_{even}(-1) + i P_{odd}(-1) = -4 + i(-8i) = 4$$

ולכן התוצאה היא $(-4, -12, 8, 4)$ נחלק ב- $n=4$ ונקבל את הוקטור המקורי $(-1, -3, 2, 1)$

עכשיו ניתן לחזור לפונקציה:

$$1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + (-3) \cdot x^1 + (-1) \cdot x^0 = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

תשובה לא מלאה. צריך לפרט מי הפולינומים הנ"ל.

0/30

שאלה 2:

אלגוריתם:

1. המר את המספרים לבסיס 2.
2. הפעל אלגוריתם FFT על שני הפולינומים שבדיוק להכפיל
3. הפעל אלגוריתם inverse-FFT על שני הוקטורים שהתקבלו מסעיף (2).
4. המר את התוצאה מסעיף (3) חזרה לבסיס 10 ואחזר את התוצאה.

הוכחת נכונות:

נכונות האלגוריתם נשענת על נכונות האלגוריתמים: FFT, inverse FFT, המרה לבסיס 2, המרה לבסיס 10.

ניתוח זמן ריצה:

שלבים 1 ו-4 המרות מבסיס 10 ל-2 ומבסיס 2 ל-10 אורכות $\Theta(n)$

שלבים 2 ו-3, הרצת FFT, לפי הנתון, על בלוקים $(\frac{n}{k})$ הוא $\Theta(\frac{n}{k}\lg\frac{n}{k})$ ועלות ההכפלות $\Theta(k^2)$.

מאחר $k=\lg n$ ואז:

$$\Theta(k^2\frac{n}{k}\lg\frac{n}{k}) = \Theta(\frac{(n\lg n)^2}{\lg n}\lg\frac{n}{\lg n}) = \Theta(n\lg n\cdot\lg\frac{n}{\lg n}) =$$

$$= \Theta(n\lg n\cdot n(\lg n-\lg\lg n)) = \Theta(\lg n\cdot n\lg n) = \Theta(n\lg^2 n)$$

כנדרש.

השתמשתי בחוקי לוגריתמים.

שאלה 3:

האלגוריתם:

לפי הנוסחה לנגזרת הנקודה אגדיר 2 וקטורים: (x היא הנקודה הנתונה ו- $a_n, \dots, a_0$ המקדמים, n דרגת הפולינום).

$$A = (n!\,a_n,\ (n-1)!\,a_n,\ \dots,\ 0!\,a_0)$$

$$B = \left(\frac{x^0}{0!},\ \frac{x^1}{1!},\ \frac{x^2}{2!},\ \dots,\ \frac{x^n}{n!}\right)$$

ואז: $f^{(c)}$ היא האיבר במקום c באלגוריתם FFT שיופעל על $A \cdot B$

במקום ה-n-c ולא במקום ה-c

```
d ← 1
e ← 1
for i ← 0,...,n do:
        A_{n-i} ← e·a_i
        B_i ← d/s
        s ← s(i+1)
        k ← k·x
f ← run FFT(A·B)
for k ← 0,...,n do:
        Print f^(k)(f_{n-k}·x)
```

יש פה בלבול באינדקסים
s זה e
ו-k זה a_i

FFT
לא עובד ככה
צריך להריץ על כל וקטור בנפרד ואז לעשות הפוך
על מנת לקבל את פולינום ההכפלה

הוכחת נכונות:

נכונות האלגוריתם נשענת על הנוסחה לנגזרת הנקודה ושימוש אלגוריתם FFT להכפלת וקטורים.

ניתוח זמן ריצה: FFT דורש $\Theta(n \lg n)$ ויצירת A ו- B דורשים $O(n)$ באופן טריוויאלי. הדפסת הפלט תעבור על כל n הנגזרות בווקטור ומדפיס אותם לכן $O(n)$ וסך הכל $\Theta(n \lg n)$, כנדרש.

שאלה 4:

בניגוד לאלגוריתם המוצג בשאלה, אלגוריתם המימוש הישיר פועל ב- $\Theta(n^3)$ עבור 4 תתי מטריצות מסדר $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}$, כמו שמוסבר בשאלה.
שעולים בכל שלב האלגוריתם על מטריצה
דבר זה דורש 8 קריאות רקורסיביות ואז ניתן והיה לקבל עם תשובה לפי שיטת האב את היעילות, $\Theta(n^3)=\Theta(n^{\log_2 8})$.

האלגוריתם בשאלה, מה שהתבקשתי להוכיח, לא משתמש ב- 8 קריאות רקורסיביות אלא רק ב-7 וב- 18 פעולות חיבור וחיסור הנמצאות ב P_1-P_7 וב- $V-S$ המופיעים בשאלה.

כעת, נחשב עם שיטת האב ונקבל סיבוכיות שונה:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18n^2 = \Theta(n^{\log_2 7})$$

מ.ש.ל.