ממ"ן 14 — 20/40 — ירדן שפיגלמן
200433332

① רעיון האלגוריתם:

נגדיר שריג עזר שישמש אותנו למציאת המסלול המינימלי (המקסימלי) עד כל נקודה בשריג.
נמלא את שריג העזר באופן הבא -

- אם אנחנו ב-$j=1$ (השורה העליונה ביותר) בכל קודקוד יהיה הסכום של ערך הקודקוד באותו מיקום בשריג המקורי + מינימום בין הערכים שב-$(i-1,1)$ לבין $(i-1,2)$. (מכיוון שניתן להגיע לקודקוד הזה ע"י הליכה מהשכבה הקודמת "ימינה למעלה" או "ימינה").
- באופן סימטרי אם אנחנו ב-$j=n$ (השורה התחתונה ביותר), נדרש לערך הקודקוד את הקטן מבין הערכים שב-$(i-1,n)$ ו-$(i-1,n-1)$.
- בכל שאר השורות - נדרש לסכום את הקטן מבין $(i-1,j+1)$, $(i-1,j)$, $(i-1,j-1)$.

לאחר ששריג העזר מלא, נמצא את הערך המינימלי בין כל הערכים בשכבה ה-n ושם יהיה ערך המסלול המינימלי. הערה: השכבה הראשונה זהה בין השריגים.

האלגוריתם

נקרא לשריג המקורי OG ולשריג העזר PATH. נמלא את שריג העזר -

השריג המקורי הוא C

```
for i←1 to n do
    for j←1 to n do
        if (i=1)
        PATH(i,j) = OG(i,j)
        else if (j=1)
        PATH = OG(i,j) + min{PATH(i-1,j), PATH(i-1,j+1)}
        else if (j=n)
        PATH = OG(i,j) + min{PATH(i-1,j), PATH(i-1,j-1)}
        else
        PATH = OG(i,j) + min{PATH(i-1,j-1), PATH(i-1,j), PATH(i-1,j+1)}

return min{PATH(n,1), PATH(n,2), ..., PATH(n,n)}
```

הוחזר ערך המסלול ולא המסלול עצמו כפי שנדרש -10

נכונות האלגוריתם

השכבה הראשונה בשריג העזר מורכבת השכבה הראשונה בשריג המקורי (כי אין דרך "להגיע" לערכים אלו, יש רק אופציה אחת כי זו השכבה הראשונה ואין דרכים ללכת אליה). לאחר מכן בכל תא/קודקוד מודגשת העלות המינימלית של המסלול שעובר דרך קודקוד זה מכיוון שאנו בוחרים להגיע לקודקוד זה באופן המינימלי - אנחנו יודעים את הערכים בשכבה הקודמת ולכן נבחר את הצעד המינימלי מבין האפשרויות שעומדות לנו.

לבסוף לאחר האיטרציה האחרונה של הלולאה המקוננת, עבור כל קודקוד בשכבה n נדע את המחיר המינימלי משכבה 1 אליו. המחיר המינימלי מבין קודקודים אלו יהיה המסלול המבוקש.

זוהי לא הוכחה פורמלית, צריך להוכיח בצורה יותר מפורטת למשל באינדוקציה

סיבוכיות זמן ריצה

מכיוון שיש לנו לולאה מקוננת ישנן n^2 איטרציות שלה, ובכל אחת מהן (למעט בשכבה הראשונה) נערכות 2 או 3 השוואות, ולאחר מכן פעולת חיבור ואז השמה - כלומר מספר קבוע של פעולות. בשכבה הראשונה נערכת רק פעולת השמה - גם כן מס' קבוע של פעולות (פעולה אחת). לכן בחלק זה של האלגוריתם יש $\Theta(n^2)$ פעולות. פעולת ההשוואה של ערכי השכבה האחרונה היא בעלות $\Theta(n)$.

לכן סה"כ ישנן $\Theta(n^2)$ פעולות כנדרש.

