(שאלה 1
תיאור אלג' - 5 נק'
הוכחת נכונות – 3 נק'
ניתוח זמן ריצה – 5 נק'

שאלה 1

(*) נשתמש באלג' הזיווג היציב כדי להתאים כל ספינה לנמל.

כל התאמה כזו תייצג ספינה שנשארת בנמל לתחזוקה עד סוף החודש.

יהיו S קבוצת הספינות ו- P קבוצת הנמלים. בנתון, מס' האיברים של הקבוצות שווה.

(*) נגדיר את קבוצת ההעדפות של ספינה: לכל ספינה יש לו"ז מקורי להגעה לנמלים.

יהיו $p_1,p_2\in P$ נמלים כלשהם. ספינה תעדיף את p_1 על פני p_2 אם הנמל p_1 נמצא בלו"ז של הספינה לפני נמל p_2.

(*) נגדיר את קבוצת ההעדפות של נמל: יהיו $s_1,s_2\in S$ ספינות כלשהן. נמל מעדיף את s_1 על פני s_2 אם הספינה s_1 מגיעה לנמל לפי הלו"ז המקורי אחרי s_2.

האלגוריתם

(*) ראשית נבנה את רשימת ההעדפות של הספינות:

עבור כל ספינה בקבוצה S נבדוק את הלו"ז המקורי שלה עד סוף החודש (כלומר, m).

כל נמל בלו"ז יכנס לסוף הרשימה.

(*) שנית נבנה את רשימת ההעדפות של הנמלים:

עבור כל יום בחודש (בסריקה מהיום האחרון בחודש, m, ליום הראשון) נעבור על רשימת הספינות באותו יום שעוגנות בנמל כלשהו. לכל ספינה, נבדוק האם ברשימת ההעדפות שלה היא עוגנת בנמל כלשהו ביום זה. אם כן, נכניס לרשימת ההעדפה של הנמל את S לסוף הרשימה. אם לא, נמשיך לבדוק את הספינה הבאה.

(*) נשתמש באלגו' הזיווג היציב מספר. בתחילה, אף אחת מהספינות אינה משובצת לאף נמל.

לכל $s_i \in S$; נחזור לעבור על רשימת הספינות כל עוד יש ספינה שעדיין לא שובצה לנמל.

s_i תשובץ לנמל הראשון p, שברשימת העדפות שלה.

אם p לא שובץ בעבר לספינה כלשהי אז p ישובץ ל s_i.

אך אם p שובץ כבר לספינה אחרת אבל s_i נמצאת במיקום גבוה יותר ברשימת העדפות של p, השיבוץ בין הספינה שכבר שובצה ל p יבוטל ו- s_i ו-p ישובצו.

אבל, אם s_i נמצאת במיקום נמוך יותר אז s_i תעבור לנסות להיות משובצת לנמל הבא ברשימת העדפות שלה.

בסיום התהליך כל אחת מהספינות תשובץ לאחד הנמלים (כאמור, כנתון, מספרם זהה).

נכונות: a

(*) ברשימת העדפות של כל ספינה מופיעים כל הנמלים וכמו גם ברשימת העדפות של כל נמל מופיעים כל הספינות.

(*) בסיום ריצת האלגו' כל ספינה משובצת לנמל נמל.

(*) נוכיח כי מתקיים שאין שתי ספינות (או יותר) הנמצאות באותו נמל מאותו יום שהספינה הראשונה שהגיעה ושובצה ועד היום האחרון בחודש:

יהיו $s_1, s_2 \in S$, $p \in P$.

נניח בשלילה ש p ו-s_1 שובצו שבאותו יום, d_1, וספינה s_2 מגיעה ביום d_2 כך ש $m \geq d_2 \geq d_1$. נובע כי p הוא נמל הנמצא ברשימת ההעדפות של s_2 במיקום גבוה יותר מהמיקום של הנמל p ברשימת העדפות של הספינה s_1 ולכן p יבחר את ספינה s_2 על פני s_1 בסתירה לכך ש p, s_1 כבר שובצו.

סיבוכיות

(*) לפי הספר זמן ריצת ציור G' הינו $O(n^2)$.

(*) כל חישוב של רשימת העוקבות של כל אחת מ n הפעולות ולכן אם מ n הצמתים באמצעות לולאה העוברת על כל m הקשתות הינו פעולות $\Theta(m+n)$ (פעמיים).

