2. א. נחלק את הקלטים לבלוקים מגודל k סיביות $O(n)$:

$$a = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} a_i 2^{ik} \qquad b = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} b_i 2^{ik}$$

ב. נבצע FFT על הפולינומים המתאימים

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} a_i x^i \qquad b(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} b_i x^i$$

ב-$\frac{2n}{k}$ שורשי יחידה.

נחשב את הסיבוכיות של אלג' זה: נסמן $m = \frac{n}{k}$, אזי עלינו לחשב את $a(x)$ ו-$b(x)$ ב-$\frac{2n}{k}$ שורשים ←

$$T(m) = 2T\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{2n}{k}\Theta(k^2)$$
$$= 2T\left(\frac{m}{2}\right) + \Theta(nk^2)$$

$T\left(\frac{n}{k}\right) = 2T\left(\frac{n}{2k}\right)$

נבדוק האם $\Theta(nk^2)$ הוא זמן הריצה: שיטת ההצבה ←

$$T(m) \le 2\frac{m}{2}k^2 + \Theta(nk^2) = \Theta(nk^2)$$

שאלה: שיטת ההצבה עובדת גם על המקרה שבו $T(m) = 4T\left(\frac{m}{2}\right) + \Theta(n)$, ונניח ש $T(2) = c_1$ במקרה זה נשים לב אזי, מה מונע ממני להגיד ש-

$$T(m) = 4\frac{n}{2}(\log n - 1) + O(n) = 2n\log n - 2n + c_1 n = \Theta(n\log n)$$

שהרי בספר כתוב בפירוש שזה לא נכון

למרות שזה לא נכון, $T(m) = \Theta(n\log n)$ הנחה שגויה

ג. נכפיל את הסיבוכיות שקיבלנו ← $\Theta(nk) = \frac{2n}{k} \cdot k^2 = 2nk$

ד. נבצע inverse FFT על $\frac{2n}{k}$ הנקודות שיש ברשותנו ←

$\Theta(nk) = \Theta(nk^2)$ גם בזמן

ה. נמצא את ערך המקדמים בנקודה 2^k, בזמן $\Theta(nk) = \Theta\left(\frac{2n}{k}k^2\right)$

לפי חישובים המופיעים לעיל, ניתן לבצע את האלג' ב-$\Theta(nk)$, כלומר $\Theta(n\log n)$. איפה הטעות שלי?

לשמחתי לקחתי והסתכלתי על הפתרון, מה הטעות וכיצד מתקנים. (מה הדרך הנכונה לכתוב) תודה!

לפי שיטת האב המוכחת הזמן הוא $\Theta(nk^2)$, עבור $k = \log n$, אבל לפי שיטת ההצבה זה שונה.

4. לפי סעיף ב' האלג' צריך לבצע 7 פעולות כפל ולמספר קבוע של פעולות חיבור/חיסור, כלומר

של מטריצות בגודל $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + c(n^2)$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 7})$$

לפי מקרה 1 של שיטת האב

1.א.

$w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$

1. FFT((-1, -3, 2, 1), i)

1.1 FFT((-1, 2), -1)

1.1.1 → FFT((-1), 1) = -1

1.1.2 → FFT(2, 1) = 2

return(-1 - 1·2, -1 + 1·2) = (-3, 1)

1.2 FFT((-3, 1), -1)

1.2.1 → FFT(-3, -1) = -3

1.2.2 → FFT(1, -1) = 1

return(-4, -2)

$p(1) = 1 + 1\cdot(-2) = -1$ $\quad p(i) = -3 - 4i$

$p(-1) = 1 + (-1)(-2) = 3$ $\quad p(-i) = -3 + 4i$

return(-1, -3-4i, 3, -3+4i)

2. FFT((-1, -3-4i, 3, -3+4i), -i) .2

2.1 FFT((-1, 3), -1)

2.1.1 → FFT(-1, +1) = -1

2.1.2 → FFT(3, +1) = 3

return(-1-3, -1+3) = (-4, 2)

2.2 FFT((-3-4i, -3+4i), -1)

2.2.1 FFT(-3-4i, 1) = -3-4i

2.2.2 FFT(-3+4i, 1) = -3+4i

return(-8i, -6)

return$(-4, -4 + 8\cdot i^2, 2+6, -4+8) = (-4, -12, 8, 4)$

שבנו, הקסם ועם המקדמי· 4, כערכם.

3. נגדיר את הווקטורים הבאים -

$$A = (n!\,a_n, \; \ldots \ldots \; 2!\,a_2, \; 1!\,a_1, \; 0!\,a_0)$$

$$B = \left(\frac{x_0^0}{0!}, \; \frac{x_0}{1!} \; \ldots \ldots \; \frac{x_0^n}{n!}\right)$$

ע"י FFT על הווקטורים ונקבל ב $n\log n$ את מקדמי הפולינום המכפלה C.

אם נרצה, נחשב את ערך הנגזרת ה k-ית ←

$$\sum_{i+j=n-k} A_i B_j =$$ המקדם במקום ה $n-k$ (מכפלת מקדמים!) הנגזרת

$$= n!\,a_n \frac{x_0^{n-k}}{(n-k)!} + a_{n-1} \frac{(n-1)!\,x_0^{n-k-1}}{(n-k-1)!} + \ldots + \ldots + (n-k)!\,a_{n-k}$$

$$= (n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n\,a_n x_0^{n-k}$$

$$+ (n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)\,a_{n-1} x_0^{n-k-1}$$

$$+ \ldots \ldots + (n-k)!\,a_{n-k} = f^{k}(x_0)$$