

סריקות לעומק ומיון טופולוגי

חפגש 3



- מעבר על BFS
- תכנון אלגוריתם מבוסס רדוקציה

- סריקת עומק - DFS
- מיון טופולוגי

חלקן

DFS - סריקה לעומק

האלגוריתם DFS פעול באופן רקורסיבי כאשר תמיד יעדיף לחפש "עמוק" יותר בגרף לפני מעבר לשכנים נוספים של קודקוד נסרק.

- בסריקה נוצר יער עומר G_π . צלע ביער מהסוג $(\pi(x), x)$.
- לכל קודקוד 3 מצבים אפשריים:
- קודקוד מאותחל בלבן - ונשאר לבן כל עוד לא התגלה בסריקה
- קודקוד הפוך אפור ברגע גילוי
- קודקוד הופל מאפור לשחור לאחר שהסתיימה סריקת כל הקודקודים שנגישים ממנו.

- לכל קודקוד מספר שדות
 - $d(v)$ - זמן גילוי הקודקוד
 - $f(v)$ - זמן סיום הטיפול הקודקוד
 - $\pi(v)$ - קודקוד אשר ממנו התגלה v .
 - $color(v)$ - צבע הקודקוד

דוגמת ריצה על הלוח

DFS(G)

Init : $t = 1$ $\text{color}[u] = \text{white}$ for all $u \in V$

FOR $u \in V$ DO

 IF $\text{color}[u] = \text{white}$ THEN

 DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)

color[u] = gray

$d[u] = t$

$t = t + 1$

FOR (u, v) $\in E$ DO

IF color[v] = white THEN

$\pi[v] = u$

DFS-Visit(v)

color[u] = black

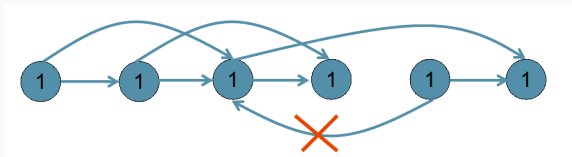
$f[u] = t$

$t = t + 1$

- סורק את כל הקודקודים
- מוצא מעגלים
- מציאת מיון טופולוגי
- סיבוכיות $O(|V| + |E|)$

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: יהי גרף קשיר ולא מכוון ויהי $u \in V$. אם קיימת הרצת DFS מ- u על G והרצת BFS מ- u על G הנותנות את אותו עץ T אז בהכרח $G = T$

- מיון טופולוגי של גרף מכון $G = (V, E)$ הינו סידור (v_1, \dots, v_n) של קודקודי הגרף, כך שלכל $1 \leq i, j \leq n$ אם $i < j$ אז אין קשתות מ j ל i בגרף



דוגמה על הלוח

משפט: אם הגרף DAG אזי יש מיון טופולוגי.
הוכחה בבניה (עמוד 111 בספר).

- **טענה:** אם G חסר מעגלים ו- $(u, v) \in E$ אז בכל סריקת $\text{DFS}(G)$ מתקיים $f(v) < f(u)$
- **אלגוריתם מבוסס DFS למציאת מיון טופולוגי:**
 - הרץ $\text{DFS}(G)$
 - (אם לא התגלתה קשת אחורה) החזר סידור של V לפי זמני f בסדר יורד.
- נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות הטענה (על הלוח).

- **הגדרה:** גרף מעורב הוא גרף שבו כמה מהקשתות מכוונות והאחרות אינן מכוונות.
- הוכיחו שאם בגרף מעורב התת-גרף המתקבל מכל צמתי הגרף ומהקשתות המכוונות בלבד אינו מכיל מעגל מכוון, אז תמיד ניתן לכוון את הקשתות הלא מכוונות כך שבגרף המכוון המתקבל אין מעגל מכוון. הראו כיצד ניתן למצוא כיוון מתאים לקשתות בזמן לינארי.

נתון גרף מכוון.
כיצד יכול להשתנות מספר הרכיבים הקשירים היטב בגרף אם מוסיפים קשת חדשה?

הוכח או הפרך-

אם בגרף מכוון יש קשתות הנכנסות לצומת u וגם קשתות היוצאות ממנו, אזי לא ייתכן שבהרצת DFS על הגרף הצומת u ימצא בעץ המכיל אותו בלבד.

הוכח או הפרך-

יהי גרף קשיר ולא מכוון, יהי $s \in V$ ויהי T עץ המתקבל מהרצת DFS על G מ- s . אז עומקו של T הוא לפחות כעומקו של כל עץ המתקבל מהרצת BFS על G מ- s .

יהי G גרף לא מכוון וקשיר. הוכח או הפרך:

- כל עץ המתקבל מריצת DFS על G ניתן לקבל על ידי ריצת BFS על G .
- כל עץ המתקבל מריצת BFS על G ניתן לקבל על ידי ריצת DFS על G .