נדב מזרחי

ממן 12

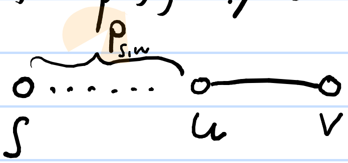
שאלה 1:

א) נוכיח באינדוקציה על מספר הקשתות במסלול $P_{s,v}$. הטענה שנרצה להוכיח:
"אם כל הקשתות שימושיות במסלול $P_{s,v}$ <= $P_{s,v}$ מסלול מזערי".

בסיס האינדוקציה:
אם ישנה קשת יחידה והיא שימושית, אזי מהגדרת קשת שימושית היא צלע אחרונה במסלול מזערי $P_{s,v}$. המסלול $P_{s,v}$ מורכב מקשת זו בלבד ולכן הוא עצמו מסלול מזערי.

נניח שהטענה נכונה עבור n-1 קשתות. כלומר, יהי P מסלול בן n-1 קשתות שימושיות, ולכן הוא עצמו מסלול מזערי. (הנחת האינדוקציה).

יהי $P_{s,v}$ מסלול בין n קשתות שימושיות. נתבונן בקשת האחרונה במסלול זה:



מהגדרתה, הקשת $e=(u,v)$ הינה שימושית. ולכן קיים מסלול מזערי $P'_{s,v}$ שהיא הקשת אחרונה שבו. במסלול זה קיים תת מסלול $P''_{s,u}$. ברור שמסלול זה מוכרח להיות מסלול מזערי בין s לבין u (אחרת יהיה קיים מסלול קל יותר בסתירה לכך ש-P' מזערי).
כעת ייתכנו שני מצבים. 1) $P''_{s,u}=P_{s,u}$ ואז במצב כזה המסלול $P_{s,u}$ בין n-1 הקשתות שמשורשר לקשת $e=(u,v)$ הינו מסלול מזערי בין צומת s לבין v. ובפרט $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

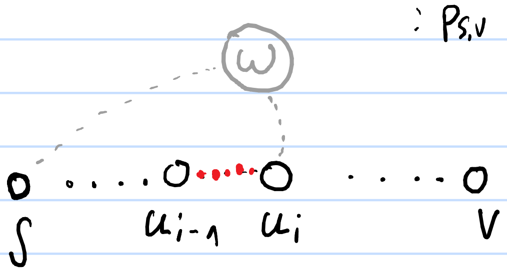
2) $P''_{s,u}\neq P_{s,u}$. במצב כזה נפעיל את הנחת האינדוקציה ונסיק שמכיוון ש-$P_{s,u}$ מסלול בן n-1 קשתות אזי הינו מסלול מזערי בין s לבין u, ובשירשור $e=(u,v)$ נקבל כי $P_{s,v}$ מסלול מזערי (שכן e שימושית, כלומר היא קשת אחרונה במסלול מזערי: $s \cdots u - v$). ובפרט $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

הערה - ברור כי בין u לבין v אין מסלול קל יותר מהקשת $u - v$ (שכן אז נקבל שהקשת (u,v) אינה שימושית בסתירה להנחה). ולכן בהכרח $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

ב) יהי $P_{s,v}$ מסלול שבו לפחות קשת אחת e לא שימושית. ברור כי אם המסלול בן קשת יחידה, אז המסלול לא מזערי. לכן נניח כי ישנן לפחות 2 קשתות במסלול $P_{s,v}$.
המשך בדף הבא.

בס״ד

נצ״ר באופן כללי את המסלול $P_{s,v}$:



ייתכן כי:
$s=u_{i-1}$
או
$u_i=v$

נניח כי הקשת הזו שימושית היא: (u_{i-1},u_i)

לפי הנתון בשאלה בין כל קודקוד לבין s ישנו מסלול ובפרט קיים מסלול קצר ביותר.
מכיון שהקשת (u_{i-1},u_i) ואינה שימושית, היא אינה חלק ממסלול הקצר ביותר P_{s,u_i}.