(*) נקבל כי $T(n,m)=2\cdot\Theta(m+n)+O(n^2)$. נתון כי $n>m$ ולכן $T(n,m)=\Theta(m+n)$.

שאלה2)
·תיאור אלג' – 5 נק'
·הוכחת נכונות – 10 נק'
·ניתוח זמן ריצה – 2 נק'

שאלה 2

c*
* אין הוכחה
*אין ניתוח זמן ריצה

האלגוריתם

זה לא נתון!

נתון כי לכל צומת $v\in V$ ב G, $\deg v>0$. כך מתקיים כאשר ב G יש לפחות מעגל אחד.
נבחר צומת $v\in V$ כלשהו ונפרוק עליו BFS. העץ שמתקבל מהפריקה נסמן בתור T.
אם כל הקשתות ב T הן כל צומת וצומת הן צלעות עץ אז לא קיים מעגל ולכן נחזיר false. אחרת, קיימת צלע אחורה לפחות אחת ונכוון אותה כצלע סגור (u,v).
עבור כל הקשתות הלא מכוונות שיוצאות מצומת v נכוון אותן כלפי חוץ עד ביצוע BFS לכל רמה i שתגלה קשת לצמתים ברמה $i+1$. לאחר מעבר על כל הקשתות וקביעת כיוון, כאשר נגיע חזרה ל v, נחזיר true.

חסר BFS מאיזה קודקוד

נכונות:

חסר מה אתה מוכיח בכל שלב.
הוכחה לא מלאה - לא ברור למה דרגת הכניסה של הקודקוד באמת גדולה מ-0.

(*) לפי שנוצר, T, יש שני סוגי קשתות: עץ וצלע אחורה.

(*) אם כל הקשתות הן קשתות עץ אזי קבוצת הצמתים של כל אחד מהגרפים G, T שוות וכן גם קבוצות הקשתות ולכן G הוא עץ.

(*) נניח כי $|V_G|=n$ ולפי מ 3.1 $|E_G|=n-1$.

(*) נניח שניתן להגדיר גרף מכוון $G'=(V,E')$ ולכן $|E'|=n-1$ ומצד שני
סכום הדרגות של כל צומת הוא $|E'|$ אזי אם סכום הדרגות כניסה היא $n-1$

ומספר הצמתים הוא n אז קיים צומת שדרגת הכניסה שלו היא 0, לכן נחזיר false.

(*) אם לא כל הקשתות הן קשתות עץ אז קיימת לפחות צלע אחורה אחת. נכוון אותה (u,v) שמקיים כי לכל v יש קשתות יוצאות ממנו. הכוונת הקשתות מתבצעת ע"י BFS לכל רמה i מכוונת לצמתים ברמה i+1. בצורה זו קיבלנו כי לכל צומת יש לפחות דרגת כניסה אחת.

סיבוכיות:

DFS – $\Theta(m+n)$, BFS לכיוון הצמתים – $\Theta(m+n)$. סה"כ $\Theta(m+n)$.

שאלה 3

האלגוריתם

(*) ראשית, נמיר את הפסוקים לקשתי גרירה בגרף מכוון G כך שלכל ליטרל x ניצור את הקודקודים $x, \neg x \in V$. בנוסף, לכל פסוקית מהצורה $x_1 \vee x_2 = \phi$ ניצור את הקשתות $(\neg x_1, x_2), (\neg x_2, x_1) \in E$ וזאת לפי השקילות הלוגית עבור הפסוקים p,q: $p \to q \equiv \neg q \vee p \equiv \neg p \vee q$.

(*) כל עוד קיים צומת שלא עבר השמה, נבחר צומת $v \in V$ כזה ונריץ עליו DFS ממנו. נסמן את הסריקה ב-k. אם $\neg v \notin V_k$ נחזיר T לכל צומת בקבוצה ו-F לצמתים ההופכיים שלהם. אם כן $\neg v \in V_k$ אז נריץ DFS על $\neg v$ ונסמנה ב-$\bar{k}$ ונבדוק אם v לא נמצא ב-$V_{\bar{k}}$ אז נחזיר T לכל צומת בקבוצה ו-F לצמתים ההופכיים שלהם. אם v כן נמצא ב-$V_{\bar{k}}$ אז נחזיר false. אם לא קיבלנו סתירות בתהליך ההשמות נחזיר true.