שאלה 4 -

10/20

א) האלגוריתם מאחסן ב-A את המשקל המינימלי של מסלול מקודקוד נתון לכל שאר הקודקודים בגרף.

הוכחה באינדוקציה על מספר האיטרציות של הלולאה החיצונית.

נרצה להוכיח כי בסוף האיטרציה ה-i של הלולאה החיצונית, $A[v]$ (עבור כל $v \in V$) ימצא באחד משני מצבים -

- $A[v]=x$, (x מס׳ סופי). כלומר x היא עלותו של המסלול ה-i-נגיש מ-r ל-v והוא מינימלית ביחס לשאר העלויות של מסלולים i-נגישים מ-r ל-v.
- $A[v]=\infty$ - אין מסלול i נגיש מ-r ל-v.

- בסיס האינדוקציה - $i=0$ (לפני האיטרציה הראשונה) כל הערכים ב-A מאותחלים ל-∞ מלבד $A[r]$ שמאותחל ל-0, ואכן 0 היא העלות המינימלית של מסלול מ-r לעצמו.

- צעד האינדוקציה - נניח שהטענה מתקיימת עבור $i=n$. עבור $i=n+1$ -
נניח בשלילה שהנחת האינדוקציה לא מתקיימת עבור $i=n+1$. כלומר -

- $A[v]=x$ אך x אינה עלות מינימלית של מסלול $n+1$ נגיש מ-r ל-v. כלומר, ישנו מסלול מ-r ל-v שהינו $n+1$ נגיש אך עלותו קטנה מ-x. נניח שישנה קשת (u,v) לפי הנחת האינדוקציה, באיטרציה ה-n שאוחסן ב-$A[u]$ ערך מינימלי עבור מסלול n נגיש מ-r ל-u. באיטרציה ה-$(n+1)$ בחרנו קשת עם משקל מינימלי מ-u ל-v. מכיוון שהנחנו בשלילה שב-$A[v]$ ישנו ערך שאינו מינימלי, נגיע למסקנה שהייתה קשת אחרת עם עלות קטנה יותר שהיינו יכולים לבחור, בסתירה לכך שהאלגוריתם בוחר קשת מינימלית. לכן x הוא כן עלות מינימלית.

יש פה בלבול אנחנו לא בוחרים קשת עם משקל מינימלי, אלא עוברים על כל הצלעות -10

- $A[v]=\infty$ אך ישנו מסלול $n+1$ נגיש ל-v. אם קיים מסלול כזה, הוא מורכב ממסלול n-נגיש ועוד קשת נקרא לה (u,v) אותה בחרנו באיטרציה ה-$n+1$. באיטרציה ה-n ב-$A[u]$ היה ערך סופי לפי הנחת האינדוקציה. לכן אם אכן ישנו מסלול $n+1$ נגיש מ-r ל-v הערך שלו יהיה $A[u]+c(e)$ ושהו ערך סופי - בסתירה לכך ש-$A[v]=\infty$. לכן אם $A[v]=\infty$ אין מסלול $n+1$ נגיש מ-r ל-v.

← לכן ניתן לראות שהנחת האינדוקציה מתקיימת גם עבור $i=n+1$

Scanned with CamScanner

(ב) עם BFS יהיה n, כמו הערך המקסימלי והוא יתקבל כאשר ישנו מסלול n וגישה מ-r ל-v

(הצמתים בסדר לקסיקוגרפי הפוך)

וגם ההשתיות כן מסודרות הפוך מבחינה לקסיקוגרפית. זה מכיוון שבכל איטרציה נעדכן

רק צומת אחת, ולכן בסה"כ n צמתים נצטרך n איטרציות.

מעולה

(ג) אם ניקח את הגרף מסעיף ב' אך הפעם הצמתים כן יהיו מסודרים לפי סדר לקסיקוגרפי

במסלול, עדיין נקבל גרף בעל n צמתים, אך יהיו רק 2 איטרציות - בראשונה נעדכן את $d[v]$

לכל $v \in V$ ובשנייה נראה כי ניתן לצאת מהלולאה.