בעיית העץ הפורש המינימאלי (MST)

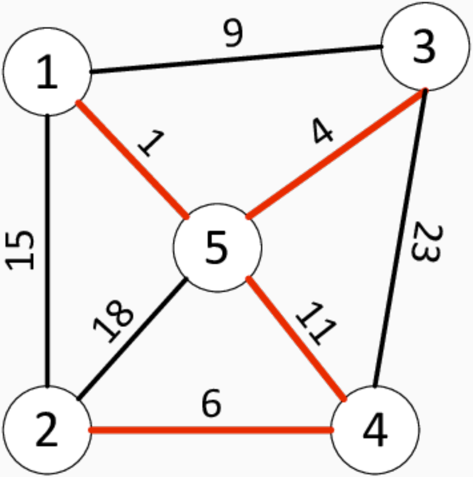
מפגש 5

שבוע שעבר ראינו

- מסלולים קלים ביותר
- אלגוריתם גנרי
- אלגוריתם דייקסטרא

התוכנית להיום

- בעיית עץ הפורש המינימלי
  - הגדרות
  - שאלות
  - אלגוריתם של פרים
  - האלגוריתם של קרוסקל


9
1
3
1
4
15
5
23
18
11
6
2
4

חלק I

הגדרות ומשפטים

עץ פורש - הגדרה

עץ פורש עץ פורש של גרף קשיר $G = (V, E)$ הוא תת-גרף $T = (V, E_T)$ של G שמכיל את כל קדקודי G וחלק מצלעותיו (כלומר $E_T \subseteq E$), והוא מקיים:

1. T חסר מעגלים.
2. T קשיר (כלומר לכל שני קודקודים קיים מסלול המקשר ביניהם).

משפט 1

יהי H גרף (פשוט ולא מכוון). התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. H קשיר וחסר מעגלים,
2. H חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$,
3. H קשיר ו-$|E| = |V| - 1$
4. יש ב-H מסלול פשוט יחיד בין כל זוג צמתים.

כדי להוכיח שתת הגרף $T = (V, E_T)$ של הגרף $G = (V, E)$ הוא עץ פורש של G, מספיק להראות שאחד מהתנאים הנ"ל מתקיים.

משפט 2

יהי

- G גרף,
- $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G
- ו- $E \setminus E_T$ $e \in$.

הגרף $H = (V, E_T \cup \{e\})$ מכיל מעגל ולכל צלע $e' \in E_T$ במעגל,
הגרף $T' = (V, (E_T \cup \{e\}) \setminus \{e'\})$ הוא עץ פורש של G.

הוכחה

הגדרות משקול של עץ פורש

- **עלות של עץ פורש** בהינתן גרף $G = (V, E)$ ופונקצית משקל $w : E \to \mathbb{R}$, נגדיר **עלות** של עץ פורש T להיות סך המשקלות של כל צלעותיו, כלומר $w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$.
- **עץ פורש מינימאלי (MST)** של גרף G הוא עץ פורש שעלותו מינימאלית מבין כל עלויות העצים הפורשים את G, כלומר נבקש למצוא עץ פורש T כך ש :

$$w(T) = min_{\tilde{T} \text{ is a spanning tree}} \{w(\tilde{T})\}$$

.

- **הערה-** עץ פורש מינימאלי אינו בהכרח יחיד. יתכנו כמה כאלו, אבל לכולם, כמובן, אותו משקל.

חלק II

שאלות

לכל השאלות היום במפגש נתון לנו גרף לא מכוון וקשיר
$G = (V, E)$ ופונקציית משקל על קשתות הגרף $w : E \to \mathbb{R}$.

שאלה 1:

יהי $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w .
נגדיר את w' להיות פונקצית משקל באופן הבא:
$w'(e) = w(e) + c$, כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו.
האם T הוא עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w'?

שאלה 2

מצא עץ פורש מקסימלי של G.

אלגוריתמים למציאת MST

- **האלגוריתם של פרים:** מצמח עץ מתוך קודקוד כלשהו. בכל שלב מתקדם ע"י בחירת צלע קלה ביותר.
- **האלגוריתם של קרוסקל:** מצמח יער פורש. בכל שלב נבחרת קשת קלה ביותר.

חלק III

האלגוריתם של פרים

האלגוריתם של פרים

- **מופע:** $G = (V, E, w)$ לא מכוון וקשיר.
- **אתחול:** יהי r קודקוד בגרף
  - $S \leftarrow \{r\}$ (קבוצת הקודקודים בגרף)
  - $B \leftarrow \emptyset$ (קבוצת הצלעות בגרף)
- **צעד:** כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
  - בחר צלע קלה ביותר $e = (u, v)$ $\quad$ $u \in S$ $v \in V - S$ (e צלע קלה ביותר בחתך)
  - $S \leftarrow S \cup \{v\}$
  - $B \leftarrow B \cup \{e\}$
- **סיום:** החזר (S, B).

דוגמת ריצה על הלוח והוכחת נכונות

חלק IV

האלגוריתם של קרוסקל

האלגוריתם של קרוסקל

- **מופע:** $G = (V, E, w)$ לא מכוון וקשיר.
- **אתחול:**
  - $C \leftarrow E$ (קבוצת הצלעות שתרם עברנו עליהם בגרף)
  - $B \leftarrow \emptyset$ (קבוצת הצלעות ביער)
- **צעד:** כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
  - בחר צלע קלה ביותר $e \in C$
  - $C \leftarrow C - \{e\}$
  - אם e לא סוגרת מעגל עם (V, B) אז $B \leftarrow B \cup \{e\}$
- **סיום:** החזר (V, B).

דוגמת ריצה על הלוח והוכחת נכונות