אלגוריתמים חמדניים - מסלולים קלים ביותר

מפגש 4

שבוע שעבר ראינו

- סיימנו סריקות בגרף (DFS,BFS)
- מיון טופולוגי

התוכנית להיום

- מסלולים קלים ביותר
- אלגוריתם גנרי
- אלגוריתם דייקסטרא

אלגוריתמים חמדניים

חלק I

מסלולים קלים ביותר בגרפים מכוונים עם מקור יחיד

הקדמה

- נוסיף אספקט נוסף לגרף, גרף ממושקל.
- נוספת פונקציית משקל על הקשתות:

$$w : E \to \mathbb{R}$$

- **הגדרה:** משקל של מסלול הינו סך משקולות הצלעות
- פונקציית מרחק δ:

$$\delta(s,v) = \delta(v) = \begin{cases} \infty, & \text{אין מסלול בין } s \text{ ל- } v \\ \text{משקל מסלול קל ביותר מ-} s \text{ ל-} v, & \text{אחרת} \end{cases}$$

- **הערה:** במידה וקיים מעגל שלילי (=מעגל במשקל שלילי) במסלול כלשהו בין s ל- v אזי הפונקציה δ לא מוגדרת היטב. נשלים את ההגדרה במקרה זה כ-

$$\delta(s,v) = -\infty$$

בעיית מציאת מסלולים קלים ביותר בגרפים מכוונים עם מקור יחיד ומשקולות אי-שליליים

- **קלט:** $G = (V, E)$ מכוון, $s \in V$ קודקוד מקור. $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- **יש למצוא:** לכל $v \in V$ מסלול קל ביותר מ- s ל- v, אם קיים.

הערות

- ראשית נחשב את המרחקים לכל $v \in V$ ולאחר מכן נשחזר את המסלולים עצמם ע"י שימוי במרחקים הנ"ל.
- אם $w(e) = c$ לכל קשת, איך נוכל לפתור את הבעיה?
- מסלול קל ביותר הינו בהכרח מסלול פשוט.

טענה

- תת מסלול של מסלול קל ביותר הינו מסלול קל ביותר. (הוכחה על הלוח)
- **מסקנה:** רישא של מסלול קל ביותר הינו גם מסלול קל ביותר.

הערה נוספת

- לכל קשת (u,v) מתקיים:

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)$$

אלגוריתם גנרי

Init: $\forall v \in V$, $d(v) \leftarrow \infty$, $d(s) \leftarrow 0$

Step: If exists (u, v) s.t $d(v) > d(u) + w(u, v)$ do $Relax(u, v)$

Relax(u, v)

If $d(v) > d(u) + w(u, v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

טענה נשמרת

בכל שלב באלגוריתם $d(v) \geq \delta(s,v)$ ואם $d(v) < \infty$ אזי $d(v)$ משקל מסלול כלשהו מ- s ל- v .

הוכחה על הלוח

משפט נכונות האלגוריתם הגנרי

אם האלגוריתם עוצר אזי לכל $v \in V$

$$d(v) = \delta(s, v)$$

הוכחה על הלוח

דייקסטרא