ברוכים הבאים לקורס אלגוריתמים!

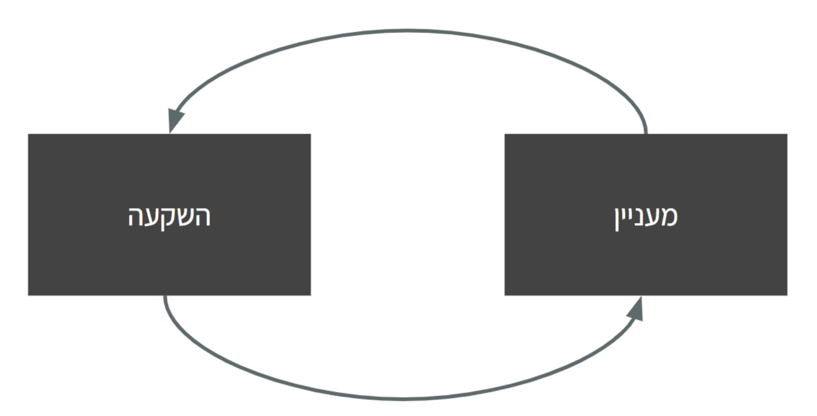
מה אתם עושים פה?

(או - מה אתם חושבים שנעשה פה)

ברוכים הבאים לקורס טעימות של אלגוריתמים!

אנשים אומרים שאלגוריתמים הוא אחד הקורס *הקשים בתואר*

הם צודקים.


השקעה
מעניין

דברים שנגיד פעם אחת

- `oren.roth@openu.ac.il`
- שעת הנחייה: שלישי 14:00-15:00, 0542244598
- אתר הקורס
- ממ"ן ומבחן
  - כל המידע הטכני מופיע בחוברת הקורס
  - לכל ממ"ן יהיה פורום באתר בו תוכלו לשאול שאלות

איך נגרום לזה לעבוד?

- לפני כל שיעור תקראו את החומר (לפי לוח הזמנים שמופיע בחוברת הקורס)
  - אנחנו נדבר בקצרה על חומרים מתוך פרקים 2-1
  - ב3-2 שבועות הראשונים נתחיל בפרק 3
- תשלחו שאלות ונושאים שדורשים הבהרות למייל שלי לפני השיעור
- "מי שמבין חומר בצורה עמוקה יכול להסביר אותו בצורה פשוטה"
- מה עוזר לכם ללמוד חומר מורכב?

התוכנית שלנו להיום

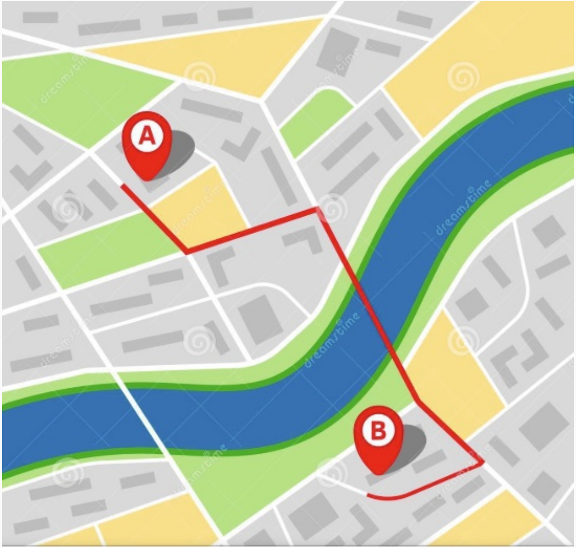
- מבוא והגדרות בסיסיות
- חזרה מהירה על ניתוח זמני ריצה
- מושגים בסיסיים מעולם הגרפים

#התחלנו

חלק I

מבוא והגדרות בסיסיות

בעיה, מופע ופתרון



מה זה אלגוריתם?

מה זה אלגוריתם?

- סדרה של פעולות
- בסיומה מוחזר פלט
- בקורס אנחנו מתרכזים רק באלגורתמים שתמיד מחזירים תשובה נכונה **לכל מופע**

הוכחת נכונות פורמאלית

דוגמא

נתון אלגוריתם אשר "לכל מפת כבישים, עיר מוצא ועיר יעד, האלגוריתם יחזיר מסלול קצר ביותר במפה בין שתי הערים". עלינו להוכיח כי האלגוריתם אכן מקיים את הטענה לעיל תחת שני מקרים:

- ישנו מסלול במפת הכבישים בין שתי ערים נתונות.
- במפת הכבישים אין מסלול בין שתי ערים נתונות.

זמני ריצה

להלן כמה דוגמאות לזמני ריצה, כאשר n מסמל את גודל המופע:

- $O(1)$ - זמן ריצה קבוע. בעיות שניתנות לפיתרון בזמן קבוע (כלומר אינו תלוי בגודל הקלט). לרוב, אינן מעניינות במיוחד.
- $O(log\ n)$ - זמן לוגריתמי.
- $O(n)$ - זמן לינארי.
- $O(n^c)$ - עבור $c \in \mathbb{N}$ - זמן פולינומי.
- $O(2^{cn})$ - עבור $c \in \mathbb{N}$ - זמן אקספוננציאלי. זמן זה נחשב ללא יעיל במיוחד, כאשר הזמן הדרוש לפתרון של קלטים קטנים יחסית יכול להיות עצום.
- *הביטו בטבלה 2.1 בספר (עמוד 39)

כתיבת אלגוריתם בשלושה חלקים

בבואנו לכתוב אלגוריתם הפותר בעיה נתייחס לשלושה אספקטים:

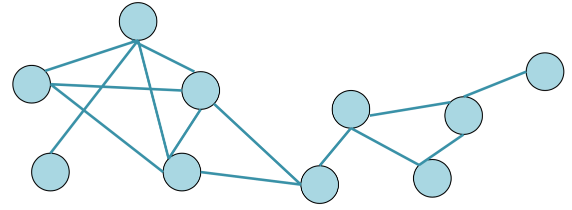
1. תיאור דרך כללית להגעה לפתרון עבור מופע כלשהו של הבעיה (ע"י תיאור אלגוריתם).
2. הוכחת נכונות הדרך שתיארנו (על ידי הוכחה פורמאלית).
3. ניתוח זמן הריצה הדרוש לקבלת הפתרון, בהתאם לדרך שתיארנו.

חלק II

מושגים בסיסיים מעולם הגרפים

מושגים בסיסיים

- גרף לא מכוון הוא זוג $G = (V, E)$
  - V היא קבוצה סופית של איברים הנקראים צמתים או קודקודים.
  - E היא קבוצה של זוגות לא סדורים מתוך V הנקראים קשתות.



מושגים בסיסיים

- **שכן -** צומת v הוא שכן של צומת u, אם קיימת קשת בגרף $\{u,v\}$, היחס כמובן סימטרי.
- **דרגה -** הדרגה של צומת u שווה למספר השכנים של u ומסומנת $deg(u)$.
- **מסלול -** מסלול בגרף הוא סדרה של צמתים $(v_1,\ldots,v_k)$ שבה כל זוג (v_i,v_{i+1}) היא קשת בגרף.

מושגים בסיסיים

- **אורך מסלול -** מספר הקשתות במסלול. אורך המסלול $(v_1, \ldots, v_k)$ הוא $k-1$
- **מרחק בין צמתים -** אורך המסלול הקצר ביותר המחבר אותם. אם אין מסלול כזה, המרחק מוגדר להיות אינסוף.
- **מסלול פשוט-** מסלול בו שום צומת איננו מופיע יותר מפעם אחת.

מושגים בסיסיים

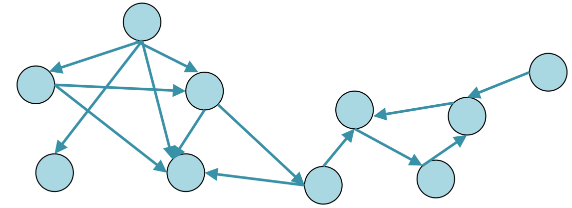
- **מעגל -** מסלול המכיל לפחות שלושה צמתים שונים ובו הצומת הראשון והאחרון זהים, כל שאר הצמתים במסלול מופיעים בדיוק פעם אחת.
- **גרף קשיר -** גרף נקרא קשיר אם בין כל זוג צמתים בגרף קיים מסלול המקשר אותם.
- **תת-גרף-** $H = (V', E')$ נקרא תת-גרף של הגרף $G = (V, E)$, אם H הוא גרף וגם, $V' \subseteq V \quad E' \subseteq E,$

מושגים בסיסיים

- **עץ –** גרף קשיר ללא מעגלים.
- **עץ מושרש –** עץ עם שורש מיוחד הנקרא שורש. צומת v הוא צאצא של צומת u אם u מופיע על המסלול הפשוט (היחיד) המחבר את v לשורש.

מושגים בסיסיים - גרפים מכוונים

- **גרף מכוון** הוא זוג $G = (V, E)$
  - V היא קבוצה סופית של איברים הנקראים צמתים או קודקודים.
  - E היא קבוצה של זוגות **סדורים** מתוך V הנקראים קשתות.

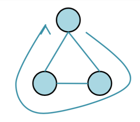


מושגים בסיסיים - גרפים מכוונים

- **דרגת כניסה של צומת** v **–** מספר הקשתות הנכנסות ל v .
- **דרגת יציאה של צומת** v **–** מספר הקשתות היוצאות מ v .
- **DAG** גרף מכוון ללא מעגלים מכוונים בגרף.
- **קשירות היטב -** u ו- v קשירים היטב, אם קיים מסלול מכוון מ u ל v וכמו כן מ v ל u .

שאלה 1

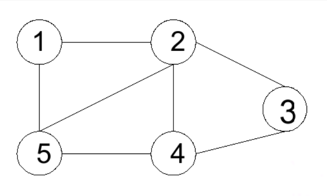
- נקרא למסלול "מסלול פשוט קשתות" אמ"מ אין בו קשת החוזרת פעמיים
- הוכח או הפרך ע"י מתן דוגמא נגדית
  - האם כל מסלול פשוט הוא מסלול פשוט קשתות?
    - נכון. נניח בשלילה שלא. אזי במסלול קיימת קשת המופיעה פעמיים במסלול, ולכן הקודקדים הסמוכים לה מופעים פעמים, והמסלול אינו פשוט, בסתירה להנחה.
  - האם כל מסלול פשוט-קשתות הוא מסלול פשוט?
    - לא נכון. להלן דוגמא נגדית



גרפים

- מבני נתונים לשמירת גרפים:
  - מטריצת סמיכויות
  - רשימת סמיכויות

מטריצת סמיכויות - דוגמא



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

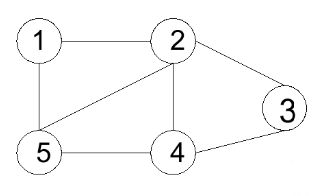
מטריצת סמיכויות:

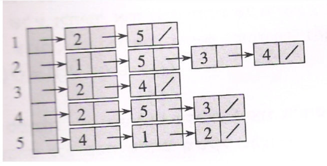
- מטריצה $A = (a_{ij})$ שמימדיה $|V| \times |V|$ וערכי איבריה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (i, j) \in E \\ 0, otherwise \end{cases}$$

- הייצוג ע"י מטריצת סמיכויות עשוי להיות עדיף כאשר הגרף צפוף או כאשר נדרשת היכולת לגלות במהירות אם קיימת קשת המחברת שני קודקודים נתונים.

רשימת סמיכויות - דוגמא





רשימת סמיכויות

- הייצוג ע"י רשימות סמיכות של גרף $G = (V, E)$ מורכב ממערך Adj של $|V|$ רשימות, אחת עבור כל קדקוד ב- V.
- עבור כל u מ- V רשימת $Adj[u]$ מכילה מצביעים לכל הקודקודים v שעבורם קיימת קשת (u, v) .
- בד"כ קודקודים בכל רשימת סמיכות מאוחסנים בסדר שרירותי.

עלות מקום לייצוגים

- עלות המקום כאשר מייצגים גרף בעזרת מטריצת סמיכויות: $\Theta(|V|^2)$
- ובייצוג על ידי רשימת סמיכויות: $\Theta(|V|+|E|)$

נתון גרף מכוון G, השלם את זמני הריצה בטבלה:

שאלה	מטריצה	רשימה
$E \ni (u,v)$?	$O(1)$	$O(\|V\|)$
האם הגרף ריק?	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\|)$
מצא את כל שכניו של צומת v כלשהיא	$\Theta(\|V\|)$	$O(\|V\|)$

טכניקות בסיסיות ושימושיות מאוד

- אינדוקציה
- עקרון שובך היונים: אם מכניסים $n+1$ ל n שובכים אז קיים שובך אחד בו לפחות 2 יונים.
  שימוש: כל מסלול בגרף בעלת $n+1$ קודקודים מכילה מעגל.
- בגרף לא מכוון:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

שאלה 2

הראה שבכל גרף בלתי מכוון וקשיר $|E| \geq |V| - 1$

שאלה 3

הראו שבכל DAG (גרף מכוון חסר מעגלים) יש קודקוד מקור (קודקוד שדרגת הכניסה אליו היא 0)