האוניברסיטה
הפתוחה

אלגוריתמים

מדריך למידה

מנור מנדל
זאב נוטוב

מדריך למידה לספר **פיתוח אלגוריתמים** פרקים 1–7, ג'. קליינברג, א. טארדוש.
תרגום לעברית בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה, 2010.

20417
מהדורה פנימית
לא להפצה ולא למכירה
מק"ט 20417–5137

צוות הקורס

כתיבה:
פרופ' מנור מנדל
פרופ' זאב נוטוב

יועץ:
דניאל רייכמן

עורכת:
דפי בר אילן

הדפסה דיגיטלית – אוגוסט 2019

בית ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע"ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת"ד 808, רעננה 4353701.
The Open University of Israel, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 4353701.
Printed in Israel.

תוכן העניינים

רשימת האיורים

רשימת האלגוריתמים

הקדמה

מדריך למידה זה ילווה אתכם במשך לימוד הקורס אלגוריתמים. בספר הקורס שבעה פרקים, והוא תרגום לעברית של הספר Algorithm Design מאת Eva Tardos & Jon Kleinberg, הוצאת Pearson, מהדורה ראשונה, 2006 (במקור 13 פרקים).

מטרות הקורס הן:

- תרגול התהליך של פיתוח אלגוריתמים: בהינתן בעיה אלגוריתמית מעשית הלקוחה "מהחיים", עלינו לבצע את הפעולות האלה: 1. פישוט הבעיה והסרת פרטים לא מהותיים מהגדרת הבעיה; 2. ניסוי שיטות אלגוריתמיות שונות; 3. מציאת שיטה "טובה"; 4. כתיבת הוכחה מתמטית של נכונות האלגוריתם המוצע וניתוח יעילותו.
- הצגה שיטתית של פרדיגמות אלגוריתמיות בסיסיות, כגון שיטות סריקה בגרפים, שיטות חמדניות, הפרד ומשול, תכנון דינמי, זרימות וחתכים בגרפים.
- שימוש בשיטות האלה לפיתוח אלגוריתמים לפתרון בעיות אלגוריתמיות קלאסיות, כגון תכנון לוחות זמנים, מציאת מסלול קצר ביותר בגרפים, או מציאת עץ פורש מינימלי.

קורס זה, כמו הקורסים במבני נתונים, הינו בסיס חשוב לקורסים שתלמדו בהמשך, אבל השיטות לפתרון בעיות אלגוריתמיות שתלמדו בקורס הזה הינן שיטות מתקדמות יותר מאלה שלמדתם בקורסים קודמים. כמו כן מושם בקורס הזה דגש רב יותר על הדרישה להוכחות פורמליות של נכונות אלגוריתמים.

כל פרק בספר מתחיל בתיאור דוגמה שיש לה שימוש מעשי, והספר מתרגם אותה לבעיה אלגוריתמית מופשטת, כך שיהיה אפשר לתקוף אותה בשיטות פורמליות. הספר מציע כמה אפשרויות לפתרון "טבעי" או אינטואיטיבי, ומתקדם תוך כדי פסילה של חלק מהן, עד שהוא מגיע לאלגוריתם שאין דוגמה שיכולה לפסול אותו. לבסוף, מובא פתרון אלגוריתמי מלא, כולל הוכחת נכונות וניתוח סיבוכיות. אלה הם למעשה השלבים שעובר כל מפתח אלגוריתמים.

בכל פרק בספר יש כ־30 תרגילים, בשניים מהם מובא פתרון מלא (שימו לב, הפתרונות בספר מפורטים יותר מהנדרש בממ"נים). כיוון שהספר מפורט מאוד ומרבה בדיונים אינטואיטיביים, לא מצאנו לנכון להרחיב את הדיון בכיוונים אלה. במדריך למידה זה תמצאו בין היתר תמצות של האלגוריתמים והוכחת נכונותם, כאשר לעתים ההוכחות שונות במקצת (בדרך כלל קצרות יותר) מאלה שבספר הלימוד.

כיצד לקרוא את המדריך ואת הספר. אנו ממליצים להתחיל את תהליך הלימוד בקריאת מדריך הלמידה (להלן "המדריך"). בדרך כלל המדריך יפנה אתכם לקריאת סעיפים בספר הלימוד (בהמשך נכנה אותו בקיצור "הספר"), לאחר מכן ידון המדריך בחומר הלימוד המוגש בספר, תוך תמצות החומר והוספת דוגמאות. במקרים אחדים הוספנו נושאים שאינם נכללים בספר, ובחרנו להרחיבם ולפרטם יותר. בכל פרק של המדריך תמצאו כמה תרגילים – רובם עם פתרונות מלאים. אנו ממליצים לנסות לפתור תרגילים נוספים ממגוון התרגילים המובאים בסוף כל פרק בספר.

שימו לב, המדריך מכיל הפניות לא רק לחומרים שמופיעים במדריך, אלא גם לחומרים שמופיעים בספר. **אם לא מצוין אחרת – ההפניה היא למדריך. בהפניות לספר יצוין "הספר" במפורש.** לדוגמה:

הפניה לאיור 1.4 היא הפניה לאיור 1.4 במדריך, ואילו בהפניה לאיור 1.4 בספר תמיד יירשם "איור 1.4 בספר".

מספרי הפרקים במדריך תואמים למספרי הפרקים בספר, אך מספור ה**סעיפים** אינו תואם בהכרח.

אנו תקווה שתפיקו מקורס זה את המרב.

מנור מנדל וזאב נוטוב
רעננה, 2010

הקדמה למהדורה השנייה

במהדורה זו סעיף 4.3 וסעיף 4.9 שונו לסעיפי חובה. כמו כן תוקנו טעויות כתיב, נוספו הפניות ישירות בגרסה האלקטרונית ושופר העימוד והפונטים. בעקבות עדכון העימוד, שונו מספרי העמודים.

מנור מנדל וזאב נוטוב
רעננה, 2019

פרק 1
מבוא לקורס: בעיות מייצגות

1.1 זיווג יציב

בסעיף הזה נראה דוגמה לבעיה שבאופן מעט מפתיע אפשר לפתור אותה ביעילות בעזרת אלגוריתם פשוט, אך "חכם". הבעיה היא בעיית הזיווג היציב: בהינתן אוסף של נשים וגברים שלכל אחד ואחת מהם יש סדר מלא של העדפות לבן זוג מהמין השני, יש למצוא זיווג, כך שלא יווצרו "בגידות".

קראו בספר את סעיף 1.1

להלן נביא תיאור מדויק וקצר של הבעיה. נניח כי $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ ו־$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ הן שתי קבוצות, בנות n עצמים ("גברים" ו"נשים" בהתאמה). אוסף של זוגות סדורים $S \subseteq M \times W$ נקרא זיווג [matching] אם אין אף גבר ואין אף אישה המופיעים יותר מפעם אחת ב־S. זיווג S נקרא זיווג מושלם [perfect matching] אם כל גבר וכל אישה מופיעים בדיוק פעם אחת ב־S.

נניח עתה שלכל גבר m יש רשימת העדפות P_m שבה מסודרות הנשים בסדר מלא, ובאופן דומה, לכל אישה w יש רשימת העדפות P_w שבה מסודרים הגברים בסדר מלא.

אנו נאמר ש־S איננו יציב אם ישנם שני זוגות $(m, w), (m', w') \in S$ כך ש־m מעדיף את w' על פני w, ו־w' מעדיפה את m על פני m'. במלים אחרות, בזיווג S יש שני זוגות (m, w) ו־(m', w') שהם זוגות לא יציבים, כי m ו־w' מעדיפים זה את זה על פני בני הזוג הנוכחיים שלהם ב־S. הזוג $(m, w') \notin S$ ייקרא **אי־יציבות** ביחס ל־S.

הגדרה 1.1. זיווג יציב הוא זיווג מושלם שאין אי־יציבות ביחס אליו.

החשיבות החברתית של זיווג יציב היא ברורה: זהו סוג של שיווי משקל שבו אין גבר m ואין אישה w' ששניהם רוצים להחליף את בני זוגם הנוכחיים לטובת יצירת הזוג (m, w'). יש כמובן זיווגים יציבים שבהם חלק מהגברים ומהנשים אינם מזווגים לבן הזוג המועדף עליהם, כפי שאפשר לראות בדוגמה הבאה.

דוגמה 1.1. יהיו $M = \{m, m'\}$, $W = \{w, w'\}$ ונניח ש־$P_m = (w, w')$ (בסדר עדיפות יורד), $P_{m'} = (w', w)$, $P_w = (m', m)$ ו־$P_{w'} = (m, m')$. זיווג יציב אחד הוא

$$\{(m, w),\ (m', w')\}.$$

במקרה הזה, שני הגברים קיבלו את העדפתם הראשונה והם לא ירצו להחליף בנות זוג, לכן זהו זיווג יציב. הנשים, לעומת זאת, מזווגות כל אחת להעדפה השנייה ברשימה שלה. זיווג יציב אחר הוא

$$\{(m, w'),\ (m', w)\}.$$

בזיווג הזה, הנשים זווגו לפי ההעדפה הראשונה שלהן ולכן הן לא ירצו להחליף בני זוג. לעומת זאת, הגברים נותרים לא מרוצים.

◀ תרגיל 1.1
נתון מופע חלקי של בעיית הזיווג היציב:

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} \qquad W = \{w_1, w_2, w_3\}$$
$$P_{m_1} = (w_1, w_2, w_3) \qquad P_{w_1} = (m_3, m_2, m_1)$$
$$P_{m_2} = (w_1, w_3, w_2) \qquad P_{w_2} = (m_3, m_1, m_2)$$
$$P_{m_3} = (w_2, w_1, w_3) \qquad P_{w_3} = ?$$

רשימת ההעדפות של w_3 עדיין אינה מוגדרת. עבור כל אחת מ־$3! = 6$ רשימות העדיפות האפשריות של w_3 מצאו זיווג יציב עבור המופע המתקבל. **פתרון בעמ' 5 ◀**

אלגוריתם G–S. האלגוריתם של גייל ושאפלי לחישוב זיווג יציב מתואר בספר. לשם הנוחות העתקנו אותו לכאן, והוא רשום כאלגוריתם 1.1.

Algorithm 1.1 Gale–Shapley

Initially all $m \in M$ and $w \in W$ are free
while there is a man m who is free and hasn't proposed to every woman **do**
    Choose such a man m
    Let w be the highest-ranked woman in m's preference list to whom m has not yet proposed
    if w is free **then**
        (m, w) become engaged
    else $\{w$ is currently engaged to $m'\}$
        if w prefers m' to m **then**
            m remains free
        else $\{w$ prefers m to $m'\}$
            (m, w) become engaged
            m' becomes free
return the set S of engaged pairs

נחזור עתה על ניתוח האלגוריתם. בשלב זה נוכיח רק את נכונותו. סיבוכיות האלגוריתם תנותח בפרק 2, יחד עם הגדרת מבני הנתונים הנדרשים.

ניתוח נכונות קל לראות (טענה 1.3 בספר) שהאלגוריתם מסתיים לאחר n^2 איטרציות של לולאת While לכל היותר, כי לכל זוג (m, w) במהלך האלגוריתם, m מציע אירוסין ל־w לכל היותר פעם אחת; בכל איטרציה של הלולאה מוצעים אירוסין, ויש רק n^2 זוגות מהצורה (m, w).

◀ תרגיל 1.2
תנו דוגמה לרשימת העדפות של n גברים ו־n נשים, שבה מספר האיטרציות שיבצע אלגוריתם G–S (בכל ריצה אפשרית על קלט זה) יהיה:

1. $\Omega(n^2)$.
2. $O(n)$.

◀ פתרון בעמ' 5

קל לראות שבמהלך ריצת האלגוריתם, אוסף הזוגות המאורסים מהווה זיווג, כיוון שזוג יכול להיוסף לזיווג רק אם שני בני הזוג היו חופשיים, או שהאישה הייתה מאורסת, ובמקרה זה הארוס הקודם שלה הפך לחופשי.

בשלב הבא מראים שהאלגוריתם מסתיים עם זיווג מושלם (טענה 1.5 בספר). נניח בשלילה שקיימים $m \in M$, $w \in W$ שאינם מזווגים בזיווג אותו מחזיר אלגוריתם G–S. נשים לב כי:

1. אישה המתארסת בשלב כלשהו של האלגוריתם, לא הופכת לחופשייה עד סוף האלגוריתם.
2. כיוון שבסיום ביצוע האלגוריתם m עודנו חופשי, משתמע שהוא בהכרח הציע אירוסין לכל הנשים.

בפרט, נובע בהכרח ש־m הציע ל־w, ולכן לאחר הצעתו, w הייתה מאורסת (אם היא לא הייתה מאורסת לפני כן, היא מחויבת לקבל את ההצעה של m), מכאן ש־w סיימה את האלגוריתם מאורסת, בסתירה להנחת השלילה.

נותר לטעון שהזיווג המושלם המתקבל אינו מכיל אי־יציבות (טענה 1.6 בספר). לצורך זה אנו מבחינים תחילה שלכל אישה w, סדרת בני הזוג להם היא מאורסת במהלך האלגוריתם היא סדרה עולה ברשימת ההעדפות שלה (של w). עתה נניח בשלילה שיש אי־יציבות בזיווג המושלם S שהאלגוריתם מחזיר, כלומר יש שני זוגות $(m, w), (m', w') \in S$ כך ש־m מעדיף את w' על פני w, ו־w' מעדיפה את m על פני m'. כיוון ש־m סיים מאורס ל־w הוא בהכרח הציע ל־w' אירוסין, וכיוון ש־m הציע אירוסין ל־w רק לאחר שהציע לכל הנשים בעדיפות גבוהה יותר ברשימות ההעדפות שלו, הוא בהכרח הציע אירוסין לפני זה ל־w'. לאחר הצעת האירוסין מ־m, w' בהכרח מאורסת למישהו שנמצא ברמת עדיפות של m או בעדיפות גבוהה יותר. ומרגע זה היא לא "יורדת ברמה", כלומר היא כבר לא תהיה מאורסת למישהו בעדיפות נמוכה יותר. אך על פי ההנחה היא סיימה את האלגוריתם מאורסת ל־m' שנמצא נמוך יותר מ־m ברשימת ההעדפות שלה, וזו סתירה. בזאת הסתיימה הוכחת הנכונות של אלגוריתם G–S. □

נציין כי אלגוריתם 1.1 אינו מגדיר תוואי ריצה יחיד – כל גבר חופשי יכול להציע אירוסין. למרות זאת, בכל תוואי ריצה, הפלט תמיד יהיה אותו דבר: כל גבר m מזווג לאישה שנמצאת **בעדיפות הגבוהה ביותר** ברשימת ההעדפות שלו, מבין כל הנשים שמזווגות ל־m באיזשהו זיווג יציב (טענה 1.7 בספר). באופן סימטרי, כל אישה w מזווגת לגבר שנמצא **בעדיפות הנמוכה ביותר** שלה מבין הגברים שמזווגים ל־w באיזשהו זיווג יציב (טענה 1.8 בספר).

◀ **תרגיל 1.3** (זיווג פוליגני)

נניח כעת ש־ $n = |M| \leq n' = |W|$ וכי לכל גבר $m \in M$ נתון מספר $t_m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\sum_{m \in M} t_m = n'.$$

אנו מכלילים את מושג הזיווג S ל"זיווג פוליגני" שבו כל גבר $m \in M$ צריך להיות מזווג ל־t_m נשים, וכל אישה צריכה להיות מזווגת לגבר אחד. נוסף על כך, הזיווג S צריך להיות יציב, כלומר לא קיימים $(m, w), (m', w') \in S$ כך ש־$m \neq m'$ m מעדיף את w' על פני w, ו־w' מעדיפה את m על פני m'.

הוכיחו שבתנאים האלה קיים תמיד זיווג פוליגני יציב, והציעו אלגוריתם יעיל לחישוב זיווג כזה.

◀ פתרון בעמ' 6

1.2 בעיות מייצגות

קראו בספר מתחילת סעיף 1.2 עד תת־הסעיף "קבוצה בלתי תלויה" (לא כולל)

בסעיף 1.2 בספר מוצגות חמש בעיות אלגוריתמיות; קראו רק את שלוש הראשונות:

1. **תזמון מקטעים:** בהינתן קבוצה של מקטעים, יש למצוא את תת־הקבוצה הגדולה ביותר של מקטעים זרים בזוגות.
2. **תזמון מקטעים ממושקלים:** בהינתן קבוצה $\mathcal{I}$ של מקטעים ממושקלים, יש למצוא תת־קבוצה $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ של מקטעים זרים בזוגות, הממקסמת את סכום משקלות המקטעים ב־$\mathcal{J}$.
3. **זיווג מקסימלי:** בהינתן אוסף של גברים ונשים ואוסף E של זוגות מעורבים, יש למצוא זיווג $M \subseteq E$ גדול ככל האפשר.

את הבעיה הראשונה אפשר לפתור בשיטות "חמדניות" – נלמד אותן בפרק 4. הבעיה השנייה היא הכללה של הראשונה והיא מסובכת יותר לפתרון. עבורה נפתח בפרק 6 שיטה הנקראת "תכנון דינמי". את הבעיה השלישית אפשר לפתור על ידי רדוקציה לבעיית "זרימה ברשתות" שבה נדון בפרק 7.

לפני כן, בפרק 2 נחזור על המושג סיבוכיות אסימפטוטית, ועל מבני נתונים פשוטים הנדרשים באלגוריתמים שיוצגו בהמשך הקורס. שני הנושאים האלה נלמדו בקורסים שעסקו במבני נתונים, ולכן נדון בהם בקצרה. בפרק 3 נלמד את המושג גרף, שתפקידו לייצג קשרים בין אובייקטים, והוא מאפשר, למשל, להגדיר באלגנטיות את שלוש הבעיות שלעיל. בנוסף נלמד כמה שיטות בסיסיות לסריקת גרפים. פרק 5 יעסוק בשיטה אלגוריתמית הנקראת "הפרד־ומשול" שנמצאת למשל בבסיס האלגוריתם מיון־מיזוג והאלגוריתם מיון מהיר שנלמדו בקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים".

לבסוף נציין שבהמשך הסעיף בספר נדונות עוד שתי בעיות. לבעיות אלה לא ידועים אלגוריתמים יעילים הפותרים אותן, והם לא יידונו בקורס הנוכחי. תלמדו עליהם בקורס "חישוביות ומבוא לסיבוכיות" או בקורס לתואר שני "אלגוריתמי קירוב".

1.3 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 1.1 (מעמוד 2)
השאלה לא הגדירה מופע יחיד של בעיית הזיווג היציב, אלא 6 מופעים שונים בהתאם לערכה של P_{w_3}. במקום לעבור על כל אחד מהמופעים הללו, אנו נסרוק את מרחב הפתרונות האפשריים. כל זיווג יציב הוא בפרט זיווג מושלם. ישנם $3! = 6$ זיווגים מושלמים. נעבור על הזיווגים הללו ונבדוק אילו מהם יכולים להיות זיווג יציב לאחד מ־6 בעיות הזיווג היציב שלפנינו. אנו נראה שכולם, למעט אחד, אינם יציבים ללא תלות ב־P_{w_3}. רק הזיווג M_5 (המוגדר למטה) הוא יציב עבור כל ערך של P_{w_3}.