לכן בהכרח קיימת קשת שימושית, נקרא לה (w,u_i) הנכנסת לצומת u_i והיינה חלק מהמסלול המזערי P'_{s,u_i}. לכן כעת ניתן להסיק כי $W(P'_{s,u_i}) \le W(P_{s,u_i})$. (*)

כמו כן המסלול $P_{s,v}$ משקלו: $W(P_{s,u_i})+W(P_{u_i,v})$.

המסלול $P'_{s,u_i}\circ P_{u_i,v}$ משקלו:

וקיבלנו:

$$W(P'_{s,u_i}\circ P_{u_i,v}) = W(P'_{s,u_i})+W(P_{u_i,v}) \le W(P_{s,u_i})+W(P_{u_i,v}) = W(P_{s,v})$$

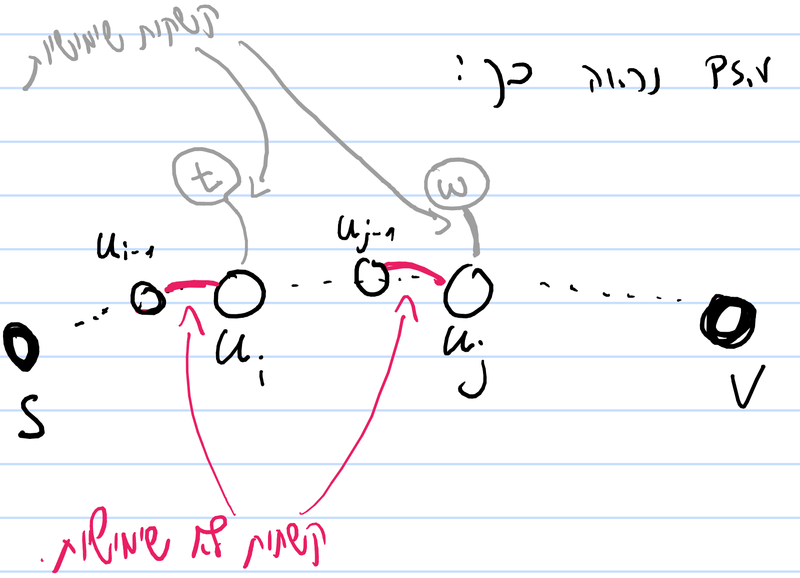
ובפרט $P_{s,v}$ אינו מסלול מזערי (כי קיים מסלול אחר בין s לבין v בעל משקל קטן יותר) $\square$

ב) $P_{s,v}$ כמעט מזערי הוא בפרט מסלול שאינו מזערי $\underset{\text{מסעיף א'}}{\Longrightarrow}$ קיימת לפחות קשת לא שימושית אחת.

כך שעלינו להראות כעת שיש לכל היותר אחת.

נניח בשלילה כי קיימים לפחות שתי קשתות לא שימושיות. (הוכחה דומה לסעיף ב').
אם במסלול $P_{s,v}$ יש שתי קשתות אז ברור שהמסלול לא כמעט מזערי (כי מסלול בין s לבין v בעל קשת לא שימושית אחת ואחת שימושית יהיה מסלול במשקל קטן יותר וגם לא יהיה מסלול מזערי (מסעיף ב')) ולכן נקבל סתירה - מצאנו מסלול לא מזערי שמשקלו קטן מ-$P_{s,v}$). לכן נוכל להניח כי קיימות לפחות 3 קשתות במסלול $P_{s,v}$.
המשך בדף הבא.

