$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x^1 - 1^0 \Rightarrow (-1, -3, 2, 1)$

P_e $\quad$ P_o

$P_e(x) = (-1, 2) \quad P_o(x) = (-3, 1)$

$P(x) = P_e(x^2) + x P_o(x^2)$

$\omega_{j,n} = e^{\frac{2\pi j i}{n}}$

$\omega_{0,4} = e^{\frac{2\pi 0 i}{4}} = 1$

$\omega_{1,4} = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

$\omega_{2,4} = e^{\frac{2\pi 2 i}{4}} = e^{\pi i} = -1$

$\omega_{3,4} = e^{\frac{2\pi 3 i}{4}} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$

$P_e(x^2) = 2x - 1$

$P_e(1^2) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$P_e(i^2) = 2 \cdot i^2 - 1 = -3$

$P_e(-1^2) = 1$

$P_e(-i^2) = -3$

$P_o(x^2) = x - 3$

$P_o(1^2) = -2$

$P_o(-i^2) = -i^2 - 3 = -4$

$P_o(-1^2) = -2$

$P_o(-i^2) = -4$

$P(x) = P_e(x^2) + x P_o(x^2)$

$P(1) = P_e(1^2) + P_o(1^2) = 1 - 2 = -1$

$P(i) = P_e(i^2) + i P_o(i^2) = -3 - i4$

$P(-1) = P_e(1^2) - 1 P_o(-1^2) = 1 + 2 = 3$

$P(-i) = P_e(-i^2) - i P_o(-i^2) = \cancel{-3 - i4}\ -3 + 4i$

$P(x) = (-1, -3-4i, 3, -3+4i)$

$P_e(x) = (-1, 3)$

$P_o(x) = (-3-4i, -3+4i)$

$\omega^{-1} = (1, -i, -1, i)$

$P_e(x) = 3x - 1$

$P_o(x) = (-3+4i)x - 3 - 4i$

$P_o(1^2) = -3 + \cancel{4i} - 3 - \cancel{4i} = -6$

$P_e(1^2) = 2$

$P_e(i^2) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$

$P_o(i^2) = (-3+4i)(-1) - 3 - 4i = -8i$

$P(x) = P_e(x^2) + x P_o(x^2)$

$P(1) = 2 + (-6) = -4$

$P(-i^2) = -4 - i(-8i) = -4 + 8i^2 = -4 - 8 = -12$

$P(-1^2) = 2 - (-6) = 8$

$P(i^2) = -4 + i(-8i) = -4 - 8i^2 = -4 + 8 = 4$

$(-4, -12, 8, 4)\frac{1}{4} = (-1, -3, 2, 1) =$

$= P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

2.

25\30

~~רעיון~~ : האלגוריתם:

* נחלק את הקלט בגודל n ~~ביטים~~ סיביות סיביות ל-$\frac{n}{k}-1$ בלוקים כאשר כל בלוק בגודל k

* אז המכפלה של $x\cdot y$

$$X=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} x_i\cdot 2^{ik} \qquad Y=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} y_i\cdot 2^{ik}$$

כש x_i ו y_i זה מייצגים את הבלוק ה-i בגודל k בפולינים x ו y!!

לא מספיק מדויק. צריך לתאר את הפולינום ולהסביר שx_i הם המקדמים שלו

* נריץ את FFT על x ו y בנפרד ונקבל לכל פולינום $\frac{2n}{k}$ נקודות שמייצגות את הפולינום

* נכפיל את תוצאות כל נקודה נקבל וקטור המכפלה Z כש $|Z|=\frac{2n}{k}$

* לכל נקודה i נחשב את המכפלה בנקודה $Z_i = X(\omega_i)\cdot Y(\omega_i)$

* נריץ IFFT על תוצאת המכפלה ונקבל את המקדמים של הפולינום Z

ואז התוצאה של המכפלה תהיה

$$R_k=\sum_{i=0}^{\frac{2n}{k}-1} z_i 2^{ik}$$

* נחזיר למס' עשרוני ונחזיר את התשובה.

נכונות האלגוריתם

הנכונות נובעת מתוך הנכונות של FFT והנכונה ש-ℓ אין צורך ולטפל במקרים המכפלה מגדילה את מספר הסיביות יותר ממספר ולמספר הבלוקים בסוף המכפלה הבלוק קטן ברקורסיה של FFT

סיבוכיות

(1) חלוקה ~~בגודל~~ לבלוקים נבצעת תוך כדי מעבר לינארי על הקלט $O(n)$

(2) הרצת FFT על x ו y: גודל הקלט = $2n$ סיביות

גם דרך רקורסיבית, אנחנו, מכפלת 2 בלוקים בגודל k ולכן $\Theta(k^2)$

כש $k=\log n$ אז $T(2n)=2T(n)+\frac{n}{\log n}\Theta(\log^2 n)$

$= 2T(n)+\Theta(n\log n)$

לפי משפט האב מקרה $2 \Leftarrow \Theta(n\log^2 n)$

(3*) ולכל אחת מ $\frac{2n}{k}$ הנקודות מתבצעת הכפלה בין 2 פולינומים בגודל k $\Theta(nk)$

(4*) הרצת IFFT אותו דבר כמו ב(2*)

(5*) סכימת ~~[illegible]~~ הפולינומים ב $O(n)$

כלומר זמן הריצה: $T(n)=\Theta(n\log^2 n)$

25/30

שאלה 3

נגדיר שני ~~פולינומים~~ וקטורים x ו y כש x היא וקטור המקדמים של הנגזרת המקורית $x=(n!\cdot a_n,(n-1)!a_{n-1},\dots,0!a_0)$

וקטור y יהיה חזקות של x_0 חלקי $i!$ $y=\left(\frac{x_0^0}{0!},\frac{x_0^1}{1!},\frac{x_0^2}{2!},\dots,\frac{x_0^n}{n!}\right)$

נבצע קונבולוציה בין הוקטורים בעזרת FFT ונקבל וקטור z ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

לחישוב הנגזרת ה-k נבצע

~~[illegible]~~

חסר: נביט בוקטור ההכפלה בכניסה n-k

~~[illegible]~~

$$\sum_{\substack{0\le i,j<k+1\\ i+j=k}} x_i y_j$$

חישוב סיבוכיות:

קנ״ת וקטורים x ו y בגודל n+1 $\Theta(n)$

FFT ב $\Theta(n\log n)$

סה״כ: $T(n)=\Theta(n\log n)$

שאלה 4

האלגוריתם המתואר מפרק את הבעיה ל-7 תתי בעיות בגודל $n/2$
בכל בעיה מוריד פעולת קבל אחת ועוד שני פעולות חיבור חיסור,
פעולת חיבור או חיסור במטריצה היא בעלת סדר גודל של $\theta(n^2)$
(עבור כל האיברים במטריצה)

אז נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^{2})$$

ולפי משפט האב:

$a = 7$, $b = 2$

$$f(n) = O\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{2.8073}\right)$$

$$g(n) = \Theta(n^2)$$

אנו רואים ש $f(n) > g(n)$ אז מדובר במקרה א' של משפט

האב כלומר $T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$