1. הזיווג $M_1 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$ אינו זיווג יציב כי הזוג (m_3, w_2) הוא אי־יציבות ביחס ל־M_1.
2. הזיווג $M_2 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_2)\}$ אינו זיווג יציב כי הזוג (m_2, w_1) הוא אי־יציבות ביחס ל־M_2.
3. הזיווג $M_3 = \{(m_1, w_2), (m_2, w_1), (m_3, w_3)\}$ אינו זיווג יציב כי הזוג (m_3, w_2) הוא אי־יציבות ביחס ל־M_3.
4. הזיווג $M_4 = \{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}$ אינו זיווג יציב כי הזוג (m_3, w_2) הוא אי־יציבות ביחס ל־M_4.
5. הזיווג $M_5 = \{(m_1, w_3), (m_2, w_1), (m_3, w_2)\}$ הוא זיווג יציב: m_2 ו־m_3 מזווגים לעדיפות הראשונה שלהם ולכן לא יהיו חלק מאי־יציבות. נותרו רק (m_1, w_1) ו־(m_1, w_2) כאי־יציבויות פוטנציאליות. הזוג (m_1, w_1) אינו אי־יציבות כי w_1 מעדיפה את בן הזוג הנוכחי שלה, m_2, על פני m_1. גם הזוג (m_1, w_2) אינו אי־יציבות כי w_1 מעדיפה את בן הזוג הנוכחי שלה, m_3, על פני m_1.
6. הזיווג $M_6 = \{(m_1, w_3), (m_2, w_2), (m_3, w_1)\}$ אינו זיווג יציב כי הזוג (m_1, w_2) הוא אי־יציבות ביחס ל־M_6.

פתרון תרגיל 1.2 (מעמוד 2)
1. נגדיר לכל הגברים אותה רשימת העדפות, לדוגמה,

$$P_{m_i} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \ \ i \in \{1, \ldots, n\} .$$

אלגוריתם G–S מחשב זיווג יציב כלשהו

$$\{(m_1, w_{\pi(1)}), (m_2, w_{\pi(2)}), \ldots, (m_n, w_{\pi(n)})\} ,$$

כאשר π היא תמורה [permutation] כלשהי של $\{1, \ldots, n\}$. על פי הדרך שבה אלגוריתם G–S עובד, m_i צריך להציע אירוסין ל־$\pi(i)$ נשים, ולכן מספר הצעות האירוסין (= מספר האיטרציות) הוא בסך הכול:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(i) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

.2 נגדיר לגברים רשימות העדפות כך שלכל גבר תהיה עדיפות ראשונה שונה, לדוגמה:

$$\begin{aligned}
P_{m_1} &= (w_1, w_2, \ldots, w_n),\\
P_{m_2} &= (w_2, w_1, w_3, w_4, \ldots, w_n),\\
P_{m_3} &= (w_3, w_1, w_2, w_4, w_5, \ldots, w_5),\\
&\vdots\\
P_{m_i} &= (w_i, w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n),\\
&\vdots\\
P_{m_n} &= (w_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}),
\end{aligned}$$

בריצת אלגוריתם G–S על הקלט הזה, כל גבר m_i יציע תחילה אירוסין ל־w_i, וריצת האלגוריתם תסתיים לאחר n הצעות אירוסין.

פתרון תרגיל 1.3 (מעמוד 3)

בעיית הזיווג הפוליגני היציב בברור מכלילה את בעיית הזיווג היציב: עבור מופע של בעיית הזיווג היציב, נבנה מופע של בעיית הזיווג הפוליגני כאשר $t_m = 1$ לכל $m \in M$.

כפי שנראה עתה, ניתן בקלות יחסית גם לעבור בכיוון ההפוך: בהינתן מופע $\mathcal{I} = (M, W, (t_m)_{m\in M}, (P_m)_{m\in M}, (P_w)_{w\in W})$ של בעיית הזיווג הפוליגני היציב, נבנה (בעזרת אלגוריתם פשוט בזמן לינארי) מופע $\mathcal{I}' = (M', W', (P'_{m'})_{m'\in M'}, (P'_{w'})_{w'\in W'})$ של בעיית הזיווג היציב אשר מפתרונו – הזיווג היציב S' – ניתן יהיה בקלות לגזור זיווג פוליגני יציב S ל־$\mathcal{I}$.

בניית המופע $\mathcal{I}'$. באופן לא פורמלי, $\mathcal{I}'$ יתקבל מ־$\mathcal{I}$ על ידי החלפת כל גבר m ב־t_m "עותקים" שלו. פורמלית לכל $m \in M$ נגדיר t_m "עותקים" $m_1, \ldots, m_{t_m}$. עתה נגדיר $M' = \{m_i : m \in M,\ i \in \{1, \ldots, t_m\}\}$, $P'_{m_i} = P_m$, $W' = W$, ו־P'_w מתקבל מ־P_w על ידי שכפול כל גבר m ל־t_m עותקים ב־P'_w כך שהסדר בין גברים שונים נשמר. כלומר לכל שני גברים שונים $m, m' \in M$, $m \neq m'$, אם w מעדיפה את m על פני m' ב־P_w אז w מעדיפה את m_i על פני m'_j ב־P'_w לכל $i \in \{1, \ldots, t_m\}$ ולכל $j \in \{1, \ldots, t_{m'}\}$.

לאחר פתרון מופע בעיית הזיווג היציב $\mathcal{I}'$ מתקבל זיווג יציב S'. ממנו נייצר זיווג פוליגני כדלקמן:

$$S = \{(m, w) |\ \exists i \in \{1, \ldots, t_m\}\, (m_i, w) \in \mathcal{M}'\}.$$

כלומר, כל גבר m מזווג לכל הנשים שזווגו ל"עותקים" שלו.

טענה 1.1. S הינו זיווג פוליגני יציב עבור $\mathcal{I}$.

הוכחה. כיוון ש־S' הינו זיווג מושלם, נובע מיידית ש־S הינו זיווג פוליגני מושלם. נבדוק עתה שהוא גם יציב. נניח בשלילה שקיימים $(m, w), (m', w') \in S$, $m \neq m'$ וגם ש־ m מעדיף את w' על פני w, וש־w' מעדיפה את m על פני m' (ב־P_w). מהגדרת S קיימים $i \in \{1, \ldots, t_m\}$ ו־$i' \in \{1, \ldots, t_{m'}\}$, כך ש־$(m_i, w), (m'_{i'}, w') \in S'$. כיוון שסדרת ההעדפות של m_i זהה לסדרת ההעדפות של m, m_i מעדיף את w' על פני w. כיוון ש־w' מעדיפה את m על פני m' ב־P_w, על פי הגדרת P'_w היא מעדיפה את m_i על פני $m'_{i'}$ ב־P'_w. מכאן שמצאנו אי־יציבות ב־S', וזו סתירה. ■

פרק 2
יסודות ניתוח אלגוריתמים

פרק זה חוזר על חלקים מהקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים". במקומות בהם יש חזרה אנו נציין זאת ונשאיר לכם להחליט אם אתם זקוקים לרענון ידיעותיכם.

2.1 פתירות חישובית

קראו בספר מתחילת פרק 2 עד סוף סעיף 2.1

סעיף זה מציג את אמת המידה העיקרית שתשמש אותנו לציון אלגוריתם יעיל (תיאורטית): זמן הריצה הגרוע ביותר על קלטים באורך n החסום מלמעלה על ידי פולינום כלשהו ב־n.

◄ **תרגיל 2.1**

עבור זמני הריצה הבאים, בדקו אם הם זמני ריצה פולינומיאליים (כלומר חסומים על ידי פולינום כלשהו) או לא.

1. $T(n) = 3n^{3.5}$,
2. $T(n) = 5n^2 + 3n2^{\log^2 n}$,
3. $T(n) = 2^{2^{\sqrt{\log n}}}$,
4. $T(n) = (\log n)^{\log n}$.

פתרון בעמ' 9 ►

בקורס זה אנו מעוניינים לדעת, על פי רוב, את סדר הגודל של זמן הריצה עד כדי קבוע כפלי. לחלק מהבעיות האלגוריתמיות יש כמה פרמטרי "גודל" טבעיים; אנו נציין את סיבוכיות האלגוריתמים לבעיות אלה כפונקציה של הפרמטרים האלה, ולא נסתפק בציון אורך הקלט בלבד.

2.2 קצב גידול אסימפטוטי

חומר זה נלמד בקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים". אם ברצונכם לרענן את זיכרונכם:

קראו בספר את סעיף 2.2

2.3 יישום יעיל לאלגוריתם G-S

קראו בספר את סעיף 2.3

בפרק 1 הובא תיאור של אלגוריתם G–S (אלגוריתם 1.1) לחישוב זיווג יציב. ראינו שהאלגוריתם מבצע $O(n^2)$ איטרציות, אך לא ניתחנו זמן ריצה, מפני שלא תיארנו כיצד בדיוק לממש כל איטרציה. מימוש נאיבי של האלגוריתם עלול להוביל לזמן ריצה בסדר גודל n לכל איטרציה, וזמן ריצה כולל של $\Omega(n^3)$. בסעיף זה אנו רואים ששימוש נבון במבני נתונים פשוטים – מערכים, רשימות מקושרות ומטריצות (שנלמדו בקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים") – מאפשר לבצע כל איטרציה בזמן קבוע, והזמן הכולל לביצוע האלגוריתם יהיה אם כן $O(n^2)$.

2.4 סקירת זמני ריצה שכיחים

קראו בספר את סעיף 2.4

2.5 תור קדימויות

סעיף זה חוזר על התיאור של תור קדימויות ומימוש יעיל בעזרת **ערמה** – מושגים שנלמדו בקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים". אם ברצונכם לרענן את זיכרונכם:

קראו בספר את סעיף 2.5

2.6 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 2.1 (מעמוד 7)

1. פולינומיאלי. הפולינום $S(n)$ המוגדר להלן מקיים:

$$S(n) = 4n^4 = T(n) \cdot \sqrt{n} \geq T(n).$$

האי־שוויון האחרון מתקיים כיוון ש־$n \geq 1$.

2. לא פולינומיאלי. יהי $d \geq 1$ ו־$S(n) = a_d n^d + \cdots + a_1 n + a_0$ פולינום כלשהו, ונוכיח שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$T(n) > S(n)$ עבור כל $n \geq n_0$ (לתנאי הזה אנו קוראים באופן לא פורמלי "$T(n) > S(n)$ עבור n מספיק גדול"). נסמן $A = |a_d| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, ו־$R(n) = An^d$. ברור ש־$R(n) \geq S(n)$ לכל $n \geq 1$. עתה נראה ש־$T(n) > R(n) \geq S(n)$ עבור n מספיק גדול ובזאת סיימנו. ואמנם, עבור $n > A2^d$,

$$T(n) > 2^{\log^2 n} = n^{\log n} > n^{\log A} n^d \geq An^d.$$

האי־שוויון האחרון מתקיים כיוון ש־$n > 2^d \geq 2^1 = 2$, ולכן $n^{\log A} \geq 2^{\log A} = A$.

3. לא פולינומיאלי. כמו בסעיף הקודם, מספיק להראות שלכל $d \in \mathbb{N}$ ו־$A > 0$, מתקיים $T(n) > An^d$ עבור n מספיק גדול. נוציא log פעמיים משני האגפים ונניח ש־$n \geq \max\{2^{d+1}, A\}$. מכאן ש־

$$\log\log(An^d) \leq \log\log n^{d+1} = \log(d+1) + \log\log n \leq 2\log\log n.$$

לכן מספיק להראות ש־$\sqrt{\log n} > 2\log\log n$ עבור n מספיק גדול. על ידי הצבה $x = \sqrt{\log n}$ מספיק להראות $x > 2\log(x^2) = 4\log x$ עבור x מספיק גדול. ואמנם, קל לראות שעבור $x > 16$, מתקיים $x > 4\log x$.

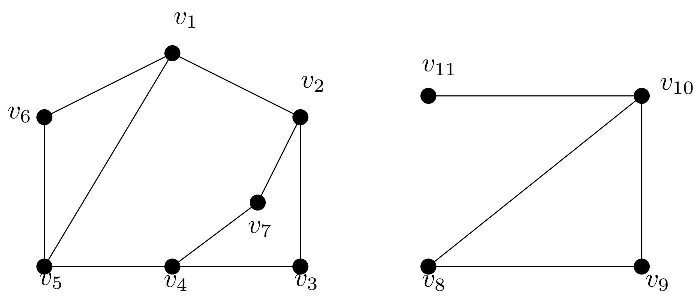
4. לא פולינומיאלי. נשים לב ש־$(\log n)^{\log n} = n^{\log\log n}$. ולכן, כמו בסעיף הקודם, מספיק להראות שעבור כל $d \in \mathbb{N}$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\log\log n > d$ עבור $n \geq n_0$. תנאי זה הוא ברור כיוון שניתן לבחור $n_0 = e^{e^d} + 1$.

פרק 3
גרפים

גרף הוא אובייקט מתמטי המתאר קבוצה של עצמים ("קודקודים" או "צמתים") ואת היחסים ביניהם ("קשתות"). חלק גדול מהבעיות האלגוריתמיות המופיעות בקורס זה ובקורסי ההמשך במדעי המחשב, מוגדרות ונפתרות בעזרת גרפים. בפרק זה נלמד מושגים בסיסיים בתורת הגרפים וגם כמה אלגוריתמי סריקה בגרפים.

3.1 הגדרות ויישומים בסיסיים

קראו בספר מתחילת פרק 3 עד סוף סעיף 3.1



איור 3.1: גרף עם שני רכיבי קשירות

נפתח בהצגת מילון מושגים בסיסיים בגרפים.

גרף [Graph] הוא זוג $G = (V, E)$ שבו:

- V היא קבוצה סופית של איברים הנקראים **צמתים** [nodes] או **קודקודים** [vertices].
- E היא קבוצה של זוגות לא סדורים מ-V הנקראים **קשתות** [edges].

באיור מקובל לתאר גרף במישור כך: צמתים מיוצגים על ידי נקודות או עיגולים, וקשת בין זוג צמתים מיוצגת על ידי קו המחבר את זוג הצמתים המתאים. לדוגמה, באיור 3.1 מצויר

הגרף $G = (V, E)$ שבו

$$V = \{v_1, \ldots, v_{11}\}$$
$$E = \left\{ \begin{array}{c} \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \\ \{v_8, v_9\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_9, v_{10}\}, \{v_{10}, v_{11}\} \end{array} \right\}$$

הערה 3.1. בהמשך נדון גם בגרפים מכוונים, המוגדרים באופן דומה. ההבדל הוא שבגרף מכוון, E היא קבוצה של זוגות **סדורים** של V. בתיאור הציורי של גרף מכוון תהיה כל קשת מסומנת בחץ המתאר את הכיוון שלה.

צומת שכן [adjacent node]. צומת v הוא שכן של צומת u, אם $\{u, v\}$ היא קשת בגרף. ברור שאם u שכן של v, אז v שכן של u, כלומר יחס השכנות (בגרף לא־ מכוון) הוא סימטרי. לדוגמה, באיור 3.1, הצמתים v_{11} ו־v_{10} הם שכנים, אך הצמתים v_{11} ו־v_8 אינם שכנים.

דרגה [degree]. הדרגה של צומת u שווה למספר הקשתות הסמוכות ל־u ומסומנת $\deg(u)$. לדוגמה, באיור 3.1, $\deg(v_1) = 3$, $\deg(v_2) = 3$.

מסלול [path]. מסלול בגרף הוא סדרה של צמתים $(v_1 \ldots, v_k)$ (בסדרה לפחות צומת אחד) כך שכל שני צמתים עוקבים בסדרה הם שכנים בגרף. לדוגמה, בגרף שבאיור 3.1, סדרת הצמתים $(v_2, v_7, v_2, v_1, v_6)$ מגדירה מסלול, בעוד שהסדרה (v_1, v_2, v_4, v_5) אינה מגדירה מסלול, כיוון ש־$\{v_2, v_4\}$ אינה קשת בגרף.

מסלול פשוט [simple path]. מסלול פשוט הוא מסלול שבו שום צומת אינו מופיע יותר מפעם אחת.

אורך המסלול [length]. אורכו של המסלול $(v_1, \ldots, v_k)$ הוא $k - 1$, כלומר כמספר הקשתות (כולל כפילויות) שהמסלול עובר.

מרחק בין צמתים [distance] מוגדר כאורך המסלול הקצר ביותר המחבר אותם. נשים לב שהמרחק מקיים את אי־שוויון המשולש (ראו תרגיל 3.2). אם אין בגרף מסלול בין u ל־v, המרחק ביניהם יוגדר כאינסוף.

מעגל [cycle]. מעגל הוא מסלול המכיל לפחות שלושה צמתים שונים, ובו הצומת הראשון והאחרון זהים, בעוד כל שאר הצמתים במסלול מופיעים בדיוק פעם אחת. לדוגמה, בגרף באיור 3.1, המסלול $(v_6, v_1, v_2, v_7, v_4, v_6)$ הוא מעגל. אורך המעגל הוא אורך המסלול המתאר אותו.

גרף קשיר [connected graph]. גרף נקרא קשיר אם בין כל זוג צמתים בגרף יש מסלול.

תת־גרף [subgraph]. $H = (W, F)$ נקרא תת־גרף של הגרף $G = (V, E)$, אם H הוא גרף, $W \subseteq V$, ו־$F \subseteq E$.

נתרגל מעט את המושגים האלה.

◄ **תרגיל 3.1**
עליכם למצוא בגרף שהוצג לעיל באיור 3.1:
1. הדרגה של v_4.
2. השכנים של v_1
3. תת־גרף קשיר עם מספר מקסימלי של צמתים.
4. תת־גרף על 4 צמתים עם מספר מקסימלי של קשתות.
5. מספר מקסימלי של מסלולים פשוטים בין הצמתים v_1 ו־v_5, כך שכל קשת בגרף תופיע לכל היותר במסלול אחד (כלומר, מצאו מספר מקסימלי של מסלולים פשוטים זרים בקשתות בין v_1 ל־v_5).
6. מעגלים באורך 4, 5, ו־6.

פתרון בעמ' 32 ►

◄ **תרגיל 3.2**
הפונקציה $d : V \times V \to [0, \infty)$ על V מקיימת את אי־שוויון המשולש, אם לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. הוכיחו שהמרחק בין צמתים בגרף קשיר מקיים את אי־שוויון המשולש. **פתרון בעמ' 32** ►

נתעמק עתה מעט במבנה של גרפים לא קשירים. נתבונן באיור 3.1. הגרף באיור הזה מתחלק לשני "חלקים" הנקראים רכיבי קשירות [connected components]. רכיב קשירות אחד מכיל את הצמתים $\{v_1, \ldots, v_7\}$, והרכיב השני מכיל את הצמתים $\{v_8, \ldots, v_{11}\}$. כל רכיב קשירות הינו גרף קשיר ואין מסלולים בין צמתים מרכיבי קשירות שונים. נגדיר זאת במדויק באמצעות שני התרגילים הבאים.

◄ **תרגיל 3.3**
הוכיחו שאם בין זוג צמתים בגרף קיים מסלול אז קיים ביניהם מסלול פשוט. **פתרון בעמ' 32** ►

◄ **תרגיל 3.4**
הוכיחו שהיחס[1] על הצמתים "קיים מסלול בין u ל־v" הוא יחס שקילות.[2] **פתרון בעמ' 32** ►

כפי שלמדנו בקורס "מתמטיקה דיסקרטית", יחס השקילות משרה פירוק של קבוצת הצמתים למחלקות שקילות. במקרה של יחס הקשירות, מחלקות השקילות הן רכיבי הקשירות של הגרף. כלומר, בין כל שני צמתים מאותו רכיב קשירות, קיים מסלול המחבר אותם, בעוד שבין כל שני צמתים מרכיבי קשירות שונים אין מסלול המחבר אותם.

עצים. עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים, ראו דוגמה באיור 3.2 משמאל. מחיקת קשת מעץ תהפוך אותו ללא קשיר, כי אילו היה הגרף נשאר קשיר לאחר הסרת קשת $e = \{x, y\}$, משמעות הדבר הייתה שיש בגרף מסלול פשוט מ־x ל־y, שאינו מכיל את e.

$$P = (x = x_0, x_1, \ldots, x_s = y),$$

אם נצרף למסלול הזה את הקשת e נקבל את המעגל

$$C = (x_0, x_1, ..., x_s, x_0)$$

[1] יחס על קבוצה V הוא תת־קבוצה של $V \times V$. ראו קורס "מתמטיקה דיסקרטית".
[2] יחס R על קבוצה V נקרא יחס שקילות אם הוא מקיים: 1. רפלקסיביות: לכל $v \in V$ מתקיים $(v, v) \in R$; 2. סימטריות: לכל $u, v \in V$ מתקיים שאם $(u, v) \in R$ אז $(v, u) \in R$; 3. טרנזיטיביות: לכל $u, v, w \in V$, אם $(u, v) \in R$ וגם $(v, w) \in R$, אז $(u, w) \in R$.