באופן כללי $P_{s,v}$ נראה כך:



נניח כי הקשת (u_{i-1},u_i) אינה שימושית. משיקולים של סעיף קודם, אנו יודעים כי נכנסת לצומת u_i קשת שימושית מצומת שנקרא לה t. לכן המסלול מצומת s לצומת u_i אינו המסלול המזערי בין קודקודים אלו. לכן קיים מסלול $P_{1_{s,u_i}}$ כך ש:

$$W(P_{1_{s,u_i}}) \le W(P_{s,u_i}) \quad *$$

ולכן נקבל:

$$W(P_{1_{s,u_i}} \circ P_{u_i,v}) = W(P_{1,u_i}) + W(P_{u_i,v}) \underset{*}{\le} W(P_{s,u_i}) + W(P_{u_i,v}) = W(P_{s,v})$$

ומצאנו מסלול כוללין $P_{1_{s,u_i}} \circ P_{u_i,v}$ כך שמשקלו קטן מהמסלול $P_{s,v}$. כדי להראות ש- $P_{s,v}$ אינו מסלול מזערי, יש למצוא מסלול <u>שונה</u> נוסף מצומת s אל צומת v שמשקלו קטן מ- $P_{s,v}$.

<u>באופן דומה</u>, נמצא מסלול ששונה מהות מ- $P_{s,v}$. בעצם ניקח מסלול שמכיל את הקשת השימושית (w,u_j). נסמן מסלול זה ב- P_2. ולכן משיקולים דומים לעיל:

$$W(P_{2_{s,u_j}} \circ P_{u_j,v}) \le W(P_{s,v})$$

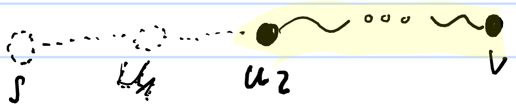
כעת ברור שהמסלולים שונים:

$$P_{2_{s,u_j}} \circ P_{u_j,v} \ne P_{1_{s,u_i}} \circ P_{u_i,v}$$

שכן: $(u_{j-1},u_j) \in P_{1_{s,u_i}} \circ P_{u_i,v}$ אבל וודאי הקשת לא שייכת למסלול $P_{2_{s,u_j}} \circ P_{u_j,v}$.

ולכן לפי הגדרת מסלול כמעט מזערי, $P_{s,v}$ אינו כזה. סתירה. לכן
ישנה בדיוק קשת אחת שאינה שימושית $\square$

ט) נשתמש בסעיף ס׳. לפי הנתון הקשת $e=(u_1,u_2)$ היא היחידה שלא שימושית.
לכן כל שאר הקשתות שימושיות. בפרט כל הקשתות במסלול P_{s,u_1} מהצומת s
לצומת u_1 הינן שימושיות. לפי סעיף א׳ זהו מסלול מזערי.
נתבונן כעת בתת מסלול $P_{u_2,v}$:



כל קשת בתת מסלול זה הינה קשת שימושית, כלומר קשת ואחרונה במסלול מזערי בין s לבין v.
כעת, יהי P_{s,u_2} מסלול מזערי בין s לבין u_2. בפרט כל הקשתות במסלול

$P_{s,u_2} \circ P_{u_2,v}$ * הינן קשתות שימושיות

ולכן לפי סעיף א׳ זהו מסלול מזערי, נניח בשלילה כי $P_{u_2,v}$ אינו מסלול מזערי.
אזי נקבל כי יש מסלול מזערי אחר שונה $P^*_{u_2,v}$ כך ש: $W(P^*_{u_2,v}) \le W(P_{u_2,v})$

ואז גם המסלול המשורשר $P_{s,u_2} \circ P^*_{u_2,v}$ הינו מסלול מזערי שונה מהמסלול *
לעיל - סתירה!

$\Leftarrow$ $P_{u_2,v}$ מסלול מזערי $\square$

ח) רעיון האלגוריתם:
נרצה לייצר העתק של הצמתים של הגרף המקורי, נאמר G'
שיכיל את העתקי הצמתים וקשתות שימושיות בלבד. הגרף השני יהיה G שבו ישארו
הצמתים המקוריים עם קשתות שימושיות בלבד. ולבסוף נחבר את הקשתות הלא
שימושיות שיוצאות מקודקודי G לקודקודי G'. לאחר מכן נריץ דייקסטרו על
$s \in G$. אם $d[t']=\infty$ $\Leftarrow$ אין מסלול כמעט מזערי מבוקש. אם $d[t']<\infty$
נחזיר את המסלול הכמעט מזערי. מציאת חלוקה שתחלק את קבוצת הקשתות
השימושיות ניתן להשיג ע״י הרצת דייקסטרו על צומת s. (כל הקשתות שמשתתפות
במסלול לצומת כלשהי יכנסו לקבוצת השימושיות).

