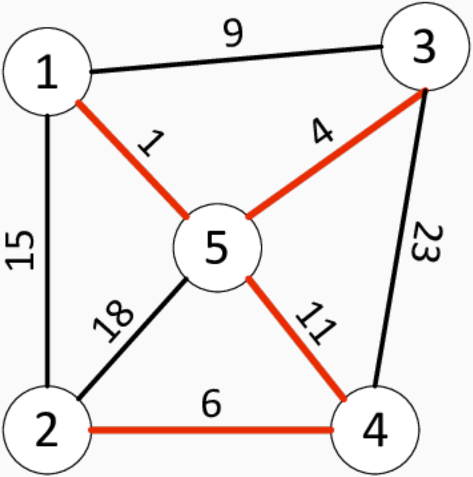
בעיית העץ הפורש המינימאלי (MST)

תרגול 3


1
3
2
4
5
9
1
4
15
23
18
11
6

חלק I

הגדרות ומשפטים

הגדרות מתורת הגרפים

- **גרף פשוט** גרף G הוא פשוט אם אין בו צלעות עצמיות (צלע מקודקוד לעצמו) או צלעות כפולות (יותר מצלע אחת בין זוג קודקודים).
- **מסלול** מסלול בגרף $G = (V, E)$ הוא סידרת קודקודים $< v_0, v_1, \ldots, v_k >$, כאשר לכל $0 \leq i < k$ מתקיים $(v_i, v_{i+1}) \in E$.
- **מסלול פשוט** מסלול $< v_0, v_1, \ldots, v_k >$, הוא פשוט אם כל קדקודיו שונים זמ"ז, כלומר לכל $0 \leq i < j \leq k$ מתקיים $v_i \neq v_j$.
- **מעגל** מסלול $< v_0, v_1, \ldots, v_k >$, כך ש- $v_0 = v_k$.

עץ פורש עץ פורש של גרף קשיר $G = (V, E)$ הוא תת-גרף $T = (V, E_T)$ של G שמכיל את כל קדקודי G וחלק מצלעותיו (כלומר $E_T \subseteq E$), והוא מקיים:

1. T חסר מעגלים.
2. T קשיר (כלומר לכל שני קודקודים קיים מסלול המקשר ביניהם).

משפט 1 (הוכח בכיתה)

יהי H גרף (פשוט ולא מכוון). התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. H קשיר וחסר מעגלים,
2. H חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$,
3. H קשיר ו-$|E| = |V| - 1$
4. יש ב-H מסלול פשוט יחיד בין כל זוג צמתים.

כדי להוכיח שתת הגרף $T = (V, E_T)$ של הגרף $G = (V, E)$ הוא עץ פורש של G, מספיק להראות שאחד מהתנאים הנ"ל מתקיים.

משפט 2 (ללא הוכחה)

יהי

- G גרף,
- $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G
- ו- $e \in E \setminus E_T$.

הגרף $H = (V, E_T \cup \{e\})$ מכיל מעגל ולכל צלע $e' \in E_T$ במעגל,
הגרף $T' = (V, (E_T \cup \{e\}) \setminus \{e'\})$ הוא עץ פורש של G.

הגדרות משקול של עץ פורש

- **עלות של עץ פורש** בהינתן גרף $G=(V,E)$ ופונקצית משקל $w:E\to\mathbb{R}$, נגדיר **עלות** של עץ פורש T להיות סך המשקלות של כל צלעותיו, כלומר $w(T)=\sum_{e\in T} w(e)$.
- **עץ פורש מינימאלי (MST)** של גרף G הוא עץ פורש שעלותו מינימאלית מבין כל עלויות העצים הפורשים את G, כלומר נבקש למצוא עץ פורש T כך ש :

$$w(T)=min_{\tilde{T}\text{ is a spanning tree}}\{w(\tilde{T})\}$$

.

- **הערה-** עץ פורש מינימאלי אינו בהכרח יחיד. יתכנו כמה כאלו, אבל לכולם, כמובן, אותו משקל.

חלק II

שאלות

שאלות

לכל השאלות בתרגול נתון לנו גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקצית משקל על קשתות הגרף $w : E \to \mathbb{R}$.

שאלה 1:

יהי $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w .

נגדיר את w' להיות פונקצית משקל באופן הבא:

$w'(e) = w(e) + c$, כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו.

האם T הוא עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w'?