וזוהי סתירה להגדרת עץ.

התכונה הבאה של עצים היא שימושית מאוד כי היא מאפשרת להפעיל אינדוקציה להוכחת טענות הקשורות בעצים.

טענה 3.1. בכל גרף המכיל לפחות קשת אחת אך אינו מכיל מעגלים, קיים צומת u שדרגתו שווה ל-1, כלומר $\deg(u) = 1$.

הוכחה. נניח על דרך השלילה, שאין צומת שדרגתו שווה ל־1. נסיר מהגרף את כל הצמתים מדרגה 0. כיוון שהסרת צומת מדרגה 0 אינה משנה את דרגתם של שאר הצמתים, וכיוון שיש בגרף לפחות קשת אחת, נותרנו עם גרף שכל צמתיו מדרגה 2 לפחות. נראה עתה שגרף כזה חייב להכיל מעגל. רעיון ההוכחה הוא להתחיל מצומת כלשהו ו"להתקדם" מצומת לצומת דרך קשת שעוד לא עברנו בה. תהליך זה בונה מסלול. נעצור כשנחזור לצומת שכבר ביקרנו בו. מסלול כזה, כפי שנראה להלן, בהכרח מכיל מעגל.

פורמלית, אם יש בגרף צמתים, קיים בו צומת v_1. כיוון שדרגתו של v_1 אינה 0, הוא חייב להיות שכן של צומת אחר, ומכאן שבגרף הנותר יש לפחות 2 צמתים. כעת נבנה בהדרגה את המסלול הבא. נתחיל ב־(v_1) ונניח שבנינו כבר את הרישא $(v_1, \ldots, v_i)$. אם v_i כבר הופיע במסלול שבנינו (כלומר קיים j, $1 \le j < i$ כך ש־$v_i = v_j$), נסיים. אחרת, יהי v_{i+1} צומת שכן ל־v_i כך ש־$v_{i-1} \neq v_{i+1}$ (זה אפשרי כי לפי הנחת השלילה $\deg(v_i) \ge 2$). נצרף את v_{i+1} למסלול ונקבל $(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1})$. תהליך זה חייב להיעצר כי מספר הצמתים בגרף הוא סופי, ולכן באיזשהו שלב נחזור בהכרח לצומת שכבר עברנו בו. נניח שעצרנו ב־v_s, אזי בהכרח קיים $r < s$ כך ש־$v_r = v_s$. שימו לב, כיוון שזאת הפעם הראשונה שצומת חוזר על עצמו במסלול, מובטח לנו שבמסלול $v_r, \ldots, v_{s-1}$ מופיע כל צומת פעם אחת בלבד. כמו כן מהגדרת המסלול אנו יודעים כי $r \le s - 3$. מכאן אפשר להסיק ש־$v_r, v_{r+1}, \ldots, v_s$ הוא מעגל, ומסקנה זו סותרת את ההנחה שהגרף אינו מכיל מעגלים. ■

◄ **תרגיל 3.5**

הראו שכאשר מסירים מעץ צומת שדרגתו שווה ל-1, הגרף שיתקבל יהיה גם הוא עץ.
פתרון בעמ' 33 ►

הנה דוגמה לשימוש בטענה 3.1.

טענה 3.2. בגרף ללא מעגלים ועם קשת אחת לפחות, קיימים לפחות שני צמתים שדרגתם שווה ל־1.

הוכחה. לצורך ההוכחה נשתמש באינדוקציה על מספר הקשתות בגרף. בגרף בעל קשת אחת, קצוות הקשת הם צמתים מדרגה אחת, ויש שני צמתים כאלה. נניח עתה שבגרף $G = (V, E)$ יש $1 < m$ קשתות. לפי טענה 3.1 קיים ב־G צומת u שדרגתו שווה ל־1. תהי $\{u, v\}$ הקשת הסמוכה ל־u. נסיר את u ואת הקשת $\{u, v\}$ מ־G. מתקבל הגרף $G' = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{u, v\})$. בגרף הזה אין מעגלים והוא בעל $m - 1$ קשתות. כיוון ש־$m \ge 2$, אנו מסיקים ש־$m - 1 \ge 1$. על כן אנו יכולים להחיל את הנחת האינדוקציה על הגרף המצומצם G', ולהסיק שהוא מכיל לפחות שני צמתים מדרגה 1; נסמנם ב־x ו־y. מכיוון שהגרף G מכיל בדיוק קשת אחת שאינה קיימת ב־G', וקצה אחד של קשת זו (הצומת u) אינו ב־G', אזי לפחות אחד מן הצמתים x או y אינו v (ולבטח אינו u, שאינו מופיע ב־G) ולכן הוא בעל דרגה 1 גם ב־G. בתוספת הצומת u, מצאנו ב־G שני צמתים שדרגתם שווה ל־1. ■

טענה 3.1 מאפשרת, לעיתים קרובות, להוכיח תכונות של עצים באינדוקציה על מספר הצמתים. זאת כיוון שכאשר מסירים מעץ צומת שדרגתו 1, הגרף המתקבל יהיה בעצמו עץ (תרגיל 3.5). נתרגל את השימוש בטענה 3.1 על ידי הוכחה שונה של טענה (3.2) בספר.

◄ **תרגיל 3.6**

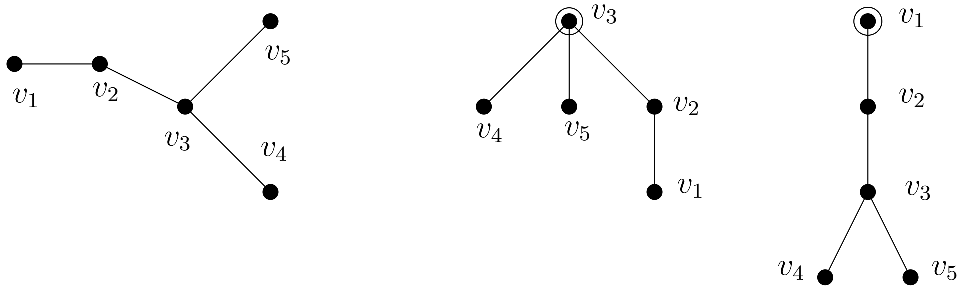
הוכיחו באינדוקציה, תוך שימוש בטענה 3.1 ובתרגיל 3.5, שבעץ עם n צמתים יש $n-1$ קשתות.

פתרון בעמ' 33 ►

◄ **תרגיל 3.7**

השלימו את הוכחת טענה (3.2) בספר.

פתרון בעמ' 33 ►



איור 3.2: עץ והשרשות שונות שלו. מצד שמאל מוצג עץ. במרכז זהו אותו העץ מושרש ב־v_3, ומימין אותו העץ מושרש ב־v_1.

עץ מושרש [rooted tree] הוא עץ שיש לו צומת מיוחד הנקרא **שורש**. בעץ מושרש מוגדר היחס צאצא: צומת v הוא **צאצא** [descendant] של צומת u אם u מופיע על המסלול הפשוט (היחיד) המחבר את v לשורש העץ. שימו לב כי כל צומת הוא צאצא של עצמו. צומת v הוא בן של u אם הוא צאצא של u ושכן שלו. **אב קדמון** [ancestor] הוא היחס ההפוך לצאצא. צומת u נקרא עלה בעץ מושרש T, אם u הוא עלה בעץ ואיננו השורש. באיור 3.2 מוצג מצד שמאל עץ. במרכז ומימין מוצגות שתי השרשות שונות של אותו העץ. בעץ המושרש מצד ימין באיור 3.2 העלים הם v_4 ו־v_5, בעוד שבעץ המושרש במרכז איור 3.2 העלים הם v_1, v_4, ו־v_5.

3.2 סריקה־לרוחב

קראו מתחילת סעיף 3.2 בספר, עד תחילת התת־סעיף "סריקה־לעומק תחילה" (עמוד 90)

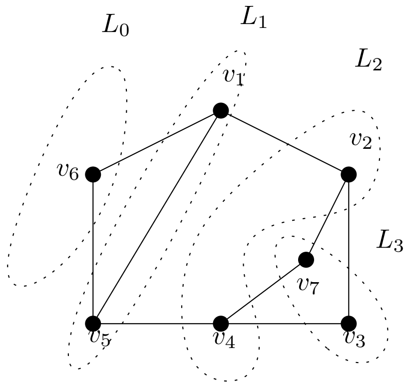
נסכם את אלגוריתם הסריקה־לרוחב [Breadth First Search — BFS] של גרף $G=(V,E)$ מצומת s:

> הסריקה מחלקת את הגרף לשכבות L_i. $L_0=\{s\}$, שכבה L_1 מכילה את כל השכנים של s. L_2 מכילה את כל השכנים של צמתים ב־L_1 שאינם מופיעים ב־$L_0 \cup L_1$. בהינתן שבנינו כבר את השכבות $L_0, L_1, \ldots, L_i$, נגדיר את L_{i+1} כקבוצת הצמתים שהינם שכנים של צמתים ב־L_i ואינם מופיעים ב־$L_0 \cup \cdots \cup L_i$.

לדוגמה, איור 3.3 מתאר את השכבות בסריקה־לרוחב של הגרף שהוצג באיור 3.1, המתחילה מצומת v_6.

תכונות הסריקה־לרוחב מצומת s נתון:

- הקבוצה L_i היא קבוצת הצמתים במרחק i מ־s (טענה (3.3) בספר).



איור 3.3: השכבות בסריקה־לרוחב מ־v_6.

- כל קשת $e = \{u, v\}$ בגרף מחברת שני צמתים משכבות עוקבות או מאותה שכבה (טענה (3.4) בספר).
- כמו כן, אם מחברים כל צומת $u \in L_i$, $(i > 0)$, בקשת לשכן אחד בדיוק מ־L_{i-1} (חייב להיות שכן כזה, מהגדרת הסריקה־לרוחב), מתקבל עץ מושרש ב־s שהינו תת־גרף של הגרף המקורי. עץ זה נקרא "עץ BFS", ולמעשה הוא "עץ המרחקים הקצרים ביותר מ־s ב־G", כלומר לכל צומת u, המסלול בעץ מ־s ל־u הוא המסלול הקצר ביותר ב־G בין s ל־u.

◄ **תרגיל 3.8**

הריצו את אלגוריתם הסריקה־לרוחב על הגרף באיור 3.1 כאשר הצומת ההתחלתי הוא v_1.

1. תארו את השכבות L_i.
2. בנו עץ סריקה־לרוחב מתאים.
3. הוסיפו לעץ את שאר הקשתות בגרף כקשתות מקווקוות.

פתרון בעמ' 34 ►

3.3 סריקה־לעומק

המשיכו לקרוא עד סוף סעיף 3.2 בספר

שיטת סריקה נוספת של גרפים היא **סריקה־לעומק** [Depth First Search – DFS]. נחזור על תיאור הסריקה־לעומק בגרף קשיר $G = (V, E)$ מצומת r:

> הסריקה־לעומק בונה עץ. בצומת הנוכחי u הסריקה מחפשת שכן v של u ב־G שעדיין לא נסרק, מגדירה את v כבן של u, ועוברת ל־v. אם לא קיים שכן כזה v, הסריקה חוזרת לאב של u. אם לא קיים אב ל־u (כלומר $u = r$), הסריקה נעצרת.

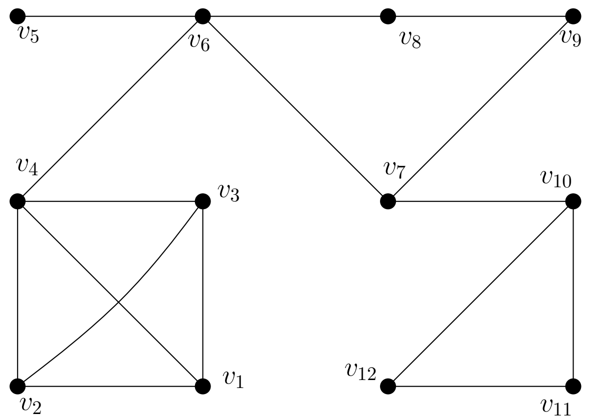
התכונה החשובה של סריקה־לעומק של גרף G היא: ביחס לעץ הסריקה המתקבל, כל קשת של G (כולל קשתות העץ) מחברת שני צמתים שאחד מהם הוא אב קדמון של השני (טענה (3.7) בספר). קשתות מצאצא לאב קדמון שאינן קשתות בעץ הסריקה־לעומק נקראות **קשתות אחורה**.

כדי להבין טוב יותר את מבנה עץ הסריקה־לעומק, נגדיר לכל צומת u "זמן כניסה" b_u ו"זמן יציאה" f_u. זמן הכניסה b_u הוא נקודת הזמן בתחילת ביצוע $\text{DFS}(u)$, וזמן היציאה f_u היא

נקודת הזמן בסיום ביצוע $\text{DFS}(u)$. לשם הדיוק, נשנה במקצת את שגרת הסריקה־לעומק המוצגת בסעיף 3.2 בספר כדלקמן: נגדיר משתנה גלובלי t שישמש כמונה ויאותחל ל־0, ונוסיף לשגרה רישום של זמני כניסה ויציאה במשתנים b_u ו־f_u. האלגוריתם המתקבל מתואר כאלגוריתם 3.1.

Algorithm 3.1 $\text{DFS}(u)$

```
  b_u ← t;    t ← t + 1
  Mark u as "Explored".
  for each edge {u, v} incident to u do
      if v is not marked "Explored" then
          Recursively invoke DFS(v)
  f_u ← t;    t ← t + 1
```



איור 3.4: גרף קשיר

◀ תרגיל 3.9
הריצו סריקה־לעומק על הגרף באיור 3.4, החל מצומת v_6. בנו את עץ הסריקה־לעומק וציינו עליו "קשתות אחורה". ליד כל צומת u ציינו את b_u ואת f_u. פתרון בעמ' 34 ◀

טענה (3.5) בספר מראה שסריקה־לעומק סורקת את רכיב הקשירות של צומת ההתחלה. אפשר להרחיב את הסריקה־לעומק לכל הגרף כדלקמן: בלולאה, כל עוד קיים בגרף צומת u שלא נסרק, הריצו $\text{DFS}(u)$. התהליך הזה מריץ את שגרת $\text{DFS}(\cdot)$ על כל רכיבי הקשירות. האלגוריתם המתקבל יהיה:

Algorithm 3.2 DFS-Loop($G = (V, E)$ a graph)

```
  Initialize all vertices to "Not-yet-Explored"
  Set t ← 0
  while there exists a "Not-Yet-Explored" node u do
      Call DFS(u)
```

◄ **תרגיל 3.10**
נסמן $[a,b]=\{x:\ a\leqslant x\leqslant b\}$. הוכיחו שלכל שני צמתים u ו־v מתקיימים בדיוק אחד משני המקרים:

1. $[b_u,f_u]\subseteq[b_v,f_v]$ או $[b_v,f_v]\subseteq[b_u,f_u]$
2. $[b_v,f_v]\cap[b_u,f_u]=\emptyset$

הוכיחו שבמקרה הראשון היחס בין u ל־v הוא היחס צאצא או אב קדמון. **פתרון בעמ' 34** ►

◄ **תרגיל 3.11**

1. הוכיחו שלאחר הרצת DFS-Loop נקבל:
$$\{b_u,f_u:\ u\in V\}=\{0,\ldots,2n-1\}.$$
כלומר, אוסף זמני הכניסה והיציאה של צומתי הגרף הינו בדיוק כל הזמנים (הבדידים) בין 0 ל־$2n-1$.
2. הוכיחו כי f_u-b_u+1 הוא מספר זוגי השווה לפעמיים מספר הצמתים בתת־עץ של u.

פתרון בעמ' 34 ►

3.4 מימושים של אלגוריתמי סריקה

קראו את סעיף 3.3 בספר

בפרק הנוכחי, כל עוד ברור מההקשר באיזה גרף מדובר, אנו נסמן ב־n את מספר הצמתים בגרף וב־m את מספר הקשתות שבו. שימו לב, מספר הקשתות הוא לכל היותר כמספר הזוגות הסדורים של n צמתים, לכן $m\leq n^2$. גרפים דלילים הם גרפים שבהם m "קטן בהרבה" מ־n^2. מימושי הסריקה שנראה בסעיף הנוכחי יהיו בעלי סיבוכיות $O(m+n)$, כלומר לינאריים ב"גודל הטבעי" של הגרף.

כתבנו "גודל טבעי" במירכאות, מפני שזה תלוי באופן ייצוג הגרף. ישנם שני ייצוגים עיקריים לגרף $G=(V,E)$.

1. **מטריצת שכנויות** [adjacency matrix]. מטריצה A ששורותיה ועמודותיה מייצגות צמתים, ואיבריה הם
$$A_{u,v}=\begin{cases}0 & \text{if } \{u,v\}\notin E\\ 1 & \text{if } \{u,v\}\in E.\end{cases}$$

יתרונו העיקרי של ייצוג זה הוא: בהינתן זוג צמתים, מאפשר הייצוג לבדוק בזמן קבוע אם יש ביניהם קשת. חסרונותיו העיקריים הם:

- לייצוג דרוש $\Theta(n^2)$ זיכרון, גם בגרפים דלילים.
- סריקת הקשתות הסמוכות לצומת נתון נמשכת $\Theta(n)$ זמן, גם כאשר דרגת הצומת נמוכה.

ראו להלן דוגמה של ייצוג על ידי מטריצת השכנויות עבור הגרף שהובא לעיל באיור 3.1 (הכניסות

הריקות מסמלות 0).

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \\
\hline
v_1 & & 1 & & & 1 & 1 & & & & & \\
v_2 & 1 & & & & & 1 & 1 & & & & \\
v_3 & & & & 1 & & & & & & & \\
v_4 & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & \\
v_5 & 1 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
v_6 & 1 & 1 & & & 1 & & & & & & \\
v_7 & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
v_8 & & & & & & & & & 1 & 1 & \\
v_9 & & & & & & & & 1 & & 1 & \\
v_{10} & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 \\
v_{11} & & & & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

2. **רשימת שכנויות** [adjacency list]. הצמתים מוחזקים במערך, ולכל צומת יש רשימה מקושרת של שכניו בגרף (לכן רשימה מקושרת זו גם מכילה מידע על כל הקשתות הסמוכות לצומת). חסרונו העיקרי של ייצוג זה הוא: בהינתן זוג צמתים, כדי להחליט אם הם שכנים נדרש לעתים זמן יחסי לדרגת אחד הצמתים. היתרונות העיקריים של ייצוג זה הם:
   - גודל הזיכרון הדרוש הוא $\Theta(m+n)$.
   - סריקת הקשתות השכנות של צומת נתון מדרגה d ניתנת לביצוע בזמן $O(d)$.

לדוגמה, ראו להלן ייצוג על ידי רשימת שכנויות עבור הגרף שהובא באיור 3.1.

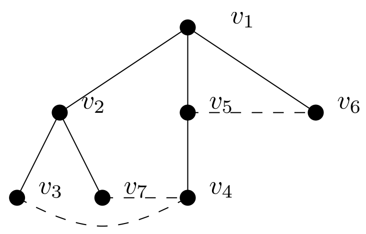
$$\begin{array}{ccllll}
v_1 & \rightarrow & (v_2, & v_5, & v_6) \\
v_2 & \rightarrow & (v_1, & v_3, & v_7) \\
v_3 & \rightarrow & (v_2, & v_4) & \\
v_4 & \rightarrow & (v_3, & v_7) & \\
v_5 & \rightarrow & (v_1, & v_4, & v_6) \\
v_6 & \rightarrow & (v_1, & v_5) & \\
v_7 & \rightarrow & (v_2, & v_4) & \\
v_8 & \rightarrow & (v_9, & v_{10}) & \\
v_9 & \rightarrow & (v_8, & v_{10}) & \\
v_{10} & \rightarrow & (v_8, & v_9, & v_{11}) \\
v_{11} & \rightarrow & (v_{10}) & &
\end{array}$$

מימוש של סריקות הגרפים (לרוחב ולעומק) הוא יעיל יותר בייצוג של רשימת שכנויות, וזה יהיה הייצוג שנבחר עבורם בפרק זה. המימוש של סריקה לרוחב נעשה בעזרת תור [queue]. סריקה־לעומק ניתנת למימוש בעזרת מחסנית [stack] או בצורה שקולה על ידי רקורסיה (כפי שראינו בסעיף הקודם).

נבחן עתה את המימוש של סריקה־לרוחב של גרף הנתון כרשימת שכנויות בעזרת תור. כדוגמה ניקח את רכיב הקשירות השמאלי באיור 3.1 ונקרא לסריקה־לרוחב מצומת v_1. כמו כן נניח שבכל צומת, רשימת השכנויות מסודרת בסדר מילוני [לקסיקוגרפי]. עץ הסריקה המתקבל מתואר באיור 3.5.

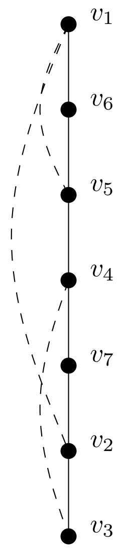
התור Q יתואר להלן כסדרה שראשיתה (צידה השמאלי) הוא ראש התור. Q מתנהל כדלקמן:

1. התור מאותחל ל־$Q=(v_1)$.
2. לאחר סריקת השכנים של v_1, $Q=(v_2,v_5,v_6)$.



איור 3.5: עץ סריקה־לרוחב המושרש ב־v_1 של הגרף שהובא באיור 3.1.

3. לאחר סריקת השכנים של v_2, $Q = (v_5, v_6, v_3, v_7)$.
4. לאחר סריקת השכנים של v_5, $Q = (v_6, v_3, v_7, v_4)$.
5. בשלב זה מעובדים הצמתים v_6, v_3 v_7, ו־v_4. כיוון שכל שכניהם כבר נסרקו, לא נכנסים ל־Q צמתים חדשים.



איור 3.6: עץ סריקה־לעומק המושרש ב־v_1 של הגרף שהובא באיור 3.1.

נריץ עתה את $\mathrm{DFS}(v_1)$ על אותו גרף. עץ הסריקה־לעומק המתקבל מתואר באיור 3.6. נתאר כיצד תיראה המחסנית S של אלגוריתם הסריקה־לרוחב על הגרף הזה.

1. המחסנית מאותחלת ל־$S = (v_1)$.
2. לאחר סריקת השכנים של v_1 מתקבל $S = (v_6, v_5, v_2)$.
3. הצומת v_6 נשלף, ובמקומו נדחף v_5, (השכן היחיד של v_6 שעדיין לא נסרק), לכן מצב המחסנית לאחר שלב זה הוא $S = (v_5, v_5, v_2)$.
4. צומת v_5 נשלף, ובמקומו נדחף שכנו v_4; מצב המחסנית $S = (v_4, v_5, v_2)$.
5. צומת v_4 נשלף, ונדחפים v_3 ו־v_7; מצב המחסנית $S = (v_7, v_3, v_5, v_2)$.
6. צומת v_7 נשלף, ונדחף v_2; מצב המחסנית $S = (v_2, v_3, v_5, v_2)$.
7. צומת v_2 נשלף, ונדחף v_3; מצב המחסנית $S = (v_3, v_3, v_5, v_2)$.
8. צומת v_3 נשלף; מצב המחסנית $S = (v_3, v_5, v_2)$

9. בשלב זה כל הצמתים נשלפו מהמחסנית לפחות פעם אחת, ולכן שאר השליפות לא מזהות צמתים חדשים.

טענה (3.13) בספר מראה שזמן הריצה של $\mathrm{DFS}(u)$ הוא $O(m_1)$, כאשר m_1 הוא מספר הקשתות ברכיב הקשירות של u. כדי לנתח את זמן הריצה של $\text{DFS-Loop}(G)$ (אלגוריתם 3.2), נציע מימוש יעיל של התכונה Explored/Not-Yet-Explored: נשמור רשימה מקושרת כפולה של Not-Yet-Explored ואז נוכל למצוא צומת Not-Yet-Explored בזמן קבוע (על ידי שליפת הצומת שבראש הרשימה) בלולאת While שבשגרה DFS-Loop. במימוש הזה האלגוריתם משקיע $O(n)$ זמן באתחול הרשימה, וזמן קבוע לכל רכיב קשירות. בסך הכול זמן הריצה על גרף בעל t רכיבי קשירות הוא:

$$O\left(n + t + \sum\nolimits_{v\in V} \deg(v)\right) = O(m+n)$$

3.5 גרף דו־צדדי

קראו את סעיף 3.4 בספר

גרף דו־צדדי הוא גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות כך שלא תהיה קשת שתחבר שני צמתים מאותה קבוצה. גרף דו־צדדי נקרא גם דו־צביע, כי אפשר לצבוע את צמתיו בשני צבעים כך שקצותיה של כל קשת יהיו צבועים בצבעים שונים. טענה (3.14) בספר מציעה הגדרה שקולה לגרף דו־צדדי: גרף ללא מעגלים באורך אי־זוגי. לעתים נוח יותר להשתמש באפיון זה. לדוגמה, בעזרת אפיון זה קל לראות שעצים הם גרפים דו־צדדיים, כיוון שאינם מכילים מעגלים כלל.

סריקה־לרוחב מאפשרת לבדוק אם גרף קשיר נתון הוא דו־צדדי, ואם כן, היא מאפשרת לבנות את החלוקה המתאימה של הצמתים. טענה (3.15) בספר מוכיחה זאת. נסביר פה בקצרה את רעיון ההוכחה. נזכור כי לפי טענה (3.4) בספר, קשתות הגרף תמיד מקשרות בין צמתים בשכבות סמוכות או בין צמתים בתוך אותה שכבה של הסריקה־לרוחב. אם אין קשתות בין צמתים באותה שכבה, אז חלוקת הצמתים לשכבות זוגיות ושכבות אי־זוגיות, היא חלוקה לגרף דו־צדדי.

אם יש קשת $e=\{x,y\}$ בין זוג צמתים באותה שכבה, אז יש בגרף מעגל שאורכו אי־זוגי (ולכן הגרף אינו דו־צדדי) כדלקמן (ראו איור 3.7): יהי z האב הקדמון הנמוך ביותר של x ו־y בעץ הסריקה־לרוחב T. נסמן ב־P את המסלול ב־T מ־z ל־x, וב־Q את המסלול ב־T מ־z ל־y. כיוון ש־x ו־y נמצאים באותה שכבה, אורכי P ו־Q שווים. כמו כן, כיוון ש־z הוא האב הקדמון הנמוך ביותר, P ו־Q זרים בצמתים, למעט צומת ההתחלה z. נסמן ב־Q^{rev} את היפוך המסלול Q. מהאמור לעיל, אם משרשרים את $P\setminus\{z\}$ ל־Q^{rev}, מתקבל מסלול פשוט, באורך זוגי מ־y ל־x. בתוספת הקשת e מתקבל מעגל באורך אי־זוגי.

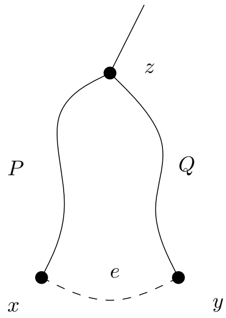
◄ **תרגיל 3.12**

הוכיחו כי בגרף דו־צדדי קשיר קיימת חלוקה ל"צדדים" (מחלקות צבע) אחת בלבד. האם טענה זו נכונה גם בגרף דו־צדדי לא קשיר? הסבירו. **פתרון בעמ' 34** ►

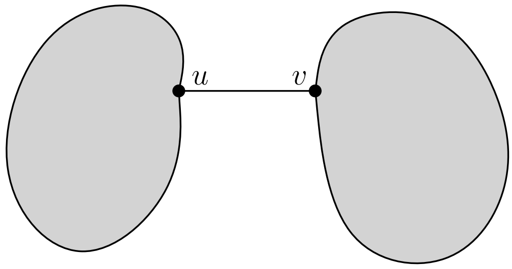
3.6 דו־קשירות בקשתות

בסעיף זה נראה כיצד משתמשים בסריקה־לעומק לצורך זיהוי "גשרים" בגרף. נגדיר:

הגדרה 3.1. גשר [bridge] הוא קשת $e=\{u,v\}$ שהסרתה מהגרף מנתקת את הקשירות בין u ל־v.



איור 3.7: עץ סריקה־לרוחב בגרף המכיל מעגל אי־זוגי.



איור 3.8: תיאור סכמטי של גשר בגרף

ברשתות תקשורת, לדוגמה, גשרים הם נקודות כשל פוטנציאליות: נפילת גשר משמעותה ניתוק הרשת. לעומת זאת נפילת חיבור (קשת) שאינו גשר אינה מנתקת את הקשירות (אך יכולה לפגוע בביצועי הרשת).

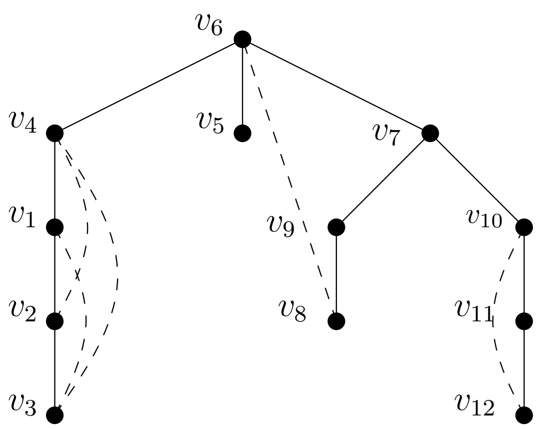
באופן סכמטי, גשר $e = \{u, v\}$ מחלק את צומתי הגרף לשני חלקים לא ריקים; האחד מכיל את u והשני את v, ובין חלקים אלה עוברת קשת יחידה – הגשר e, ראו איור 3.8. נחזור לאיור 3.4, ונציין בו את כל הקשתות שהן גשרים בגרף: $\{v_5, v_6\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_7, v_{10}\}$. התרגיל הבא מתאר אפיון נוסף של גשרים.

◀ **תרגיל 3.13**
הוכיחו שקשת היא גשר אם ורק אם אין מעגל המכיל אותה. **פתרון בעמ' 35** ▶

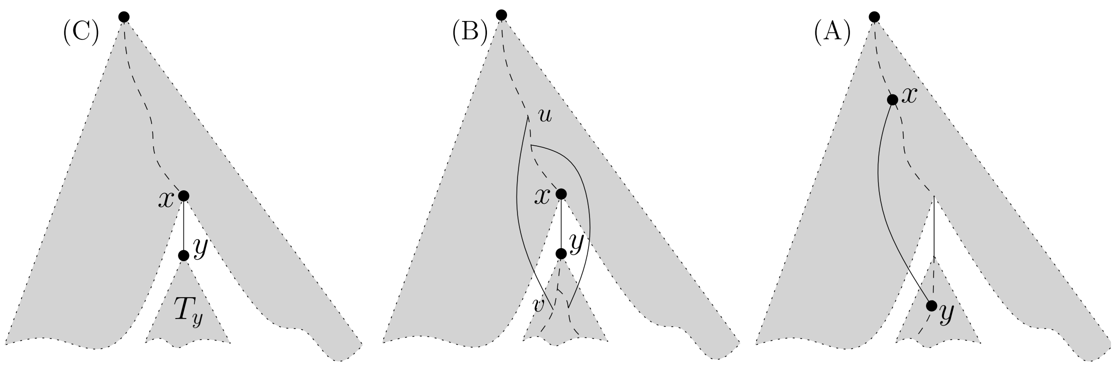
לשם הפשטות נתמקד עתה בפיתוח אלגוריתם לזיהוי גשרים בגרף קשיר – קל להרחיב את האמור להלן לגרפים לא קשירים. אלגוריתם פשוט יסרוק את קשתות הגרף, ועבור כל $e \in E$, יסיר אותה ויריץ סריקה על הגרף הנוצר כדי לבדוק אם הוא קשיר. סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם זה היא $O(m^2)$. בסעיף הנוכחי אנו נפתח אלגוריתם המזהה גשרים בגרפים קשירים בזמן $O(m)$.

נתבונן בעץ הסריקה־לעומק של הגרף שהוצג באיור 3.4 כפי שהוא מתואר כעת באיור 3.9. נשים לב שבדוגמה הזו כל הגשרים – $\{v_5, v_6\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_7, v_{10}\}$ – הם קשתות של עץ שעבורן אין קשת אחורה מן הצאצא של הקשת אל האב הקדמון של הקשת. זו אינה מקריות, אלא אפיון של גשרים, כפי שנוכיח עתה.

טענה 3.3. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ו־T עץ סריקה־לעומק שלו. קשת $e \in E$ היא גשר אם ורק אם $e = \{x, y\}$ היא קשת עץ ב־T, כך שאם x אב של y ב־T אזי לא קיימת קשת אחורה המחברת צאצא (ב־T) של y עם אב קדמון (ב־T) של x.



איור 3.9: עץ סריקה־לעומק מ־v_6 וקשתות אחורה של הגרף מאיור 3.4. קשתות העץ שאין קשת אחורה מצאצא שלהן לאב קדמון ממש שלהן (כדוגמת $\{v_4, v_6\}$) הן הגשרים בגרף.



איור 3.10: שלושה סוגי הקשתות בסריקה־לעומק: (A) הקשת $\{x, y\}$ אינה קשת בעץ הסריקה־לעומק. במקרה זה היא חלק ממעגל המבוסס על המסלול בעץ בין x ל־y. (B) הקשת $\{x, y\}$ היא קשת עץ הסריקה־לעומק, אך יש קשת(ות) מצאצא של y לאב קדמון של x ולכן היא חלק ממעגל. (C) הקשת $\{x, y\}$ היא קשת עץ הסריקה־לעומק ואין קשת מצאצא של y לאב קדמון של x למעט $\{x, y\}$. במקרה זה $\{x, y\}$ היא גשר.

הוכחה. נחלק את קשתות הגרף לשלושה סוגים (ראו גם איור 3.10):

- A – קשתות שאינן נמצאות ב־T;
- B – קשתות שנמצאות ב־T אך קיימת קשת(ות) מן הצאצא אל האב הקדמון שלהן;
- C – קשתות שנמצאות ב־T אך אין קשת מן הצאצא אל האב הקדמון שלהן.

נבחן כל מקרה לגופו.

נבחן תחילה את הקשת $e = \{x, y\} \in E$ שאינה קשת ב־T (מקרה A, ראו גם איור 3.10). כיוון ש־T קשיר, קיים מסלול פשוט ב־T המחבר את x ל־y, ולכן הקשת e נמצאת על מעגל ב־G. מתרגיל 3.13 אנו למדים ש־e אינה גשר.

נבחן כעת קשת בעץ הסריקה־לעומק $e = \{x, y\} \in T$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־x הוא אב של y בעץ T. תחילה נניח שקיימת קשת אחורה $f = \{u, v\}$ מן הצאצא v של y לאב הקדמון u של x (מקרה B, ראו גם איור 3.10). קשת זו מגדירה מעגל ב־G: נתחיל ב־u ונרד דרך קשתות

T לעבר v דרך הקשת e. בהגיענו לצומת v נחזור ל־u דרך הקשת f. התקבל מעגל ב־G המכיל את הקשת e ולכן e אינה גשר.

נותר המקרה האחרון (מקרה C, ראו גם איור 3.10): $e = \{x, y\} \in T$, היא קשת עץ ולא קיימת קשת אחורה מן הצאצא של y לאב הקדמון של x. מטענה (3.7) בספר אנו יודעים כי בהינתן עץ סריקה־לעומק T של גרף G, קשתות G נחלקות לשניים: קשתות עץ וקשתות (אחורה) מצאצא לאב קדמון. נתבונן בגרף $T \setminus \{e\}$. בגרף הזה x ו־y אינם קשירים. נסמן ב־T_y את העץ ששורשו y ב־T. נוסיף עתה לגרף $T \setminus \{e\}$ את שאר הקשתות ב־$E \setminus \{e\}$. כיוון שקשת העץ היחידה המחברת את T_y אל מחוץ ל־T_y היא e, כל קשת אחרת חייבת להיות קשת אחורה מן הצאצא של y לאב הקדמון של x, אך הנחנו שאין קשת כזו. לפיכך T_y מנותק בגרף $(V, E \setminus \{e\})$ משאר הצמתים, ובפרט מ־x. משמעות הדבר ש־e היא גשר.

שימו לב, בזאת הוכחנו את הטענה: אם e היא קשת עץ ואין קשת מצאצא שלה לאב הקדמון שלה, אז זה מתאים למקרה C לעיל ולכן היא גשר. בכיוון ההפוך, אם e היא גשר אז לפי הניתוח לעיל היא אינה יכולה להיות אחד מהמקרים A או B. כיוון שחילקנו את **כל הקשתות** לשלושה סוגים, היא חייבת להיות מסוג C, כלומר קשת העץ שעבורה אין קשת מן הצאצא שלה לאב הקדמון שלה. ■

טענה 3.3 היא הבסיס לאלגוריתם מציאת כל הגשרים בזמן $O(m)$. נקבע גרף $G = (V, E)$ ועץ סריקה־לעומק T. נקבע צומת y (שאינו השורש), ונסמן ב־x את ההורה של y ב־T. נרצה לדעת אם יש קשת שאינה קשת עץ מן הצאצא של y לאב הקדמון של x. אם כן, נדע שקשת העץ $\{x, y\}$ אינה גשר, ואם לא, אז $\{x, y\}$ היא גשר.

כזכור, באלגוריתם 3.1 (בסעיף 3.3) הגדרנו לכל צומת $w \in V$ את זמן הכניסה בסריקה־לעומק b_w. מתרגיל 3.10 אנו יודעים ש־w הוא אב קדמון של u אם ורק אם $b_w < b_u < f_u < f_w$. לכן עבור y נתון נוכל לחשב את הערך b_w הקטן ביותר עבור קשת $\{v, w\}$ שאינה קשת עץ ושעבורה v הוא הצאצא של y. במילים אחרות, לכל צומת y (שאינו שורש) נחשב את הערך הזה:

$$L_y = \min\{b_w : \exists (v, w) \in E \setminus T, \text{ and } v \text{ is a descendant of } y\}, \tag{3.1}$$

לפי המוסכמה ש־$\min \emptyset = \infty$.

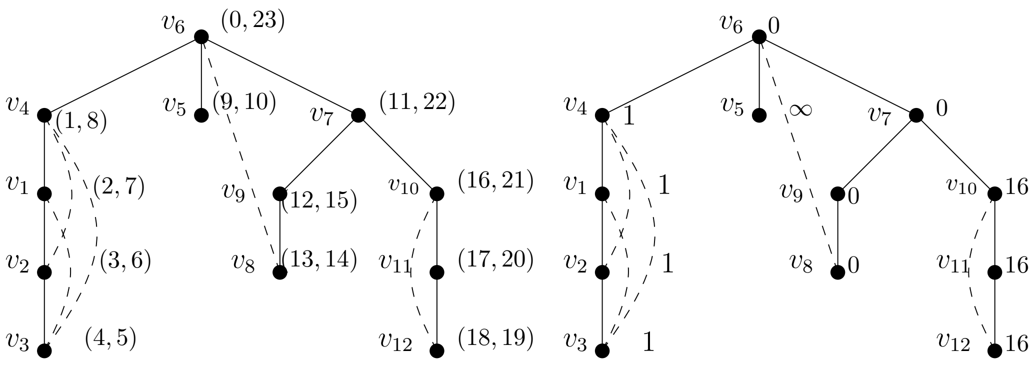
כדי להמחיש מהו L_u עבור צומת u, התבוננו באיור 3.11 שבו תוכלו לראות את עץ הסריקה־לעומק של הגרף מאיור 3.4, בתוספת ערכי הכניסה והיציאה (b_u, f_u) מצד שמאל, וערכי L_u מצד ימין. הערך L_u מתקבל ציורית מהפעולה הבאה: ננסה להגיע הכי "גבוה" שניתן על ידי הילוך כלפי מטה בעץ מהצומת u, ואז "קפיצה" אחת כלפי מעלה בעזרת קשת אחורה. לדוגמה, באיור 3.11, $L_{v_1} = 1$ כיוון שהכי גבוה שתהליך זה מאפשר הוא ירידה מ־v_1 ל־v_2 (או v_3) ואז קפיצה ל־v_4, וזמן הכניסה ל־v_4 הוא 1. דוגמה אחרת: $L_{v_7} = 0$, כיוון שניתן לרדת מ־v_7 ל־v_8, ומשם לקפוץ בקשת אחורה ל־v_6 (השורש), שזמן הכניסה אליו הוא 0.

L_y הוא זמן הכניסה לצומת w (אם קיים כזה) הגבוה ביותר שניתן להגיע אליו בעזרת קשת אחורה היוצאת מצאצא של y (כולל y עצמו). כפי שראינו בטענה 3.3, קשת העץ $\{x, y\}$ איננה גשר אם ורק אם הצומת w שלעיל הינו אב קדמון של x (האב של y). כיוון שקל לבדוק יחס אב קדמון בעזרת זמני הכניסה, אנו משתמשים בהם ובודקים אם $b_w < b_y$, כלומר אם $L_y < b_y$.

נסכם את הדיון שלעיל בטענה הבאה:

טענה 3.4. יהי T עץ סריקה־לעומק של גרף G. קשת העץ $\{x, y\} \in T$, שבה x הוא האב של y (ב־T), היא גשר ב־G אם ורק אם $L_y \geq b_y$.

ראינו כבר כיצד לחשב את b_y, לכן נותר כעת לראות כיצד לחשב את L_y. תרגום ישיר של הנוסחה (3.1) לאלגוריתם ייתן זמן ריצה $O(nm)$, אך ניתן לשפר זאת בעזרת ההבחנה הבאה



איור 3.11: עץ הסריקה־לעומק שהוצג באיור 3.9; בעץ שבצד שמאל מצוינים זמני כניסה ויציאה (b_u, f_u), ובעץ שבצד ימין מצוינים ערכי L_u.

טענה 3.5. נגדיר רקורסיבית את הערך $\bar{L}_u$, כדלקמן:

$$\bar{L}_u = \min\Big\{\min\{b_w \,:\, \{u,w\} \in E \setminus T\}\ ,\ \min\{\bar{L}_v \,:\, v \text{ is a child of } u\}\Big\}.$$

לכל צומת u מתקיים $L_u = \bar{L}_u$.

◄ **תרגיל 3.14**

הוכיחו את טענה 3.5. **פתרון בעמ' 35 ►**

להלן פרוצדורה רקורסיבית לחישוב L_u המבוססת על טענה 3.5. אנו מניחים ש־$G = (V, E)$, T, ו־$(b_u)_{u \in V}$ נתונים.

Algorithm 3.3 Calc-$L(u)$

$L_u \leftarrow \infty$
for every child v of u in T do
  Call recursively to Calc-$L(v)$
  $L_u \leftarrow \min\{L_u, L_v\}$
for every $\{u, w\} \in E \setminus T$ do
  $L_u \leftarrow \min\{L_u, b_w\}$

נדגים את הפעולה של אלגוריתם 3.3 על הסריקה־לעומק מאיור 3.9. התבוננו שוב באיור 3.11. חישוב $(L_u)_{u \in V}$ מתחיל מקריאה ל־Calc-$L(v_6)$. שגרה זו קוראת רקורסיבית ל־Calc-$L(v_4)$, Calc-$L(v_5)$, Calc-$L(v_7)$. בסיום הקריאות הרקורסיביות התקבלו הערכים $L_{v_4} = 1$, $L_{v_5} = \infty$, $L_{v_7} = 0$. המינימום של ערכים אלה הוא 0. כמו כן נבדקות קשתות היוצאות מ־v_6 שאינן קשתות עץ. ישנה רק קשת אחת כזו, $\{v_6, v_8\}$ ולכן מחושב המינימום של $\{b_{v_8}\}$ שהוא 13. המינימום על כל הערכים הללו הוא 0, וזה הערך שמקבל L_{v_6}.

Algorithm 3.4 Bridges$(G=(V,E))$

```
Require: G is a connected graph
  Let r ∈ V be an arbitrary vertex in G.
  Call DFS(r).
  Let T be the resulting DFS tree.
  For u ≠ r, denote by p(u) the parent of u in T.
  Call Calc-L(r)
  for every u ∈ V, u ≠ r do
      if L_u ≥ b_u then
          print the edge {p(u), u}
```

◄ **תרגיל 3.15**

הוכיחו את נכונות האלגוריתם Calc-L והראו שזמן הריצה שלו הוא $O(m)$. **פתרון בעמ' 35** ►

נסכם: אלגוריתם 3.4 מוצא בזמן $O(m)$ את הגשרים בגרף קשיר נתון G. נכונות אלגוריתם 3.4 נובעת מיידית מטענה 3.4 וממה שהוכחנו בתרגיל 3.15. זמן הריצה שלו מורכב משלושה חלקים: א. הזמן הדרוש לביצוע סריקה־לעומק שהוא $O(m)$; ב. הזמן הדרוש לביצוע אלגוריתם 3.3 שהוא $O(m)$; ג. הזמן הדרוש לביצוע לולאה על הצמתים שהוא $O(n)$. בסך הכול, $O(m)$.

רכיבי דו־קשירות. נתון גרף קשיר $G=(V,E)$. זוג צמתים ב־G ייקרא "דו־קשיר בקשתות" אם קיים ביניהם מסלול שאינו מכיל גשר.

◄ **תרגיל 3.16**

הוכיחו כי:

1. דו־קשירות בקשתות היא יחס של שקילות על הצמתים. (מחלקות השקילות נקראות רכיבי דו־קשירות בקשתות).
2. כאשר B היא קבוצת הגשרים של G, רכיבי הדו־קשירות בקשתות הם רכיבי הקשירות בגרף $(V,E\setminus B)$.

פתרון בעמ' 36 ►

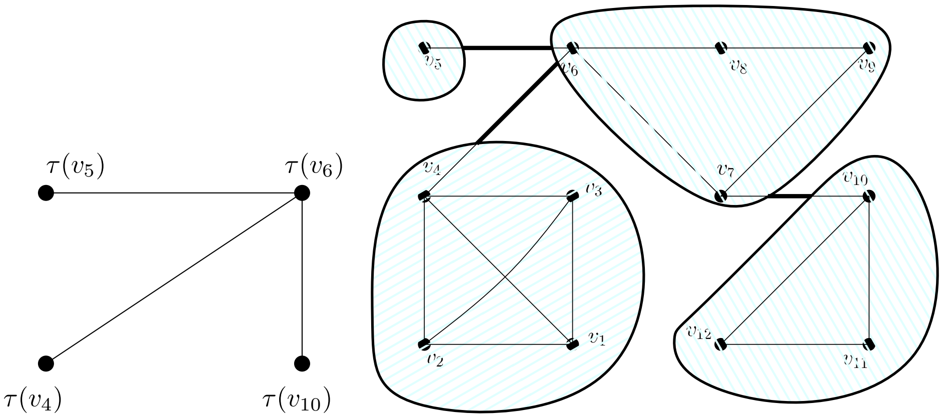
כפי שהזכרנו בתחילת הסעיף, גשרים הם קשתות בעלות תכונה מיוחדת: נפילה של קשת כזו מנתקת את הגרף. רכיבי דו־קשירות הם חלקים בגרף שקשירותם עמידה בפני נפילה של קשת אחת: אם הקשת הנופלת היא גשר, אזי, כפי שהוכחנו בתרגיל הקודם, רכיב הדו־קשירות נשאר קשיר. אם הקשת אינה גשר, אזי לפי ההגדרה, כל הגרף נשאר קשיר ובפרט הרכיב הדו־קשיר.

◄ **תרגיל 3.17**

תארו אלגוריתם שבזמן $O(m)$ מחשב את רכיבי הדו־קשירות בקשתות של גרף קשיר. הדרכה: השתמשו באפיון רכיבי דו־קשירות שהוכחנו בתרגיל הקודם, ובאלגוריתם לחישוב גשרים.
פתרון בעמ' 36 ►

עץ הגשרים של גרף קשיר נתון $G=(V,E)$ הוא גרף $H=(W,F)$ שבו צומתי W הם רכיבי הדו־קשירות של G, ובין זוג צמתים ב־W מחברת קשת, אם קיימת קשת (בהכרח גשר) אשר מחברת זוג צמתים ברכיבי הדו־קשירות המתאימים ב־G. לדוגמה, באיור 3.12 מוצג עץ הגשרים של הגרף שתואר באיור 3.4.

פורמלית, יוגדר הגרף $H=(W,F)$ כדלקמן: תהי $B\subseteq E$ קבוצת הגשרים של G. צומתי H יהיו רכיבי הקשירות של $(V,E\setminus B)$. נגדיר העתקה $\tau: V\to W$ בין צומתי G לרכיבי



איור 3.12: עץ הגשרים של הגרף מאיור 3.4. כל צומת בעץ הגשרים מתאים לרכיב קשירות בגרף המקורי אחרי שמוציאים ממנו את הגשרים. הקשתות בעץ הגשרים מתאימות לגשרים בגרף המקורי. מימין, תיאור סכמטי של עץ הגשרים.

הדו־קשירות של G, כך ש־$\tau(u)$ הוא רכיב הדו־קשירות של u. כעת נגדיר את הקשתות של H:

$$F = \{\, \{\tau(u), \tau(v)\} : \ \{u, v\} \in B\}.$$

H נקרא **עץ הגשרים** של G.

◄ **תרגיל 3.18**

הוכיחו שעץ הגשרים של גרף קשיר נתון הוא אכן עץ. **פתרון בעמ' 36** ►

3.7 סריקות בגרפים מכוונים

בגרפים שדנו בהם עד כה, הקשתות היו זוג **לא סדור** $\{u, v\}$. גרפים אלה נקראים גם גרפים **לא מכוונים**. בסעיף הזה נרחיב את הדיון לגרפים מכוונים – גרפים שהקשתות בהם הן זוג סדור (u, v). בגרפים האלה, לכל קשת יש כיוון, במקרה שלעיל מ־u ל־v. כאשר הגרף מכוון המושגים שבהם דנו בסעיף הקודם משתנים במקצת. בסעיף הזה נדון בתכונות של גרפים מכוונים ובסריקות של גרפים מכוונים.

נפתח במילון מושגים לגרפים מכוונים:

גרף מכוון [directed graph] הוא זוג $G = (V, E)$ שבו:

- V היא קבוצה סופית של איברים הנקראים צמתים [nodes] או קודקודים [vertices].
- E היא קבוצה של זוגות סדורים בתוך V הנקראים קשתות [edges].

באיור מקובל לתאר גרף מכוון במישור כך: צמתים מיוצגים על ידי נקודות או עיגולים, וקשת (u, v) מיוצגת על ידי קו המחבר את u ל־v עם חץ לכיוון v. לדוגמה, באיור 3.13 מצויר הגרף $G = (V, E)$ שבו

$$V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$$
$$E = \left\{ \begin{array}{c} (v_1, v_7), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_6), (v_4, v_1), \\ (v_4, v_5), (v_5, v_2), (v_6, v_1), (v_7, v_6), \\ (v_7, v_8), (v_8, v_{10}), (v_9, v_8), (v_9, v_{10}) \end{array} \right\}$$

דרגת כניסה של צומת v היא מספר הקשתות הנכנסות ל־v.

דרגת יציאה של צומת v היא מספר הקשתות היוצאות מ־v.

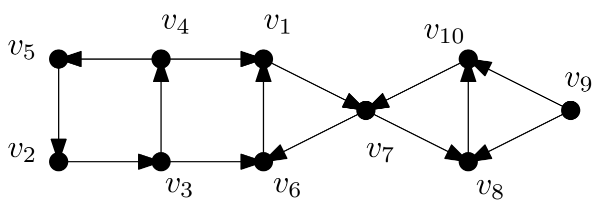
מסלול. מסלול בגרף הוא סדרה של צמתים (לפחות צומת אחד) כך שבין כל שני צמתים עוקבים בסדרה קיימת קשת מכוונת בגרף. שימו לב, בגרף מכוון ייתכן שקיים מסלול מ־u ל־v, אך לא בכיוון ההפוך.

מסלול מעגלי (או בקיצור מעגל) בגרף מכוון הוא מסלול מכוון שהצומת הראשון והאחרון שלו זהים.

גרף מכוון ללא מעגלים (גמ"ל) [Directed acyclic graph (DAG)] כשמו כן הוא – גרף מכוון ללא מסלולים מעגליים.

צמתים נגישים הדדית [strongly connected]. הצמתים u ו־v נקראים נגישים הדדית אם קיימים בגרף מסלולים מ־u ל־v ומ־v ל־u.

סריקה־לרוחב. נגדיר כעת סריקה־לרוחב בגרף מכוון. הסריקה דומה לסריקה־לרוחב בגרף לא־מכוון אך מתחשבת בכיווני הקשתות. ביתר פירוט: $L_0 = s$; בהנחה שהגדרנו את השכבות $L_1, \ldots, L_j$, השכבה L_{j+1} מכילה צמתים שלא הופיעו בשכבה קודמת אך קיימות קשתות המכוונות אליהם מצמתים הנמצאים בשכבה L_j. שימו לב, בגרף מכוון ייתכנו קשתות משכבה j לשכבה i כאשר $i \leq j - 1$.



איור 3.13: גרף מכוון

◄ **תרגיל 3.19**

הריצו סריקה־לרוחב מצומת v_4 על הגרף באיור 3.13. **פתרון בעמ' 36** ►

◄ **תרגיל 3.20**

תהיינה $(L_i)_i$ השכבות שנוצרו בסריקה־לרוחב של גרף מכוון.

1. אם קיימת קשת מצומת ב־L_j לצומת ב־L_i הוכיחו כי $i \leq j + 1$.
2. תנו דוגמה לגרף מכוון על n צמתים שבסריקה־לרוחב שלו יש קשת מ־L_{n-1} ל־L_0.

פתרון בעמ' 36 ►

סריקה־לעומק. נכתוב את אלגוריתם הסריקה־לעומק עבור גרפים מכוונים, בתוספת זמני כניסה וזמני יציאה. הסריקה־לעומק מתוארת באלגוריתם 3.5 ובאלגוריתם 3.6.

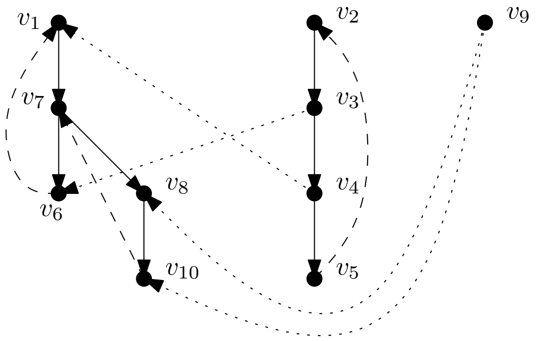
אלגוריתם 3.5 ואלגוריתם 3.6 דומים לאלגוריתמי סריקה־לעומק בגרפים לא מכוונים (אלגוריתם 3.2 ואלגוריתם 3.1 בהתאמה), אך כעת הקשתות מכוונות. נריץ את אלגוריתם 3.5 על הגרף באיור 3.13, בהנחה שלולאת While באלגוריתם 3.5 סורקת את הצמתים בסדר מילוני. פלט הסריקה הוא אוסף עצים מושרשים המתוארים באיור 3.14.

Algorithm 3.5 dDFS-Loop(G)

Require: G is a directed graph
Initialize all vertices to "Not-yet-Explored"
$t \leftarrow 0$
while there exists a "Not-Yet-Explored" vertex u do
  Call dDFS(u)

Algorithm 3.6 dDFS(u)

$b_u \leftarrow t; \quad t \leftarrow t+1$
Mark u as "Explored"
for each directed edge (u, v) incident to u do
  if v is not marked "Explored" then
    Recursively invoke dDFS(v)
$f_u \leftarrow t; \quad t \leftarrow t+1$



איור 3.14: העצים המושרשים ושאר קשתות הגרף לאחר סריקה־לעומק של הגרף המכוון מאיור 3.13. קו מלא מייצג קשתות עץ, קו מקווקוו מייצג קשתות אחורה, וקו מנוקד מייצג קשתות חוצות.

◄ **תרגיל 3.21**
בדקו שהטענות שהוכחנו בתרגיל 3.11 עודן נכונות בגרפים מכוונים. **(ללא פתרון)** ►

שימו לב, בסריקה־לעומק של גרף מכוון יש ארבעה סוגי קשתות בגרף:

קשתות עץ – קשתות (u, v) שנסרקו בזמן הקריאה ל־dDFS(u), ובזמן הזה v לא היה מסומן כ־"Explored".

קשתות קדימה – קשתות מאב קדמון לצאצא שאינן קשתות עץ (אינן מופיעות באיור 3.14).

קשתות אחורה – קשתות מצאצא לאב קדמון (לדוגמה הקשתות המקווקוות באיור 3.14).

קשתות חוצות – כל השאר (לדוגמה הקשתות המנוקדות באיור 3.14).

הקשתות בשלושת הסוגים הראשונים הן קשתות שצורתן (u, v) כאשר u צאצא של v או להפך, כלומר $b_v < b_u < f_u < f_v$ או $b_u < b_v < f_v < f_u$. בקשתות מהסוג האחרון (קשתות חוצות) מתקיים בהכרח $[b_u, f_u] \cap [b_v, f_v] = \emptyset$.

טענה 3.6 אם $E \ni (u, v)$ היא קשת בגרף המכוון ו־$[b_u, f_u] \cap [b_v, f_v] = \emptyset$, אז $b_v < f_v < b_u < f_u$.

הוכחה. מספיק להוכיח את אי־השוויון האמצעי. נניח בשלילה ש־$f_v < b_u$. התנאי על אי־חיתוך המקטעים מחייב ש־ $f_u < b_v$. כלומר הצומת u נסרק לפני הצומת v וסריקתו הסתיימה לפני תחילת הסריקה של הצומת v. מזה אנו מסיקים שבסיום ביצוע השגרה $\mathrm{dDFS}(u)$ הצומת v עדיין איננו במצב "Explored". אך זו סתירה לפעולת הסריקה־לעומק. במהלך ביצוע קריאה ל־$\mathrm{dDFS}(u)$ (אלגוריתם 3.6) תתבצע בהכרח קריאה ל־$\mathrm{dDFS}(v)$ כי (u, v) היא קשת בגרף, ובזמן שמתחילים את הביצוע של $\mathrm{dDFS}(u)$ הצומת v אינו במצב "Explored". מכאן שהצומת v בהכרח עוברת למצב "Explored" במהלך ביצוע $\mathrm{dDFS}(u)$. ■

◄ **תרגיל 3.22**

הציגו דוגמה של גרף מכוון וסריקה־לעומק שלו המכילה קשתות קדימה. **פתרון בעמ' 37** ►

3.8 קשירות ומיון טופולוגי בגרפים מכוונים

קראו בספר סעיפים 3.5 ו־3.6

כפי שהגדרנו בתחילת סעיף 3.7, שני צמתים בגרף מכוון ייקראו **נגישים הדדית** אם קיים מסלול מן הראשון לשני, ולהפך. היחס "נגישים הדדית" הינו יחס שקילות על הצמתים (ראו טענה (3.17) בספר). מחלקות השקילות נקראות **רכיבי קשירות חזקה**.

◄ **תרגיל 3.23**

מצאו את רכיבי הקשירות החזקה בגרף המכוון באיור 3.13. **פתרון בעמ' 37** ►

גרף מכוון נקרא **קשיר היטב** אם כל זוג צמתים בו נגישים הדדית, או בניסוח שקול, יש בו רק רכיב קשירות חזקה יחיד המכיל את כל צומתי הגרף. אפשר לבדוק אם גרף מכוון G הוא קשיר היטב בזמן לינארי על ידי הרצת סריקה (לרוחב או לעומק) על הגרף, מצומת כלשהו s, והרצת סריקה מצומת s על הגרף G^{rev} שבו כיווני הקשתות הפוכים. אם בשתי הסריקות מתקבלים כל צומתי G, אזי G קשיר היטב. הסיבה לכך היא: אם u מופיע בסריקה של G מ־s, זה אומר שיש מסלול מ־s ל־u ב־G, ואם u מופיע בסריקה של G^{rev} מ־s, משמעות הדבר שיש מסלול מ־s ל־u ב־G^{rev}, כלומר יש מסלול מ־u ל־s ב־G. לכן u נגיש הדדית ל־s. אם זה נכון לכל צומת u בגרף, אזי כל הצמתים נגישים ל־s, ומשמעות הדבר שהגרף קשיר היטב. בכיוון השני, אם G קשיר היטב, אפשר להסיק שיש מסלול מ־s לכל צומת אחר ב־G, ולכן בסריקת G מ־s יופיעו כל צומתי G. כמו כן יש מסלול מכל צומת אחר ל־s ב־G, כלומר יש מסלול מ־s לכל צומת אחר ב־G^{rev}, ולכן כל הצמתים יופיעו בסריקה של G^{rev} המתחילה ב־s.

בעיה קשה יותר מבעיית ההחלטה אם גרף מכוון הוא קשיר היטב, היא בעיית מציאת רכיבי קשירות חזקה בגרף מכוון נתון. ישנו אלגוריתם פשוט אך "חכם" אשר מבצע פעולה זאת בזמן לינארי, אך הוא איננו חלק מחומר הלימוד של קורס זה.

מיון טופולוגי של צומתי גרף מכוון $G = (V, E)$, פירושו השתת סדר מלא על $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ כך שאם $(v_i, v_j) \in E$ אז $i < j$. בספר מוכח שבגרף מכוון G שלוש התכונות הבאות הן שקולות:

(א) G הוא גרף מכוון ללא מעגלים (גמ"ל);

(ב) בכל תת־גרף של G יש צומת ללא קשת נכנסת;

(ג) קיים מיון טופולוגי של G.

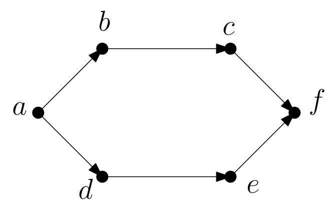
תכונה (ב) לעיל הינה בסיס לאלגוריתם לזיהוי גמ"ל ולמציאת מיון טופולוגי של גמ"ל: יש להתחיל מהגרף הנתון: כל עוד הגרף אינו ריק, חפשו צומת ללא קשת נכנסת. אם לא קיים צומת כזה, הגרף אינו גמ"ל. אם קיים צומת כזה, הסירו אותו וחִזרו על התהליך. אם התהליך הסתיים ויש בו גרף ריק, אזי הגרף המקורי הוא גמ"ל וסדר הסרת הצמתים הוא מיון טופולוגי. אפשר לממש את האלגוריתם הזה בזמן $O(m+n)$ על ידי תחזוקה של רשימת הצמתים ללא קשת נכנסת, ותחזוקה של דרגת הכניסה בכל צומת בגרף הנוכחי, כפי שמפורט בסעיף 3.6 בספר.

◄ תרגיל 3.24

הוכיחו שקצותיה של קשת (u,v) בגרף מכוון נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה אם ורק אם (u,v) נמצאת על מסלול מעגלי. **(ללא פתרון) ►**

◄ תרגיל 3.25

תארו את כל המיונים הטופולוגיים השונים של הגרף הבא (איור 3.10 בספר):



פתרון בעמ' 37 ►

נציג כעת אלגוריתם שונה לזיהוי גרף מכוון ללא מעגלים ולמציאת מיון טופולוגי בגמ"ל המבוסס על סריקה־לעומק. ניזכר בתכונות הסריקה־לעומק בגרף מכוון. אם קיימת קשת אחורה מצאצא u לאב קדמון v, אזי (u,v) בצירוף המסלול בעץ הסריקה־לעומק מ־v ל־u הינו מעגל בגרף המכוון. אם לא קיימת קשת אחורה, נשים לב שקשתות הגרף הן קשתות עץ, קשתות מאב קדמון לצאצא, וקשתות חוצות (u,v) וכל אלה מקיימות $f_u > f_v$, (ראו טענה 3.6). לכן, סידור הצמתים בגמ"ל בסדר f_v יורד הינו מיון טופולוגי.

◄ תרגיל 3.26

תארו אלגוריתם לזיהוי גרף מכוון ללא מעגלים ולחישוב מיון טופולוגי בזמן $O(m+n)$ המבוסס על סריקה־לעומק ועל ההבחנה שהובאה בפסקה לעיל. **פתרון בעמ' 38 ►**

◄ תרגיל 3.27

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. נגדיר גרף $H=(W,F)$ שבו צומתי H הם רכיבי קשירות חזקה של G. וקשתות H מוגדרות כדלקמן:

$$F = \{(a,b) \in W \times W : \ a \neq b, \, \exists u \in a, \, v \in b \text{ such that } (u,v) \in E\}.$$

הוכיחו ש־H הוא גרף מכוון ללא מעגלים. **פתרון בעמ' 38 ►**

3.9 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 3.1 (מעמוד 13)

1. 3.

2. v_6, v_5, v_2.

3. התת־גרף הנפרש על הצמתים $\{v_1, \ldots, v_7\}$, כלומר,

$$\left(\{v_1, \ldots, v_7\}, \left\{\begin{matrix}\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\},\end{matrix}\right\}\right)$$

4. התת־גרף

$$(\{v_8, \ldots, v_{11}\}, \{\{v_8, v_9\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_9, v_{10}\}\{v_{10}, v_{11}\}\})$$

מכיל 4 קשתות.

5. יש שלושה מסלולים: (v_1, v_6, v_5), (v_1, v_5), $(v_1, v_2, v_7, v_4, v_5)$. נשים לב שלא יכולים להיות יותר משלושה מסלולים זרים בקשתות, המתחילים מ־v_1, כי הדרגה של v_1 היא 3.

6. מעגל באורך 4: $(v_2, v_3, v_4, v_7, v_2)$; מעגל באורך 5: $(v_1, v_2, v_7, v_4, v_5, v_1)$; מעגל באורך 6: $(v_1, v_2, v_7, v_4, v_5, v_6, v_1)$.

:

פתרון תרגיל 3.2 (מעמוד 13)

יהי P מסלול קצר ביותר בין u ל־v, כלומר אורכו של P הינו $d(u, v)$. יהי Q המסלול הקצר ביותר בין v ל־w. כיוון שהצומת האחרון ב־P הוא v, שהינו הצומת הראשון ב־Q, ניתן לשרשר את שני המסלולים (תוך השמטת עותק אחד של v) ולקבל מסלול R מ־u ל־w שאורכו שווה לסכום אורכי P ו־Q, כלומר, $d(u, v) + d(v, w)$. כיוון ש־R הינו מסלול מ־u ל־v אורכו חוסם מלמעלה את המרחק מ־u ל־w, כנדרש.

פתרון תרגיל 3.3 (מעמוד 13)

נניח שבין u ל־v קיים מסלול $u = u_0, u_1, \ldots, u_l = v$ ונבצע את תהליך המחיקה הזה: כל עוד קיימים $0 \leq i < j \leq l$ כך ש $u_i = u_j$ נוכל למחוק את תת־המסלול $u_{i+1}, \ldots, u_j$. לאחר מחיקת תת־המסלול, הסדרה הנותרת תהיה גם היא מסלול מ־u ל־v, אבל המסלול יהיה קצר יותר, ולכן התהליך בהכרח מסתיים. בסיום התהליך לא מופיע אותו צומת במקומות שונים במסלול, לכן המסלול המתקבל בין u ל־v הוא מסלול פשוט.

פתרון תרגיל 3.4 (מעמוד 13)

נראה כי שלוש התכונות המגדירות יחס שקילות מתקיימות עבור יחס הקשירות.

רפלקסיביות. המסלול (v) הוא מסלול מ־v ל־v.

סימטריות. אם $(v_1, \ldots, v_k)$ הוא מסלול בגרף, אז גם $(v_k, \ldots, v_1)$ הוא מסלול בגרף מפני שהגרף אינו מכוון.

טרנזיטיביות. אם P הוא מסלול מ־u ל־v ו־Q הוא מסלול מ־v ל־w , אזי השרשור של P ו־Q (כאשר צומת הסיום של P וצומת ההתחלה של Q מתמזגים), הוא מסלול מ־u ל־w.

פתרון תרגיל 3.5 (מעמוד 14)

יהי $T = (V, E)$ עץ. יהי u צומת בדרגה 1 ב־T, ו־$\{u, v\}$ היא הקשת הסמוכה ל־u ב־T. נסמן $T' = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{u, v\})$. צריך להוכיח ש־$T'$ הוא עץ, כלומר קשיר וחסר מעגלים. תחילה נבדוק שאין ב־T' מעגלים. כיוון ש־T' הינו תת־גרף של T, לו היה בו מעגל, מעגל זה היה גם מעגל ב־T, סתירה להיות T עץ.

נבדוק כעת ש־T' הוא קשיר. יהיו $x, y \in V \setminus \{u\}$ שני צמתים ב־T' ונראה כי יש מסלול המחבר ביניהם. כיוון שאלה צמתים ב־T, ו־T הוא קשיר, קיים (לפי תרגיל 3.3) מסלול פשוט $(x = x_0, x_1, \ldots, x_l = y)$ בין x ל־y ב־T. כעת נטען ש־u אינו מופיע במסלול שלעיל. ואמנם מהנתון אנו יודעים כי $u \neq x_0$ ו־$u \neq x_l$. כיוון שהמסלול שלעיל פשוט, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} הם צמתים שונים עבור $0 < i < l$, ולכן דרגתו של x_i היא לפחות 2. מזה אנו מסיקים ש־$x_i \neq u$. כיוון ש־u אינו מופיע במסלול שלעיל, זהו גם מסלול ב־T'.

לסיכום, הוכחנו ש־T' הוא קשיר ואינו מכיל מעגלים, ולכן הוא עץ.

פתרון תרגיל 3.6 (מעמוד 15)

ההוכחה באינדוקציה על n – מספר הצמתים בעץ. בסיס האינדוקציה: בעץ עם צומת אחד אין קשתות.

נניח את הנחת האינדוקציה עבור עצים שיש להם $n-1$ צמתים, ונוכיח זאת עבור עצים שיש להם n צמתים. יהי T עץ שיש לו n צמתים. לפי טענה 3.1 יש בו צומת בדרגה אחת. נסיר את הצומת הזה ואת הקשת הסמוכה לו. לפי תרגיל 3.5, הגרף המתקבל על $n-1$ צמתים הוא עץ. לפי הנחת האינדוקציה יש בעץ זה $n-2$ קשתות, ולכן ב־T יש $(n-2)+1$ קשתות.

פתרון תרגיל 3.7 (מעמוד 15)

1, 2. $\Leftarrow$ 3. הוא תוכן טענה (1.3) בספר ותרגיל 3.6.

1, 3. $\Leftarrow$ 2. נניח בשלילה ש־G קשיר ומכיל מעגל C, ונראה שמספר הקשתות בו גדול מ־$n-1$, הנחה זו סותרת את הנחה 3. נבחר קשת $\{x, y\} \in C$ ונסיר אותה מהגרף G. הגרף שנוצר נשאר קשיר, כי בכל מסלול ב־G שהשתמש בקשת $\{x, y\}$ אפשר להחליף את הקשת $\{x, y\}$ בתת־מסלול $C \setminus \{x, y\}$, ולקבל מסלול שיחבר בין אותם צמתים בלי להשתמש בקשת $\{x, y\}$. נמשיך בתהליך של מחיקת קשתות ממעגלים עד שנישאר עם גרף ללא מעגלים. כיוון שנשמרה הקשירות, הגרף שיתקבל הוא עץ ולפי תרגיל 3.6 הוא יכיל $n-1$ קשתות. כיוון שעץ זה יתקבל לאחר מחיקה של קשת אחת לפחות מ־G, נובע שיהיו ב־G יותר מ־$n-1$ קשתות, ותוצאה זו סותרת את הנחה 3.

2, 3. $\Leftarrow$ 1. נניח בשלילה כי $G = (V, E)$ אינו קשיר, ונסיק שיש בו פחות מ־$n-1$ קשתות, בסתירה להנחה 3. אם G אינו קשיר, יש בו $t \geq 2$ רכיבי קשירות $V_1, \ldots, V_t$. תהי E_i קבוצת הקשתות של G, ששני קצותיהן ב־V_i. כיוון שאין קשת המחברת שני רכיבי קשירות שונים, $E_1 \cup \cdots \cup E_t = E$, לכן $\sum_i |E_i| = |E|$. שימו לב, כל אחד מהגרפים (V_i, E_i) הוא קשיר וללא מעגלים ומכאן שהוא עץ, כלומר $|E_i| = |V_i| - 1$ ולכן

$$|E| = \sum_i |E_i| = \sum_i (|V_i| - 1) = n - t < n - 1.$$

פתרון תרגיל 3.8 (מעמוד 16)

שימו לב, עץ הסריקה-לרוחב תלוי בסדר שבו אנו סורקים את הצמתים בכל שכבה. אנו מניחים שבתוך כל שכבה הצמתים מסודרים בסדר מספרי עולה. במקרה זה,

$$L_0 = \{v_1\}$$
$$L_1 = \{v_2, v_5, v_6\}$$
$$L_2 = \{v_3, v_7, v_4\}$$

העץ המתקבל מוצג באיור 3.5.

פתרון תרגיל 3.9 (מעמוד 17)

בפתרון שלהלן מניחים שהסריקה־לעומק מתבצעת לפי האלגוריתם הרקורסיבי, וכי השכנים נסרקים בכל צומת לפי סדר מילוני. העץ המתקבל מוצג באיור 3.9, וערכי $(b_u)_{u\in V}$, $(f_u)_{u\in V}$ מוצגים באיור 3.11 בעץ מצד שמאל.

פתרון תרגיל 3.10 (מעמוד 18)

יהי T עץ הסריקה־לעומק של גרף קשיר. נוכיח עתה כי אם v הוא בן של u ב־T, אז $b_u < b_v < f_v < f_u$. המשמעות של היות v בנו של u ב־T היא שהסריקה $\mathrm{DFS}(v)$ נקראת מתוך $\mathrm{DFS}(u)$, וזה מוכיח את הטענה. קל להראות כעת – באינדוקציה על המרחק בין v ל־u ב־T – כי אם v הוא צאצא של u אזי $b_u < b_v < f_v < f_u$.

נניח כעת שאין יחסי צאצא ואב־קדמון בין u ל־v. יהי w אב־קדמון משותף ל־u ול־v ב־T כך שאין ל־w בן שהוא אב־קדמון המשותף ל־u ול־v. הצומת w נקרא האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר [lowest common ancestor]. ל־w יש בן v' שהוא אב קדמון של v (ייתכן ש־$v = v'$) ובן u' שהוא אב־קדמון של u (ייתכן ש־$u = u'$). שימו לב, התנאי על w מחייב ש־$v' \neq u'$. כיוון ששניהם בנים של w ב־T, מרגע הקריאה ל־$\mathrm{DFS}(w)$ ועד היציאה מהשגרה $\mathrm{DFS}(w)$ בוצעו קריאות ל־$\mathrm{DFS}(u')$ וגם ל־$\mathrm{DFS}(v')$. כיוון ש־u' ו־v' הם בנים של w ב־T, הקריאות האלה בוצעו מתוך השגרה $\mathrm{DFS}(w)$. נניח שהקריאה ל־$\mathrm{DFS}(u')$ בוצעה ראשונה מבין השתיים (המקרה ההפוך הוא סימטרי). בקריאה ל־$\mathrm{DFS}(u')$ כל הצמתים שנסרקו הינם צמתים שנסרקו כבר או צאצאים של u' ב־T. כיוון ש־v' איננו אף אחד מהמקרים הללו, אנו מסיקים שהקריאה ל־$\mathrm{DFS}(v')$ לא החלה לפני שביצוע $\mathrm{DFS}(u')$ הסתיים. מכאן ש־$f_{u'} < b_{v'}$. כמו־כן, כיוון ש־u' הוא אב־קדמון של u, מהאמור לעיל נובע כי $f_u \leq f_{u'}$, ובאופן דומה $b_{v'} \leq b_v$ ולכן $f_u < b_v$.

פתרון תרגיל 3.11 (מעמוד 18)

1. כל f_u ו־b_u מקבלים ערך בדיוק פעם אחת, וזהו ערכו של המשתנה t. המשתנה t גדל ב־1 לאחר כל השמה כזאת, ולכן הוא מקבל בדיוק $2n$ ערכים. כיוון שהוא מתחיל ב־0, טווח הערכים שהוא יקבל יהיה $0, .., 2n-1$.

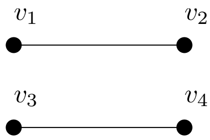
2. בתרגיל 3.10 למדנו שקבוצת הצמתים v המקיימים $b_u < f_v < f_u$ שווה לקבוצת הצמתים v המקיימים $b_u < b_v < f_u$, השווה לקבוצת הצאצאים של u בעץ הסריקה לעומק. לפי הפסקה הקודמת אנו יודעים שלכל מספר שלם s בין $b_u + 1$ ל־$f_u - 1$ קיים צומת v יחיד כך ש־b_v או f_v מקבל את הערך s. מכאן שמספר הצאצאים של u הוא בדיוק מחצית מ־$|\{b_u + 1, \dots, f_u - 1\}|$.

פתרון תרגיל 3.12 (מעמוד 21)

נקבע צומת s כלשהי. כפי שכבר ראינו, סריקה־לרוחב מ־s בגרף קשיר סורקת את כל הגרף. קיימת

רק אפשרות אחת לחלק לשכבות: שכבה L_i היא בדיוק קבוצת הצמתים במרחק i מ־s. כיוון שכל חלוקה לצדדים בגרף דו־צדדי מתאימה לחלוקה לשכבות זוגיות או אי-זוגיות בסריקה־לרוחב מהצומת s, וחלוקה כזאת היא יחידה, יש רק אפשרות אחת לחלק לצדדים בגרף דו־צדדי קשיר.

שימו לב, הטיעון שלעיל אינו תקף בגרף לא קשיר, כי חלק מן הצמתים אינם מופיעים בסריקה־לרוחב מצומת נתון. להלן דוגמה נגדית:



זהו גרף דו־צדדי, לא קשיר, שיש לו שתי חלוקות שונות לצדדים: האחת היא $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ והשנייה היא $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_3\}$.

פתרון תרגיל 3.13 (מעמוד 22)

נתון גרף קשיר $G = (V, E)$ וקשת $e = \{x, y\} \in E$. תחילה נניח שקיים מעגל C המכיל את e ונראה ש־e אינה גשר. אכן, המסלול $C \setminus \{e\}$ מקשר את x ו־y ב־$(V, E \setminus \{e\})$, לכן $(V, E \setminus \{e\})$ נשאר קשיר, כלומר e אינה גשר.

בכיוון השני, אם e אינה גשר, אז הצמתים x ו־y קשירים בגרף $(V, E \setminus \{e\})$. כלומר, ב־$(V, E \setminus \{e\})$ קיים מסלול פשוט P בין x ל־y. מכאן ש־$P \cup \{e\}$ הוא מעגל ב־G המכיל את e.

פתרון תרגיל 3.14 (מעמוד 25)

נסמן ב־T_u את תת־העץ של T המושרש ב־u. נוכיח ש־$\bar{L}_u = L_u$ באינדוקציה על $|T_u|$ (מספר הצמתים ב־T_u).

אם $|T_u| = 1$ אזי u הוא עלה של T, ומתקיים:

$$\bar{L}_u = \min\{b_w : \exists (u, w) \in E \setminus T\} = L_u.$$

אם $|T_u| > 1$, יהיו $v_1, \ldots, v_\ell$ הבנים של u ב־T. מהנחת האינדוקציה $\bar{L}_{v_i} = L_{v_i}$, ומתקיים:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_u &= \min\{\min\{b_w : \exists (u, w) \in E \setminus T\}, \min_{1 \le i \le \ell} \bar{L}_{v_i}\} \\
&= \min\{\min\{b_w : \exists (u, w) \in E \setminus T\}, \min_{1 \le i \le \ell} L_{v_i}\} \\
&= \min \left\{ \begin{array}{c} \min\{b_w : \exists (u, w) \in E \setminus T\}, \\ \min\limits_{1 \le i \le \ell} \min\{b_w : \exists (v, w) \in E \setminus T, \text{ and } v \text{ descendant of } v_i\} \end{array} \right\} \\
&= \min\{b_w : \exists (v, w) \in E \setminus T, \text{ and } v \text{ descendant of } u\} \\
&= L_u.
\end{aligned}$$

פתרון תרגיל 3.15 (מעמוד 26)

נכונות האלגוריתם Calc-L נובעת מההבחנה המיידית שהוא מחשב את ערכי $(\bar{L}_u)_{u \in V}$, ולפי טענה 3.5 גם את ערכי $(L_u)_{u \in V}$. ננתח את זמן הריצה. הקריאה הרקורסיבית מתבצעת פעם אחת לכל צומת. במהלך הקריאות הרקורסיביות כל קשת נסרקת פעם אחת. כיוון שזמן הריצה עבור כל צומת הוא קבוע, נקבל בסך הכול $O(m)$.

פתרון תרגיל 3.16 (מעמוד 26)

1. נוכיח שדו־קשירות בקשתות היא יחס של שקילות. היחס סימטרי מפני שהגרף אינו מכוון, לכן, בהינתן מסלול ללא גשרים, מצומת u לצומת v, גם המסלול ההפוך מ־v ל־u אינו מכיל גשרים. היחס הוא רפלקסיבי כי המסלול שמכיל רק צומת אחד אינו מכיל קשתות כלל, ובפרט אינו מכיל גשרים. היחס הוא גם טרנזיטיבי כי בהינתן מסלול ללא גשרים, מ־a ל־b, ומסלול ללא גשרים מ־b ל־c, שרשורם של המסלולים הוא מסלול מ־ a ל־c ללא גשרים.

2. כיוון ש־B היא קבוצת הגשרים, נוכל לומר כי שני צמתים נמצאים באותו רכיב קשירות ב־$(V, E \setminus B)$ אם ורק אם יש ביניהם מסלול ללא גשרים, כלומר הם דו־קשירים בקשתות.

פתרון תרגיל 3.17 (מעמוד 26)

האלגוריתם יהיה כדלקמן: נפעיל אלגוריתם למציאת גשרים; נבצע סריקה נוספת לעומק לצורך הסרת הגשרים מהגרף. לבסוף נריץ סריקה של כל הגרף החדש, ונמצא את רכיבי הקשירות שלו. נכונות האלגוריתם נובעת מהסעיפים הקודמים. זמן הריצה הוא $O(m+n)$, כי זהו הזמן הדרוש לכל אחת משלוש הסריקות המבוצעות באלגוריתם.

פתרון תרגיל 3.18 (מעמוד 27)

יהי $H = (W, F)$ עץ הגשרים של הגרף הקשיר $G = (V, E)$. נוכיח תחילה ש־H קשיר. הקשת $E \ni \{u, v\}$ היא גשר או שאיננה גשר. אם היא איננה גשר אז $\tau(u) = \tau(v)$; ואילו אם היא גשר אז $F \ni \{\tau(u), \tau(v)\}$. לכן, עבור $A, B \in W$, יהיו $a \in A$, $b \in B$ צמתים כלשהם ברכיבי דו־קשירות בקשתות A, B. כיוון ש־G קשיר, קיים מסלול $a = a_0, ..., a_l = b$. מהאמור לעיל, כל זוג צומתי H עוקבים בסדרה $(A = \tau(a_0), \tau(a_1), ..., \tau(a_l) = B)$ הוא קשת ב־H או שזוג הצמתים זהה. לכן, לאחר מחיקה של צמתים עוקבים זהים בסדרה שלעיל, מתקבל מסלול ב־H מ־A ל־B. כיוון שזה נכון לכל $A, B \in W$, המסקנה היא ש־H קשיר.

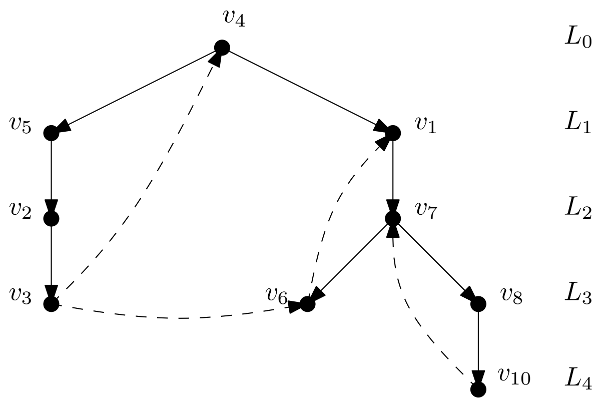
נניח עתה, בשלילה, שב־H יש מעגל $A_0, A_1, ..., A_{l-1}, A_l = A_0$. תחילה נניח ש־$\ell \geq 3$ מכאן נוכל להסיק שלכל $0 \leq i \leq l-1$ קיימת קשת $(b_i, a_{i+1}) \in E$ כך ש־$b_i \in A_i$, $a_{i+1} \in A_{i+1}$. נגדיר $a_0 = a_l$. כיוון ש־A_i הוא רכיב קשירות ב־$(V, E \setminus B)$, קיים מסלול פשוט p_i ב־G בין a_i ל־b_i המכיל רק צמתים מ־A_i. לכן, לכל $i \neq j$ יש צומתי p_i שהינם זרים בזוגות לצומתי p_j. מכאן ש־$p_0, p_1, ..., p_{l-1}, a_0$ הוא מעגל ב־G. ובפרט הגשר $\{b_0, a_1\}$ נמצא על מעגל, בסתירה לתרגיל 3.13.

פתרון תרגיל 3.19 (מעמוד 28)

איור 3.15 מתאר את עץ הסריקה־לרוחב של הגרף שהוצג באיור 3.13 עבור סריקה המתחילה ב־v_4. השכבות גם הן מתוארות. שימו לב שהצומת v_9 אינו מופיע בסריקה, מפני שאינו נגיש מ־v_4.

פתרון תרגיל 3.20 (מעמוד 28)

1. ההוכחה דומה להוכחה של טענה (3.4) בספר. נניח בשלילה שקיימת קשת (u, v) מן הצומת u בשכבה L_i אל הצומת v בשכבה L_j, ו־$j > i+1$. משמעות הדבר שבזמן סריקת השכבה L_i, הצומת v עדיין לא התגלה (אחרת v היה מופיע בשכבה $j \leq i+1$) וזו סתירה להגדרת סריקה־לרוחב, כי בשכבה L_i, הצומת u נשלף מהתור ואז נסרקים כל הצמתים הנגישים מ־u דרך קשת מכוונת, ביניהם v.



איור 3.15: הסריקה־לרוחב של הגרף (שהוצג באיור 3.13) מתחילה מ־v_4.

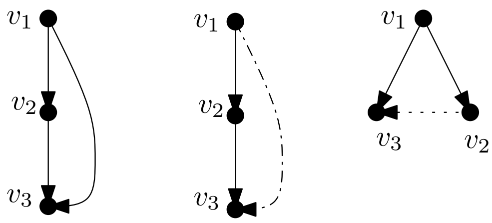
2. יהי G מעגל מכוון על n צמתים:

$$G = (\{v_0, v_1 \dots, v_{n-1}\},\ \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_0)\}).$$

נניח כי הסריקה־לרוחב מתחילה בצומת v_0. עץ הסריקה־לרוחב המתקבל הוא מסלול שיש בו שכבה $L_i = \{v_i\}$, לכן יש קשת מצומת v_{n-1} בשכבה L_{n-1} אל הצומת v_0 בשכבה L_0.

פתרון תרגיל 3.22 (מעמוד 30)

דוגמה לסריקה־לעומק עם קשת קדימה מוצגת באיור 3.16



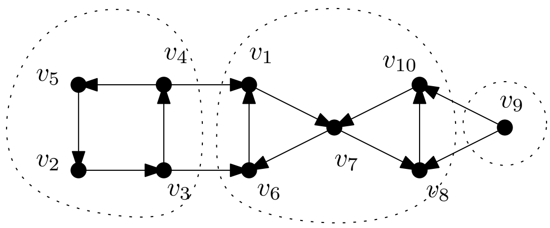
איור 3.16: מצד שמאל מאויר גרף. במרכז – סריקה־לעומק שלו המכילה קשת קדימה. מצד ימין מאוירת סריקה־לעומק שונה של אותו הגרף שאיננה מכילה קשת קדימה (ומכילה קשת חוצה במקומה).

פתרון תרגיל 3.23 (מעמוד 30)

רכיבי הקשירות החזקה של הגרף באיור 3.13 מסומנים באיור 3.17 בקווים מנוקדים.

פתרון תרגיל 3.25 (מעמוד 31)

כיוון ש־a הוא הצומת היחיד ללא קשת נכנסת, הוא חייב להופיע ראשון במיון הטופולוגי. באופן דומה, כיוון ש־f הוא הצומת היחיד ללא קשת יוצאת, הוא חייב להופיע אחרון במיון הטופולוגי.



איור 3.17: רכיבי קשירות חזקה של הגרף שהוצג באיור 3.13.

הקשת (b,c) מחייבת את c להופיע אחרי b, והקשת (d,e) מחייבת את e להופיע אחרי d. לכן התמורות הבאות הן כל המיונים הטופולוגיים של הגרף הנתון:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & d & c & e & f \\ a & d & b & e & c & f \\ a & d & b & c & e & f \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ a & b & d & e & c & f \\ a & d & e & b & c & f \end{array}$$

בסך הכול 6 מיונים טופולוגיים שונים.

פתרון תרגיל 3.26 (מעמוד 31)

נציג תחילה פתרון שבו נשתמש בכלים שלמדנו. בפתרון זה נריץ סריקה־לעומק על הגרף המכוון ונחשב את b_u, ו־f_u. כעת נסרוק את הגרף שוב, (לדוגמה, על ידי סריקה־לרוחב) ונבדוק אם קיימת קשת אחורה מהסריקה־לעומק הקודמת. נוכל לבצע את הבדיקה הזאת תוך כדי הקדשת זמן קבוע לכל קשת, כיוון שקשת (u,v) היא קשת אחורה אם ורק אם $b_v < b_u < f_u < f_v$. אם לא קיימת קשת אחורה, אזי הגרף הוא גרף מכוון ללא מעגלים. במקרה זה נבצע מיון בזמן לינארי של f_u כדי למצוא מיון טופולוגי.

הפתרון השני שנציע ישנה במקצת את הסריקה־לעומק (אלגוריתם 3.5) נסביר להלן את החישובים שיבוצעו בסריקה הזו: כיוון שההשמה לערכי f_u מתבצעת ב־DFS בסדר זמנים עולה, כל אשר נדרש הוא להדפיס את הצמתים בסדר הפוך לסדר שבו מושמים ערכי $(f_u)_{u\in V}$. לצורך כך, u מוכנס למחסנית בזמן השמת הערך f_u, ובסיום הסריקה מוצאים איברי המחסנית ומודפסים; בדרך הזו מובטח שהַסדר יהיה הפוך לסדר ההשמה. כמו כן יש לבדוק שהגרף הוא גמ"ל. בדיקה זו נעשית במהלך הסריקה, בעזרת התנאי $b_v < b_u$: אם הקשת (u,v) הנסרקת אינה קשת עץ, בודקים אם היא קשת אחורה, וזאת כאשר f_v עדיין לא נקבע (כלומר, הוא גדול מ־b_u). את כל הפרטים אפשר לקרוא באלגוריתם 3.7 ובאלגוריתם 3.8. הוכחת הנכונות נובעת מיידית מהאמור לעיל.

פתרון תרגיל 3.27 (מעמוד 31)

תחילה נשים לב שהקשת $e=(x,y)$ בגרף מכוון מקשרת בין שני רכיבים שונים הקשורים היטב אם ורק אם אינה חלק ממעגל מכוון. זהו תוכן תרגיל 3.24.

כעת, ההוכחה ש־H חסר־מעגלים דומה מאוד להוכחה שעץ הגשרים של גרף (לא־ מכוון) הוא חסר־מעגלים, (ראו תרגיל 3.18). נניח בשלילה שיש ב־H מעגל $(A_0, A_1, \ldots, A_{l-1}, A_l = A_0)$, $l \geq 2$. מכאן נוכל להסיק שלכל $0 \leq i \leq l-1$, קיימת קשת $(b_i, a_{i+1}) \in E$ כך ש־$b_i \in A_i$, $a_{i+1} \in A_{i+1}$. נגדיר $a_0 = a_l$. כיוון ש־A_i הוא רכיב קשיר היטב, קיים מסלול p_i ב־G בין a_i ל־b_i. מכאן ש־$(p_0, p_1, \ldots, p_{l-1}, a_0)$ הוא מעגל ב־G. בפרט, הקשת (b_0, a_1) נמצאת על מעגל, בסתירה להנחה שהיא מחברת רכיבים שונים הקשורים היטב – A_0 ו־A_1.

Algorithm 3.7 Topological-Sort-via-DFS(G)

```
Require: G is a directed graph
  Initialize all vertices to "Not-yet-Explored"
  Initialize the stack TopSortStack to empty.
  IsDAG ← true
  t ← 0
  while there exists a "Not-Yet-Explored" vertex u do
      Call dDFS-Top-Sort(u)
  if IsDAG then
      print "G is a DAG. Topological sorting:"
      print TopSortStack
  else
      print "G is not a DAG".
```

Algorithm 3.8 dDFS-Top-Sort(u)

```
  b_u ← t;   t ← t + 1
  Mark u as "Explored"
  for each directed edge (u, v) incident to u do
      if v is not marked "Explored" then
          Recursively invoke dDFS(v)
      else
          if b_v < b_u and f_v is not yet set then
              IsDAG ← false
  f_u ← t;   t ← t + 1
  Push u into TopSortStack.
```

פרק 4
אלגוריתמים חמדניים

בפרק זה אנו דנים לראשונה בבעיות **אופטימיזציה**, בהן יש למצוא מינימום או מקסימום של פונקציית מטרה, כפוף לאוסף אילוצים. בלימודי חשבון דיפרנציאלי נתקלנו כבר בבעיות כאלה, עבור פונקציות של משתנים רציפים. למשל, בהינתן פונקציה של שני משתנים ממשיים, $x, y \in \mathbb{R}$, מהם ערכי הקיצון (מינימום ומקסימום) של הפונקציה המתקבלים בתחום כלשהו (נאמר, בעיגול היחידה שהמשתנים שלה x, y מוגבלים על ידי האילוץ $x^2 + y^2 \leq 1$). בבעיות אופטימיזציה דיסקרטיות, לעומת זאת, הפונקציות הנדונות הן לרוב פונקציות של משתנים המקבלים ערכים על אוסף תת־הקבוצות של קבוצה סופית נתונה A. הבעיה היא כמובן שהמעבר על כל תת־הקבוצות דורש זמן חישוב מעריכי (אקספוננציאלי) בגודל הקלט.

אחת האסטרטגיות המובילות לתכנון אלגוריתמים פולינומיאליים היא האסטרטגיה החמדנית, שבה אנו בונים את הפתרון באופן סדרתי, כאשר בכל שלב אנו מוסיפים לפתרון החלקי הנוכחי (או מחסירים ממנו) קבוצת איברים לפי קריטריון חמדני פשוט. כפי שתקראו בספר, קשה לאפיין בדיוק מהו "אלגוריתם חמדני". עבור בעיה ספציפית ייתכנו כמה קריטריונים חמדניים "סבירים", אך לא מובטח לנו כי אפילו אחד מהם אכן יניב אלגוריתם שיפיק פתרון אופטימלי לבעיה. מציאת הכלל הנכון (אם קיים כזה) הוא הקושי העיקרי בתכנון אלגוריתמים חמדניים. כדי שהאלגוריתם ייחשב פתרון אופטימלי, הכלל "הנכון" צריך למצוא איבר השייך לאיזשהו פתרון אופטימלי (ואז נוכל להוסיף איבר זה לפתרון החלקי) או למצוא איבר שאינו שייך לאיזשהו פתרון אופטימלי (ואז נוכל להשמיט אותו מהקבוצה).

4.1 תזמון מקטעים

קראו בספר את סעיף 4.1

בסעיף זה אנו דנים בשתי בעיות אופטימיזציה העוסקות בתזמון מקטעים. מקטע הוא תת־קבוצה קשירה חסומה בישר ממשי. בסעיף זה נדון רק במקטעים הסגורים משמאל ופתוחים מימין, כלומר במקטעים שצורתם

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}.$$

הקלט לבעיות אלה הוא אוסף מקטעים [intervals]

$$\mathcal{I} = \{[s_1, f_1), [s_2, f_2), \ldots, [s_n, f_n)\}.$$

מקטע $[s_i, f_i)$ מייצג "משימה" [job] או "בקשה" [request] i המאופיינת על ידי זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i. הפלט יהיה תת־קבוצה או חלוקה לתת־קבוצות של מקטעים **זרים בזוגות**. תת־קבוצה

$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ של מקטעים מכילה מקטעים זרים בזוגות, כאשר לכל $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ מתקיים התנאי הזה: אם $I_1 \neq I_2$ אז $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. לדוגמה: אם

$$\mathcal{I} = \{[0,2),\ [1,4),\ [2,6),\ [3,5)\},$$

אזי תת־הקבוצות $\{[0,2),\ [2,6)\}$ ו־$\{[0,2),\ [3,5)\}$ מכילות מקטעים זרים בזוגות, בעוד שהמקטעים ב־$\mathcal{I}$ עצמה וגם המקטעים בקבוצה $\{[0,2),\ [1,4)\}$ אינם זרים בזוגות.

הבעיה הראשונה היא בעיית מקסימיזציה:

בעיה אלגוריתמית: תזמון מקטעים [Interval Scheduling].
הקלט: אוסף מקטעים $\mathcal{I} = \{[s_1, f_1), [s_2, f_2), \ldots, [s_n, f_n)\}$.
הפלט: תת־קבוצה $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ של מקטעים זרים בזוגות.
המטרה: למקסם את מספר המקטעים ב־$\mathcal{I}'$.

הבעיה השנייה היא בעיית מינימיזציה:

בעיה אלגוריתמית: חלוקת מקטעים [Interval Partitioning].
הקלט: אוסף מקטעים $\mathcal{I} = \{[s_1, f_1), [s_2, f_2), \ldots, [s_n, f_n)\}$.
הפלט: חלוקה של $\mathcal{I}$ ל־t קבוצות, כך שבכל קבוצה המקטעים יהיו זרים בזוגות.
המטרה: למזער את t.