המשך בעמוד הבא

בס"ד

שלב תיאור שלבי האלגוריתם: יהי $G=(V,E)$

$\boxed{A}$

1) נריץ דייקסטרא על צומת S. נסמן את הקשתות שמשתתפות במסלול לכל צומת $v \in V$ וגם $v \neq S$.

2) כעת נגדיר:

$E_{use} \leftarrow \emptyset$ קבוצת הקשתות שימושיות

$E_{Not-u} \leftarrow \emptyset$ קבוצת הקשתות הלא שימושיות.

3) לכל $e \in E$:

אם e שימושית אז $E_{use} \leftarrow E_{use} \cup \{e\}$

אחרת $E_{not} \leftarrow E_{not} \cup \{e\}$

בסיום שלב 3 יש לנו את החלוקה המבוקשת. כעת נמיר את הקלט:

שלב ממיר קלט:

$\boxed{B}$

1) כעת נגדיר קבוצת צמתים חדשה באופן הבא:

$$V' \leftarrow \emptyset$$

2) לכל $v \in V$:

נמיר את v לצורה v' ונעדכן $V' \leftarrow V' \cup \{v'\}$

3) נגדיר קבוצת קשתות שימושיות ל"גרף השני":

$$E'_{use} \leftarrow \emptyset$$

4) לכל $e=(v,u) \in E_{use}$:

$$E'_{use} \leftarrow E'_{use} \leftarrow (v',u')$$

5) כעת "נחבר" את הגושים ע"י חיבור קשתות שינועות מקודקודי V אל V'.
נגדיר:

$$E'_{not} \leftarrow \emptyset$$

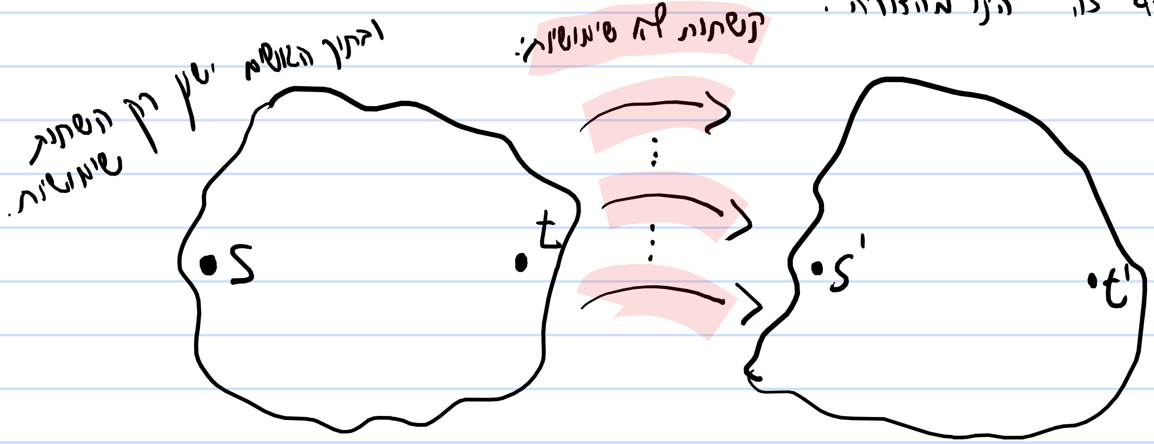
6) לכל $e=(v,u) \in E_{not}$:

$$E'_{not} \leftarrow E'_{not} \cup \{e'=(v,u')\}$$

שלב C

ע נגדיר: $G_{new}=\{V\cup V', E_{use}\cup E'_{not}\cup E'_{use}\}$

גרף זה הינו מהצורה:



שלב D

נריץ על G_{new} דייקסטרה על צומת s. ונבדוק מה הערך של $d[t']$.
אם $d[t']=\infty$ נחזיר שלא קיים מסלול כמבוקש.
אחרת, קיים מסלול - נצטרך להמיר אותו למסלול של הגרף המקורי. להלן שלב E.

שלב E

<u>ממיר פלט:</u>

הגענו לשלב זה אמ"מ $d[t']<\infty$.

לכן קיים מסלול שנמצא ע"י דייקסטרה בצורה הבאה:

$$s=v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_j,v_{j+1},\dots,v_n=t'$$

(ברור כי עוברים לפחות 3 קשתות)

נמיר את הפלט בצורה הבאה:

* לכל קשת (v_{k-1},v_k):

כאשר $1\le k\le i \Rightarrow$ הקשת תישאר זהה (כי אלו קודקודים לא מתויגים).

כאשר $j\le k\le n \Rightarrow$ הקודקודים הללו מתויגים, לכן נסיר את התיוג ונקבל קשת של הגרף המקורית.

וכן לקשת הלא שימושית $(v_i,v_j) \Rightarrow$ נסיר את התיוג של הצומת v_j.

וסיימנו.

הערה חשובה:
נשים לב כי בהמרת הפלט קיבלנו שעשה מסלול בגרף המקורי בין s לבין t!

הערה נוספת - הקשתות הללו שימושיות שמחברות בין האטומים הן "חד כיווניות" מבחוץ של הקודקוד הם לא מתייחסים אל הקודקודים המתויישים.

הוכחת נכונות:

ראשית ברור שהמסלול המוחזר אינו מזערי כי הוא מכיל קשת לא שימושית
לפי סעיף ב' ברור כי המסלול לא מזערי.
כמו כן, לאחר שלב E (המרת הפלט), קיבלנו מסלול שמכיל רק קשת אחת לא שימושית וכל השאר שימושיות. נניח בשלילה כי קיים מסלול $p^*_{s,t}$ שאינו מזערי וגם משקלו קטן מהמסלול שמצאנו באלגוריתם (נסמן את המסלול שמצאנו ב- $P_{s,t}$)

אבל אם קיים מסלול $p^*_{s,t}$ כזה, אזי מנכונות דייקסטרה, היינו ומוציאים לתכל אותו -> כי דייקסטרה מחזיר את המסלול הקל ביותר. מכאן הגענו לסתירה (כי לפי ההנחה $P^*_{s,t} \neq P_{s,t}$). ולכן לא קיים מסלול שאינו מזערי שקל מהמסלול שמצאנו.

ובפרט $P_{s,t}$ מזערי.

כמו כן, אם לא קיימות קשתות שימושיות אזי נקבל כי $d[t']=\infty$ ובפרט שאין מסלול כמזערי. בגרף G_{new} לא יהיה קישור בין האטומים ואם בגרף G t נמצא ברכיב קשירות שונה מהרכיב של s. ואז במצב שבו יש רק מסלול מזערי ב-t לבין s.

ניתוח סיבוכיות:

- בשלב A - $O(|E| + |E|\lg|V|) = O(E\lg V)$ (דייקסטרה)
- שלב B - המרת הקלט $O(E+V)$
- שלב C - $O(1)$ הגדרת גרף חדש
- שלב D - הרצת דייקסטרה על G_{new} $O(2\cdot E\lg V) = O(E\lg V)$
- שלב E - המרת פלט $O(E)$

$\Longleftarrow$ בסה"כ $O(E\lg V + V) = O(E\lg V)$

$V = O(E)$ במקרה הגרוע שהגרף קשיר

$\square$

·תיאור אלג' – 5 נק'
·הוכחת נכונות – 0 נק'
·ניתוח זמן ריצה – 2 נק'
a

שאלה 2-

רעיון האלגוריתם:

מכיוון שהקשת שהוסרה הינה חלק מעץ פורש T, בעצם קיבלנו שני רכיבי קשירות זרים. כלומר קיבלנו חתך (S, V-S). נחפש את הקשת המינימלית שקצה שלה אחד ב-S וקצה שני ב-V-S, לפי משפט ד,ח, קשת זו בהכרח חלק מעפ"מ של הגרף G' שלנו הנתון מורכב מאותם צמתים ואותם קשתות. כמובן שהחיפוש הינו בקבוצה $E \setminus \{e^*\}$. כעת, קשת זו יוצרת עץ פורש, והוא מהווה עפ"מ של G'. כלומר קיבלנו T' שמהווה עפ"מ.

שלבי האלגוריתם:

1) נסמן את הקשתות ששייכות ל-T (למעט) e^*. ניתן לסמן כי עץ זה נתון.

2) נבחר צומת V, ונריץ BFS שעובר רק בקשתות מסומנות. כלומר רק בקשתות $T \setminus \{e^*\}$. נסמן כל קודקוד בצבע (א).

3) נבחר צומת u שלא מסומנת ב-(א) ונריץ שוב BFS ונצבע כל צומת בצבע (ב).

כעת קיבלנו שני רכיבי קשירות.

4) כעת נעבור על כל הקשתות $E \setminus \{e^*\}$ ונבחר את המינימלית אשר צומת אחת שלה מסומנת ב-(א) והשנייה ב-(ב). נקרא לקשת זו בשם $\bar{e}$.

5) נחזיר $T' \leftarrow T \cup \{\bar{e}\} \setminus \{e^*\}$.

ניתוח זמן ריצה (הוכחה בדף הבא)!

1) ישנם בעץ |V|-1 קשתות $\longleftarrow O(V)$

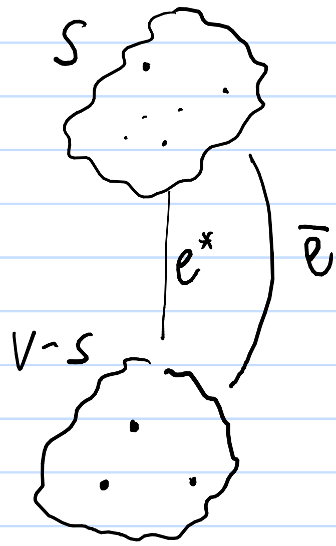
2+3) מריצים פעמיים BFS $\longleftarrow O(V+E) \xLeftarrow{\text{הגרף קשיר}} O(E)$

4) סריקת הקשתות ומציאת מינ' $\longleftarrow O(E)$

5) $O(1)$

הוכחת נכונות:

נסמן את העץ פורש שהאלגוריתם מחזיר ב- T'. עץ זה הינו העץ:
$T \cup \{\bar{e}\} \setminus \{e^*\}$ כאשר $\bar{e}$ הינה הקשת השניה המינימלית שמקשרת את רכיבי הקשירות שנפרדו בעץ T המקורי:



הסיבה שהקשת $\bar{e}$ הינה השניה המינימלית (ובאופן פורמלי $w(\bar{e}) \geq w(e^*)$) היא שלפי משפט 4.17 אם $\bar{e}$ היתה הכי מינימלית, היא היתה מוכרחת להיות בעץ T המקורי שפורש את G. לכן $w(\bar{e}) \geq w(e^*)$.

כעת, נניח בשלילה כי קיים לגרף G עץ פורש מינימלי ששונה מ-T'.
כלומר נניח שקיים עץ Z כך ש:

$$W(Z) < W(T')$$

נשים לב לדבר מעניין. לפי משפט 4.17, קשת מינימלית שקצותיה בקבוצות שונות של צמתים בחתך נמצאות בכל עץ פורש מינימלי של גרף. בפרט, הקשת $\bar{e}$ בהכרח קיימת בעץ Z. (שהרי האלגוריתם בחר את $\bar{e}$ כמינימלית).
כלומר הקשת $\bar{e}$ שמחברת את קבוצת הקודקודים $(S, V-S)$ קיימת בעץ, ולכן לא קיימת בעץ Z קשת נוספת שמחברת בין רכיבי הקשירות S ו- $V-S$. (שאם כן, נקבל מעגל בסתירה להגדרה של עץ).