נכונות:

בכל איטרציה על v שאין לו השמה מתבצע DFS על מנת למצוא את כל השכנים ברכיב הקשירות שלו. אם $\neg v$ נמצא כבן של v אז נקבל סתירה לצורת צבעת, אם קיים מסלול מ $\neg v$ שמגיע ל v אז ההשמה לא בהכרח מובילה לסתירה ולכן נריץ DFS על $\neg v$ ונבדוק אם v בן של $\neg v$. אם כן, אז מתקיים כי בין הצמתים יש קשתות הדדיות (כלומר כל צומת שולחת קשת אחת לשנייה) ולכן נקבל סתירה ולכן נחזיר false. אם לא, אז נבצע השמה לבנים של $\neg v$ ונמשיך בלולאה.
בסופו של דבר אם לכל צומת יש השמה ולא קיבלנו סתירות נחזיר true.

סיבוכיות

חלק בניית הגרף G עלותו $\Theta(m+n)$ (מס' קודק' של ליטרלים; m פסוקיות + בניית $2n$ צמתים; $2m$ קשתות)
לכל ליטרל אנו מבצעים השמה פעם אחת ולכן עלות ההשמות היא $\Theta(n)$.
סה"כ קיבלנו כי הסיבוכיות של האלג' $\Theta(m+n)$.

שאלה 4

נתון גרף מכוון G. ניצור גרף חדש G' שבו נכפיל את הקשתות המכוונות לצמתים המועדפים. נשרשר 3 גרפים מסוג זה. לכל קשת שמכוונת לצומת מועדף בגרף G ניצור קשת המכוונת מצומת המקור בגרף G'_1 לצומת היעד בגרף G'_2 וכך גם מ G'_2 ל G'_3.
נוסיף שני צמתים s', t' וניצור את הקשתות (s', s) ב G'_1 ו- (t, t') ב G'_3 כך שעל מנת להגיע לצומת מועדף נעבור מגרף לגרף מה שמאפשר למצוא שני מעברים בדיוק וזה מבטיח שנבקר בצומת מועדף בדיוק פעמיים.

נריץ BFS מ-z' ל-t' ונקבל את המסלול הקצר ביותר אליהם.
המסלול שקיבלנו לאחר הסרת הצמתים z', t' מכיל שני מופעים של הצמתים
המוצגים והוא הקצר ביותר בגרף G בין הצמתים z, t.
נאחד את $\{G_i \mid 1 \le i \le 3\}$ ע"י העתקת הקשתות משלושת הגרפים לגרף G המקורי
(אבל נתעלם משייכות הצמתים לגרף מסוים). לאחר הסרת z', t' כל
הצמתים והקשתות במסלול קיימים ב-G.
לכן, אם יש מסלול קצר יותר ב-G העובר שני מעברים בצמתים מוצגים
היינו מקבלים אותו בריצת ה-BFS שמריצים על הגרף החדש.

<u>נכונות</u>

ביצענו המרת קלט לבעי שימוש ב-BFS ופירשנו את הפלט.
לא שינינו את אלגו' BFS ולכן נכונות האלגו' נשענת על נכונות BFS בספר.

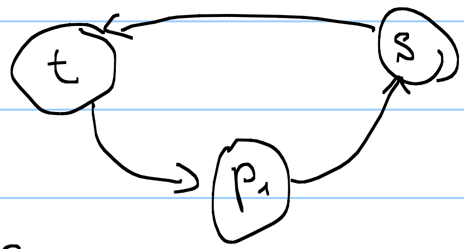
<u>סיבוכיות</u>

בניית הגרף החדש עולה $O(m+n)$ זאת בגלל מעבר על כל הצמתים והקשתות.
נתון בספר כי BFS עולה $O(m+n)$, לכן סה"כ $O(m+n)$.

דוגמה לשירשור בעמוד הבא.

דוגמה לשירשור G':

נניח כי $E=\{(s,t),(t,p_1),(p_1,s)\}$, $V=\{s,t,p_1\}$, $p_1\in U$. $G=(V,E)$ נראה כך:



לכן $V'=\{s,t,p_1\}$, $E'=\{(s,t),(p_1,s)\}$ (כי אנו מסירים את הקשתות הנכנסות לצמתים המיוצגים שבמקרה זה הוא p_1). ולכן שרשור $G'_i=(V',E')$; $1\le i\le 3$ נראה כך: