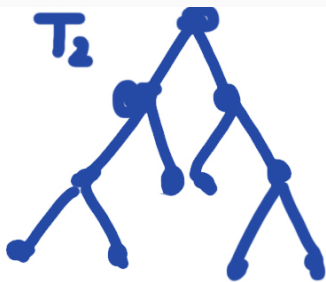
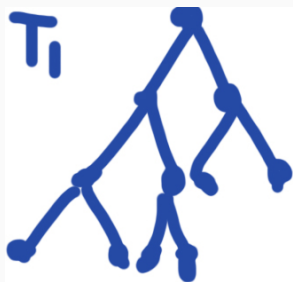
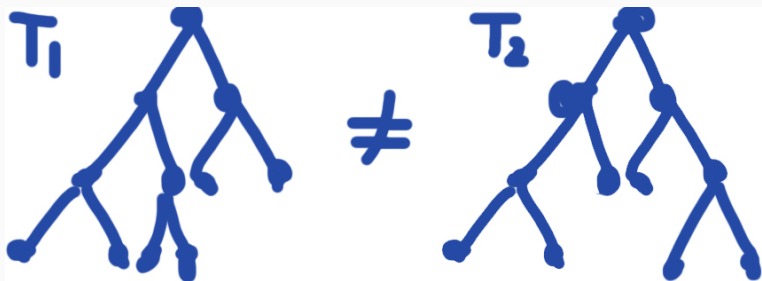


- משפט 4.17
- הוכחה ע"י הרצה של אלגוריתם





# הפרד ומשול

מפגש 7

---

- פרק של אלגוריתמים חמדניים
  - מסלול קל ביותר - האלגוריתם של דייקסטרא
  - מציאת עץ פורש מינימלי
    - אלגוריתם של פרים
    - האלגוריתם של קרוסקל
  - דחיסת נתונים - קידוד הופמן

- הצגת הרעיון של הפרד ומשול
- בעיית פשוטה - מיון מיזוג
- ספירת היפוכים בפרמוטציה
- הקדמה בנושא FFT

- חלק את הבעיה ל-2 בעיות
- פתור כל תת בעיה רקורסיבית
- אחד את תתי הבעיות

בפרק זה אנחנו נעסוק בהרבה בעיות אשר אנו מכירים כבר אלגוריתמים יעילים עבורן (שרצים בזמן פולינומי). טכניקת הפרד ומשול תאפשר לנו לבנות אלגוריתם עם זמן ריצה טוב יותר.

- הבעיה: יש למיין מערך
- פתרון:
  - נחלק מערך לשתי מערכים שווי גודל
  - נמיין רקורסיבית כל חצי
  - נאחד
- חלוקה ואיחוד בזמן לינארי בגודל הקלט
- נקבל זמן ריצה של:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

זמן הריצה יהיה  $n \log(n)$



## איך נאחד שני מערכים ממיונים? (בזמן לינארי)

- ניתן לחשב נוסחאות נסיגה ע"י אינדוקציה או הצבה (הסבר במבוא של פרק 5 בספר למי שרוצה להזכר)
- כמה נוסחאות נסיגה שצריך להכיר:  
 $n \log(n)$  זמן ריצה •

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

- זמן ריצה לוגריתמי

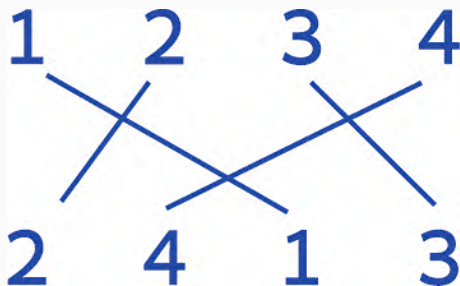
$$T(n) = T(n/2) + 1$$

- זמן ריצה מעריכי

$$T(n) = 2T(n-1) + cn$$

- בהינתן סידרה  $a_1, a_2, \dots, a_n$  חשב כמה זוגות יש כך ש  $i > j$  וגם  $a_i < a_j$

- בייצוג גרפי כמה חיתוכים על  $n$  מספרים



- אם הרשימה היא בגודל 1 - החזר אין היפוכים
- חלק את הפרמוטציה לשני חלקים  $A, B$
- ספור היפוכים ומיין כל תת רשימה בצורה רקורסיבית
- אחד את התוצאות של  $A$  ו- $B$  יחד עם מספר ההיפוכים ביניהם.