אם כן, אנו במצב הבא: אנו יודעים שיש קשתות בעץ Z שמחברות את הצמתים ב- S כקשירים. באותו אופן ישנם קשתות בעץ Z שמחברות את הצמתים $V-S$

כקשירים, ויש את הקשת $\bar{e}$.
נקרא לקשתות של Z בסימן x. לכן משקלו של העץ הינו:

$$W(Z)=\sum_{x\in Z} w(x) = w(\bar{e}) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in S}} w(x) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in V-S}} w(x)$$

כמו כן, נסמן את הקשתות שמצויים שמחברות את הצמתים בלבד $V-S$ ואת הצמתים S בלבד שבעצים T ו-T' בסימן y (לפי האלגוריתם) אלו אותן קשתות - למעט הקשתות e^* ו-$\bar{e}$ שמחברות את הרכיבים, לכן:

המשקל של העץ T':

$$W(T')=\sum_{a\in T'} w(a) = w(\bar{e}) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y)$$

המשקל של T:

$$W(T)=\sum_{a\in T'} w(a) = w(e^*) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y)$$

כעת לפי ההנחה:

$$W(Z) < W(T')$$

$$\Rightarrow \quad w(\bar{e}) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in S}} w(x) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in V-S}} w(x) < w(\bar{e}) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y)$$

$$\underset{+(-w(\bar{e}))}{\Rightarrow} \quad (*) \quad \boxed{\sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in S}} w(x) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in V-S}} w(x) < \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y)}$$

בס"ד

ולכן מ- (*) ניתן להפיק את הסתירה! מכיוון שהקשתות x של העץ Z הן שונות מהקשתות y של העצים T ו-T'

(אחרת העצים Z ו-T' היו שווים), מצאנו קבוצה של קשתות

קלות יותר שמחברות צמתים בקבוצה $V-S$ בלבד ובקבוצה S בלבד, כלומר

העץ X שמכיל את הקשתות x של העץ Z בנוסף

לקשת e^* יהיה קל יותר מהעץ המינימלי T!

שכן לפי (*):

$$(*)\quad \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in S}} w(x) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in V-S}} w(x) < \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{w(e^*) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in S}} w(x) + \sum_{\substack{x=(u,v)\\ u,v\in V-S}} w(x)} < \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in S}} w(y) + \sum_{\substack{y=(v,u)\\ v,u\in V-S}} w(y) + w(e^*)$$

ולכן העץ

$$X = \{\underset{u,v\in S}{x=(u,v)} \cup \underset{u,v\in V-S}{x=(u,v)} \cup e^*\}$$

יהי עץ פורש מינימלי שונה מ-T. סתירה. לכן העץ T'

שהוגדרת במספר, אכן עץ פורש מינימלי. □

בס״ד

שאלה 3 -

דוגמא נגדית:

$$\overset{1}{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)} \wedge \overset{2}{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)} \wedge \overset{3}{(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)}$$

$$\overset{4}{(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)} \wedge \overset{5}{(x_1 \vee x_2 \vee x_7)} \wedge \overset{6}{(x_5 \vee x_6 \vee x_3)}$$

$$\overset{7}{(x_2 \quad x_6 , x_7)} \wedge \overset{8}{(x_3 \vee x_6 \vee x_7)} \wedge \overset{9}{(x_2 \vee x_5 \vee x_7)}$$

$x_1 \leftarrow T$

תחילה נבדוק את x_1 מכיוון ש מספק את 1, 2, 5 ואינו מספק את 3,4.

נבצע $x_1 \leftarrow T$.

כעת נבדוק את x_2. מכיוון שההשמה $x_2 \leftarrow T$ מספקת את 3, 5, 7, 9
(שנו כבר רוב) נבצע $x_2 \leftarrow T$ (שכן אם נבצע $x_2 \leftarrow F$ נספק רק את 4).

כעת נבדוק את x_3. מכיוון שההשמה $x_3 \leftarrow T$ מספקת את 6 ו-8 לעומת
$x_3 \leftarrow F$ שמספקת רק את 4, נבצע $x_3 \leftarrow T$.

אולם כבר ניתן לראות שבהשמה הזו פסוקית ארבע מקבלת False ולכן
כל הפסוק הינו False. כעת נראה כי הפסוק הינו ספיק.
ההשמה הבאה מראה זאת:

$x_1 \leftarrow F$

וסיפקנו את 3 ו-4.

$x_3 \leftarrow F$

וסיפקנו את 3 ו-2.

$x_6 \leftarrow T$

וסיפקנו את 6, 7 ו-8.

$x_7 \leftarrow T$

וסיפקנו את 5 ו-9 $\square$

בס"ד

מה שהיה צריך להראות שעבור T נתון ומלא
קיימת רשימת שכיחויות כך
שיש עץ קידוד תחיליות אופטימלי (קרי, עץ הופמן) שהוא זהה ל-T

שוב - כפי שהסברתי לך בכיתה, לנסות להגיד שככה אלגוריתם הופמן יכל היה לרוץ לתרץ באמצעות זה לתרץ ש-T אכן עץ אופטימלי זה ברוב הפעמים לא משכנע.

0\20

שאלה 4

יהי T עץ בינארי ומלא

n עלים

בעץ זה ישנם n עלים. לכל עלה v_i נסמן ב- $d[v_i]$ את עומקו בעץ.
נניח כי העלים v_i ממוספרים לפי העומק שלהם, כלומר v_1 זהו העלה העמוק ביותר ו-v_n זהו העלה הכי פחות עמוק.
נגדיר סדרת שכיחויות באופן הבא:

$$f_1=\frac{1}{d[v_1]},\quad f_2=\frac{1}{d[v_2]},\ \dots\ ,\quad f_n=\frac{1}{d[v_n]}$$

לפי הגדרת $d[v_i]$ ברור כי $f_1 \ge f_2 \ge \dots \ge f_n$

ולכן לכל צומת v_i, ככל שעומקו גדול יותר, כך השכיחות שמתאימה כנגדו קטנה יותר.
כעת אנו יודעים שבהכרח קיים קוד אופטימלי לסדרת שכיחויות זו. לפי משפט 4.24 אנו יודעים שהעץ שמתאים לקוד זה הינו מלא (= בינארי מלא). כמובן שעדיין לא הבחנו שזהו העץ T שלנו.
ממשפט 4.31 אנו יודעים שקיים קוד אופטימלי ועץ T^* מתאים שבו שתי השכיחויות הנמוכות ביותר משויכות לעלים שהם אחים.

לכן, נרצה לפי העיקרון של האלגוריתם של הופמן באופן שבו אנו נוכל לאט לעלות במעלה העץ T הנתון.
ממשפט 4.31, נסיק כי שתי השכיחויות הנמוכות f_n ו-f_{n-1} הינן מותאמות לעלים שהם אחים. לכן "נלך" לעלים הנמוכים ביותר - ברור שיש שני עלים כאלה שהם אחים, כי זהו עץ מלא. נסמן את העלים האלה בסימון f_n ו-f_{n-1} בהתאמה.

כעת, נשלוף את העלים האחים הבאים שלא מסומנים ועומקם הכי עמוק מבין העלים שלא סומנו.
ייתכן שחיבור f1+f2 יהיה אחד מהערכים הבאים במקום f3
נתאים להם את השכיחויות הבאות לפי הסדר (f_{n-3}, f_{n-2}). ואם לא קיימים עלים אחים שעומקם הוא העמוק ביותר שעדיין לא סומנו, נבדוק אם קיים עלה ללא אח עלה -> ונסמנו בשכיחות המתאימה לו. וכן נמשיך עד שנסמן את כלל העלים.

סימון זה שאנו מבצעים זהה למעשה להרצת האלגוריתם של הופמן -> ולכן אנו למעשה מראים שהעץ T הינו תוצאה אפשרית של הרצת הופמן על השכיחויות הללו. ובכך T הוא אחד מעצי הופמן (כאשר "כפינו" את ריצת האלגוריתם על דרך העץ) □