## דוגמת ריצה

---

- חלוקה לשני חלקים - זמן לינארי
- ספירת היפוכים עבור חצי מערך -  $T(\frac{n}{2})$
- ספירת היפוכים בין שני החציים וסכימה יחד עם התוצאות של כל חצי - זמן לינארי

סה"כ:

$$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + O(n) = n \log(n)$$

- פעולה על שני וקטורים בדומה לחיבור, חיסור, כפל מטריצות או מכפלה פנימית
- שימושי ב-
  - עיבוד אותות
  - מכפלה מהירה של מספרים טבעיים גדולים
  - יצירת ממוצע נע (moving average)

• איך מכפילים שני פולינומים?

$$(4x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) =$$

$$4x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 2$$

• למעשה מה שעשיתם זה קונבולוציה למקדמי הפולינומים



- בהינתן שני וקטורים

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

$$B = (b_0, b_1, \dots, b_m)$$

- קונבולוציה של  $A$  עם  $B$  מסומנת ב:  $A * B = C$
- עבור וקטור  $C$  באורך  $1 + n + m$  המוגדר כך:

$$c_i = \sum_{j,k:j+k=i} a_j \cdot b_k$$

$$(a_0, a_1, a_2) * (b_0, b_1, b_2) = (1, 3, 4) * (2, 1, 1) = (2, 7, 12, 7, 4)$$

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 2 \cdot$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot$$

$$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot$$

• בדוגמא הקודמת:

$$(1, 3, 4) \rightarrow 4x^2 + 3x + 1$$

$$(2, 1, 1) \rightarrow x^2 + x + 2$$

$$(1, 3, 4) * (2, 1, 1) \rightarrow (4x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) = \bullet$$

$$4x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 2 \rightarrow (2, 7, 12, 7, 4)$$

- נגביל את הבעיה למקרה בו שני הפולינומים מאותו סדר, כלומר  $m=n$  (אחרת פשוט אפשר להוסיף אפסים)
- מה זמן הריצה להכפלת שני פולינומים מסדר  $n$ ?
- האם אפשר לעשות את זה בזמן טוב יותר?

בהינתן פולינום מדרגה  $n$  ניתן לייצג אותו:

- ע"י  $n + 1$  מקדמים

- ע"י  $n + 1$  נקודות

**המשפט היסודי של האלגברה:** דרך  $n + 1$  נקודות עובר פולינום יחיד ממעלה  $n$

- קבלת הערך בנקודה
- מכפלת שני פולינומים
- בייצוג מקדמים - דורש זמן ריבועי
- בייצוג בנקודות - אם יש לנו  $2n + 1$  נקודות של כל פולינום ניתן לחשב בזמן לינארי

$$(1, 1, 1) * (2, 0, 1) = \bullet$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 2) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (2, 2, 3, 1, 1) \bullet$$

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_1(x) \cdot p_2(x)$
0	1	2	2
1	3	3	9
2	7	6	42
3	13	11	143
4	21	18	378

• מכפלת הערכים:

- **מעבר מייצוג מקדמים לייצוג בנקודות** נתון הפולינום  $(3, 1, 2)$  בייצוג מקדמים. חשבו אותו
  - **מעבר מייצוג בנקודות לייצוג מקדמים** חשבו את מקדמי הפולינום אשר יצוג הערכים שלו באותם בנקודות  $(0, 1, 2)$  הוא  $(1, 3, 7)$
- נבחין שזמן הריצה של כל אחד מהמעברים האלה הוא  $\Theta(n^2)$



על מנת לחשב את  $C = A * B$

1. נחשב את  $A$  ו- $B$  ב- $2n$  נקודות

2. נכפול נקודתית את ערכי  $A$  ו- $B$

3. נחשב את מקדמי הפולינום  $C$  מתוך הנקודות

כיצד נעבור מייצוג לייצוג בצורה יעילה? (מהירה יותר מ- $\Theta(n^2)$ ).

- באמצעות שיטת הפרד ומשול
- פשוט נחלק באמצע האם זה יעבוד?