תזמון מקטעים. בבעיה זאת פתרון אפשרי הוא תת־קבוצה של מקטעים מהקלט אשר זרים בזוגות, וערכו של פתרון אפשרי הוא מספר המקטעים בתת־קבוצה זאת. בספר מודגמות בפרק זה כמה אסטרטגיות חמדניות "כושלות", שהשימוש בהן אינו מוביל לאלגוריתם המפיק פתרון אופטימלי לבעיה. האסטרטגיה הטבעית ביותר, שגם פותרת את הבעיה, היא לבחור מבין המקטעים האפשריים, שעדיין לא נבחרו, את המקטע שזמן הסיום שלו הוא הקטן ביותר. כלומר, מתחילים מהפתרון $\mathcal{I}' = \emptyset$, ובכל שלב מוסיפים ל־$\mathcal{I}'$ את המקטע שיש לו זמן סיום מינימלי מבין כל המקטעים שהם בעלי זמן התחלה גדול או שווה לזמני סיום של המקטעים שכבר נבחרו ל־$\mathcal{I}'$.

בבירור, האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי שבו כל המקטעים זרים בזוגות. הסיבה שהאלגוריתם אכן מחשב פתרון אופטימלי נובעת מהעובדה הפשוטה הבאה (הבהירו לעצמכם מדוע זה אכן כך):

טענה 4.1. אם I_1 הוא מקטע ב־$\mathcal{I}$ שזמן הסיום שלו מינימלי, אז החלפת המקטע הראשון[3] של כל פתרון חוקי במקטע I_1, ייתן גם הוא פתרון אפשרי. בפרט, קיים פתרון אופטימלי המכיל את המקטע I_1 כמקטע ראשון.

אם כן, הבחירה של האלגוריתם החמדני במקטע I_1 היא "נכונה". כעת, אחרי שכללנו את I_1 בפתרון $\mathcal{I}'$, אנו צריכים לפתור את הבעיה השיורית של בחירת קבוצה אופטימלית $\mathcal{I}''$ מתוך המקטעים שזמן ההתחלה שלהם גדול או שווה לזמן הסיום של I_1. מהטענה לעיל נובע כי גם הבחירה השנייה של האלגוריתם החמדני, היא צעד נכון בכיוון פתרון הבעיה השיורית. ובאופן דומה נובע כי בכל צעד וצעד, האלגוריתם החמדני בוחר מקטע "נכון", במובן הזה: קיים פתרון אופטימלי לבעיה השיורית, המכיל את המקטע הנבחר כמקטע שבא מייד אחרי המקטעים שכבר נבחרו. אנו מבחינים גם כי מתקיים הכלל הבא:

[3] שימו לב, מקטעים זרים בזוגות מסודרים בסדר מלא המושרה על ידי זמן ההתחלה שלהם (או באופן שקול, על ידי זמן הסיום שלהם).

בכל צעד, ערך הפתרון החלקי $\mathcal{I}'$ גדל ב־1, ואילו ערך הפתרון האופטימלי לבעיה השיורית קטן ב־1.

מכאן נובע כי בהגיענו למצב שבו ערך הפתרון האופטימלי לבעיה השיורית הוא אפס, ערך הפתרון החלקי $\mathcal{I}'$ שצברנו יהיה זהה לערך הפתרון האופטימלי.

◄ תרגיל 4.1

נניח כי ברשותנו פרוצדורה המקיימת את התכונה הזו: בכל צעד, ערך הפתרון החלקי $\mathcal{I}'$ גדל ב־1, וערך הפתרון האופטימלי לבעיה השיורית קטן ב־2 לכל היותר. מה תוכלו להגיד אז על "טיב" הפתרון שהאלגוריתם מחשב? **פתרון בעמ' 59 ►**

◄ תרגיל 4.2

נתבונן באלגוריתם שבו משתמשים באסטרטגיה "הכושלת" השנייה שהוצגה בספר: בכל שלב בוחרים את המקטע הקצר ביותר מבין המקטעים שלא חופפים אף מקטע בפתרון החלקי. הראו כי אלגוריתם זה מחשב פתרון שערכו לפחות מחצית מהערך האופטימלי. **פתרון בעמ' 59 ►**

חלוקת מקטעים. בבעיה זאת פתרון אפשרי הוא חלוקה של הקלט לתתי־קבוצה של מקטעים, כך שבכל תת־קבוצה המקטעים זרים בזוגות, וערכו של הפתרון אפשרי הוא מספר תתי־הקבוצות בחלוקה.

אנו נתקלים כאן לראשונה בשיטה הבאה להוכחת אופטימליות: ראשית, יש לנו חסם תחתון על ערך הפתרון. במקרה שלנו חסם זה הוא המספר המרבי של מקטעים שמכילים נקודה, כלומר אם $d(t)$ הוא מספר המקטעים ב־$\mathcal{I}$ שמכילים את t, אזי החסם התחתון לכל ערך t הוא $d(\mathcal{I}) = \max_t d(t)$. בספר חסם תחתון זה מכונה "העומק" של קבוצת הקלט $\mathcal{I}$.

◄ תרגיל 4.3

בהינתן אוסף מקטעים $\mathcal{I}$, הציעו אלגוריתם פשוט לחישוב $d(\mathcal{I})$ שאינו משתמש בשוויון בין $d(\mathcal{I})$ לבין הפתרון האופטימלי של בעיית חלוקת המקטעים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.
פתרון בעמ' 59 ►

אחת הדרכים הפופולריות לפיתוח אלגוריתמים חמדניים, בהם משתמשים בחסם תחתון (במקרה של בעיות מינימיזציה) היא כדלקמן: האלגוריתם יתחיל מהפתרון הריק ובכל פעם יוסיף לפתרון החלקי אלמנט חדש, בצורה חמדנית. כדי להראות שהפתרון המתקבל הוא מינימלי, נתכנן שגרה שתגדיל את ערך הפתרון החלקי באותה מידה שבה היא מקטינה את החסם התחתון של הבעיה השיורית. פעולה זו מבטיחה כי בסוף האלגוריתם ערך הפתרון יהיה שווה לחסם התחתון.

כעת ננסה לתכנן שגרה שתמצא את החלק הראשון $\mathcal{I}_1$ בחלוקה שאנו מחפשים. המקטעים ב־$\mathcal{I}_1$ צריכים להיות זרים בזוגות, וגם התנאי הבא צריך להתקיים:

העומק של $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_1$ יהיה קטן ב־1 מהעומק של $\mathcal{I}$, כלומר:

$$d\left(\mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_1\right) = d\left(\mathcal{I}\right) - 1.$$

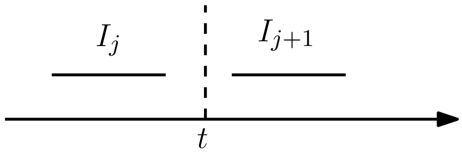
נניח שנצליח לתכנן פרוצדורה כזו. בשלב הראשון נמצא את החלק הראשון $\mathcal{I}_1$ בחלוקה שאנו מחפשים. כדי למצוא את החלק השני $\mathcal{I}_2$, נריץ את הפרוצדורה על $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_1$ פעם נוספת, וכך נמשיך הלאה. כדי למצוא את החלק הבא, נריץ את הפרוצדורה על קבוצת המקטעים שעדיין לא נכללו בחלקים הקודמים. אחרי $d = d(\mathcal{I})$ שלבים, נקבל:

- d תת־קבוצות זרות $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_d$ של $\mathcal{I}$, כך שהמקטעים בכל קבוצה זרים בזוגות;
- העומק של קבוצת המקטעים שלא שובצו יהיה אפס, ולכן כל מקטע יהיה שייך לאחת הקבוצות.

בדרך הזו קיבלנו חלוקה של $\mathcal{I}$ ל־d קבוצות כנדרש.

אך כיצד נתכנן אלגוריתם שימצא את $\mathcal{I}_1$ שלעיל, אשר "יכסה" את כל הנקודות בהן העומק הוא d? לכל t עבורו $d(t) = d$ צריך להיות מקטע ב־$\mathcal{I}_1$ המכיל את t. יש כמה דרכים למצוא $\mathcal{I}_1$ כזה. הספר משתמש באלגוריתם הזה:

> מתחילים מהפתרון הריק $\mathcal{I}_1 = \emptyset$ ובכל שלב מוסיפים ל־$\mathcal{I}_1$ את המקטע שזמן ההתחלה שלו הוא המינימלי מבין כל המקטעים שזמן ההתחלה שלהם גדול או שווה לזמן הסיום הגדול ביותר של המקטעים ב־$\mathcal{I}_1$.



איור 4.1: אילוסטרציה לטענה 4.2

האבחנה המרכזית היא (ראו איור 4.1):

טענה 4.2. תהי t נקודה שאינה מכוסה על ידי $\mathcal{I}_1$ המחושב כפי שתואר לעיל. נניח ש־I_j הוא המקטע ב־$\mathcal{I}_1$ שזמן הסיום שלו הוא הגדול ביותר מבין המקטעים שזמן הסיום שלהם קטן מ־t. במצב כזה, כל מקטע I שמכיל את t נחתך עם I_j. בפרט, I_j מכיל נקודה $x \in I_j$ שהעומק שלה גדול מזה של t, כלומר $d(x) > d(t)$.

הוכחה. זמן ההתחלה של כל מקטע I שמכיל את t, קטן יותר מהמקטע I_{j+1} שהוא המקטע ב־$\mathcal{I}_1$ שבא אחרי I_j. לכן, אם I לא היה חותך את I_j, האלגוריתם היה כולל את I ב־$\mathcal{I}_1$.

ישנם שני מקרי קצה נוספים הדורשים ניתוח. אם t היא נקודה לפני המקטע הראשון ב־$\mathcal{I}_1$, אז הטענה עדיין נכונה. יתרה מכך, העומק של t הוא אפס, כי אין מקטע המתחיל לפני המקטע הראשון ב־$\mathcal{I}_1$.

אם I_j הוא המקטע האחרון, אז I_{j+1} לא קיים, אבל הטענה עדיין נכונה; אחרת, האלגוריתם היה יכול להוסיף ל־$\mathcal{I}_1$ את המקטע I. ■

◄ תרגיל 4.4

לפתרון בעיית תזמון המקטעים השתמשנו באלגוריתם המאפשר לבחור, מבין כל המקטעים האפשריים, את המקטע שזמן הסיום שלו הוא הקרוב ביותר; האם האלגוריתם הזה מחשב גם את קבוצת המקטעים שאיחודם מכיל את כל הנקודות בהן העומק הוא העומק המרבי? הסבירו.

פתרון בעמ' 60 ►

◄ תרגיל 4.5

הציעו אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה הזו: הקלט הוא קבוצה של מקטעים $\{I_1, \ldots, I_k, I'_1, \ldots, I'_k\}$, באורך של לפחות 2 כל אחד, כאשר לכל j מתקיים: אם $I_j = [a_j, b_j)$ אז $I'_j = [a_j + 1, b_j + 1)$ או $I'_j = [a_j - 1, b_j - 1)$. יש למצוא תת־קבוצה $\mathcal{I}$ של מקטעים זרים בזוגות, כך שלכל j יהיה לכל היותר מקטע אחד מתוך I_j, I'_j השייך ל־$\mathcal{I}$. המטרה היא למקסם את מספר המקטעים $|\mathcal{I}|$ ב־$\mathcal{I}$.

פתרון בעמ' 60 ►

4.2 תזמון כדי למזער איחור: טיעון החלפה

קראו בספר את סעיף 4.2

בסעיף זה אנו דנים בבעיית התזמון הזו:

בעיה אלגוריתמית: תזמון מקטעים לשם מזעור האיחור.

הקלט: n משימות, כאשר לכל משימה $i \in \{1,\ldots,n\}$ יש זמן ביצוע $t_i > 0$ ומועד אחרון $d_i > 0$.

הפלט: סדרה $s_1,\ldots,s_n$ כך שמתקיים: $s_i \geq 0$ וגם אוסף המקטעים הבא אינו נחתך בזוגות:

$$\{[s_i, s_i+t_i) : \ i \in \{1,\ldots n\}\}.$$

המטרה: נסמן ב־$\ell_i = \max\{s_i + t_i - d_i, 0\}$ את האיחור בביצוע המשימה ה־i. יש למזער את האיחור המרבי $L = \max_i \ell_i$.

תזמון ללא מרווחים הוא תזמון המקיים ש־$\bigcup_i [s_i, s_i + t_i)$ הוא מקטע. ברור כי לכל תזמון קיים תזמון ללא מרווחים שהינו טוב לא פחות – אפשר פשוט "למחוק" כל מרווח בגודל x על ידי הזזת המקטעים שמימין למרווח, x צעדים שמאלה. בכך הערך L לא יגדל. מכאן שקיים תזמון אופטימלי ללא מרווחים, ולכן נוכל להגביל עצמנו לתזמונים כאלה בלבד.

האלגוריתם שבספר מתעלם לחלוטין מזמני הביצוע t_i ומתזמן את המשימות בזו אחר זו, ללא רווחים, לפי סדר המועדים האחרונים d_i. ההוכחה כי האלגוריתם מחשב תזמון אופטימלי מבוססת על הרעיון הזה: מראים שאפשר להמיר כל פתרון אופטימלי לפתרון שמייצר האלגוריתם, בלי להעלות את ערך הפתרון. בהינתן תזמון ללא מרווחים, היפוך הוא מצב שבו יש שתי משימות (לאו דווקא עוקבות) המקיימות:

- משימה i משובצת לפני משימה j;
- $d_i > d_j$.

מספר ההיפוכים המרבי שיכול להיות הוא $\binom{n}{2}$ (חסם זה יכול להתקבל כאשר המשימות מסודרות בסדר ההפוך למיונן לפי הזמנים האחרונים). אמנם היפוך לא מחייב משימות עוקבות, אבל אם קיים היפוך, אזי קיים לפחות גם היפוך אחד של משימות עוקבות i, j בסידור הנוכחי. בספר מוכח שאם נחליף את סדר הביצוע של i, j, אזי:

- ערך הפתרון לא יעלה;
- מספר ההיפוכים יקטן בלפחות אחד.

ומכאן נסיק כי קיים פתרון אופטימלי ללא היפוכים כלל. גם הפתרון שמייצר האלגוריתם הוא ללא היפוכים, אבל עדיין לא נובע מכך שזהו פתרון אופטימלי, כי במקרה שהמועד האחרון משותף לכמה משימות, ישנם כמה סדרים ללא היפוכים. הטיעון שמסיים את ההוכחה הוא: כל הפתרונות ללא היפוכים הם בעלי אותו ערך.

◄ תרגיל 4.6

נניח כי במקום למזער את האיחור המרבי $L = \max_i \ell_i$, היינו מעוניינים למזער את סכום האיחורים $\sum_i \ell_i$.

1. האם גם אז האלגוריתם שלעיל ייחשב בהכרח לפתרון אופטימלי?
2. הראו כי כל אלגוריתם המחשב פתרון אופטימלי לבעיה הזאת, אינו יכול להתעלם מזמני ביצוע המשימות t_i.

פתרון בעמ' 60 ►

4.3 שמירה אופטימלית בזיכרון מטמון

קראו בספר את סעיף 4.3

הפרק הזה עוסק בבעיה שאפשר לנסח אותה בקצרה כך: (הבהירו לעצמכם מדוע):

בעיה אלגוריתמית: ניהול בזיכרון מטמון [Cache management].
הקלט: סדרה $D = d_1 \ldots d_m$ מעל קבוצה U של n עצמים, מספר k $n > k$ ותת־קבוצה U_0 שגודלה לכל היותר k.
הפלט: סדרה של תת־קבוצות $U_1, \ldots, U_m \subset U$, ($U_t$ מייצג את תוכן המטמון בזמן t), המקיימות $|U_i| \leq k$ ו־$d_i \in U_i$ לכל $i \in \{1, \ldots, m\}$
המטרה: למזער את $\sum_{i=1}^{m} |U_i \setminus U_{i-1}|$.

בספר מתואר אלגוריתם פשוט מאוד; כיוון שגם ניתוחו אינו מסובך, לא נחזור עליו כאן.

4.4 מסלולים קצרים ביותר בגרף

קראו בספר את סעיף 4.4

הבעיה הנדונה היא:

בעיה אלגוריתמית: מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד [Single Source Shortest Path].
הקלט: גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית מרחק אי־שלילית על הקשתות $\ell : E \to [0, \infty)$, וצומת מקור $s \in V$.
הפלט: לכל צומת $v \in V$ מסלול קצר ביותר P_v מ־s ל־v.

כפי שמוסבר בספר, נוח לתכנן אלגוריתם שמחשב את אורכי המסלולים הקצרים ביותר, ואת המסלולים עצמם אפשר לחשב מהערכים האלה בקלות (ועוד נרחיב על כך בהמשך). נוכל להניח גם כי הגרף G הוא גרף שלם (כלומר גרף שבו יש קשת בין כל זוג צמתים), על ידי הגדרת $\ell(u, v) = \infty$ כאשר $(u, v) \notin E$. נסמן ב־$d(v)$ את אורך המסלול הקצר ביותר מ־s ל־v. אלגוריתם דייקסטרה מתבסס על הטענה הבאה [בספר זוהי טענה (4.14)].

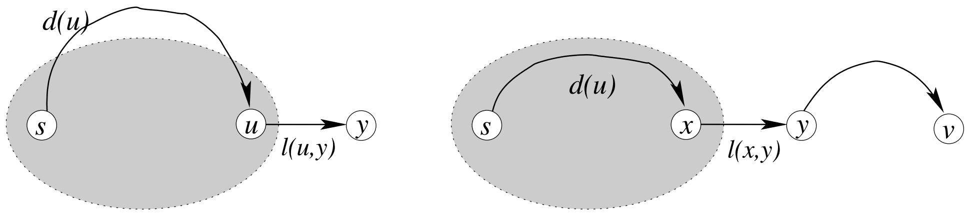
טענה 4.3. תהי S קבוצת צמתים שמכילה את s, ולכל $y \in V \setminus S$ נגדיר

$$d'(y) = \min_{u \in S} \left(d(u) + \ell(u, y) \right) .$$

אם $v \in V \setminus S$ הוא צומת שממזער את ערכי $d'(\cdot)$, כלומר

$$d'(v) = \min_{y \in V \setminus S} d'(y),$$

אזי $d(v) = d'(v)$.



איור 4.2: המחשה להוכחת טענה 4.3.

הוכחה. שימו לב: $d'(v)$ הוא אורך של מסלול אפשרי מ־s ל־v (המסלול הקצר ביותר לצומת $u \in S$ ומשם בקשת ל־v), ראו איור 4.2 משמאל. לכן $d'(v) \geq d(v)$, כיוון ש־$d(v)$ הוא אורך המסלול הקצר ביותר ל־v.

עתה נוכיח את האי־שיוויון בכיוון השני. יהי P מסלול קצר ביותר מ־s ל־v, כלומר $\ell(P) = d(v)$, כאשר $\ell(P)$ הינו אורך המסלול P. תהי (x, y) הקשת הראשונה במסלול הזה, העוברת מ־S ל־$V \setminus S$ (כלומר $x \in S$, $y \in V \setminus S$), ראו איור 4.2 מימין; קשת כזו קיימת כי $s \in S$ ואילו $v \in V \setminus S$. כיוון ש־P עובר דרך הקשת (x, y), מתקיים

$$\ell(P) \geq d(x) + \ell(x, y). \tag{4.1}$$

כמו כן מתקיים

$$d(x) + \ell(x, y) \geq \min_{u \in S}[d(u) + \ell(u, y)], \tag{4.2}$$

כיוון ש־$x \in S$ והאגף בצד ימין של (4.2) הינו מינימום על u וניתן בפרט לבחור $u = x$. לבסוף נשים לב שאגף ימין של (4.2) הינו הגדרת $d'(y)$. מצד שני, v הוא צומת הממזער את ערכי d'. לכן

$$\min_{u \in S}[d(u) + \ell(u, y)] = d'(y) \geq d'(v). \tag{4.3}$$

מצירוף אי־השוויונות (4.1), (4.2), ו־(4.3) אנו מסיקים ש־$d(v) = \ell(P) \geq d'(v)$. ■

מטענה 4.3 נובע כי:

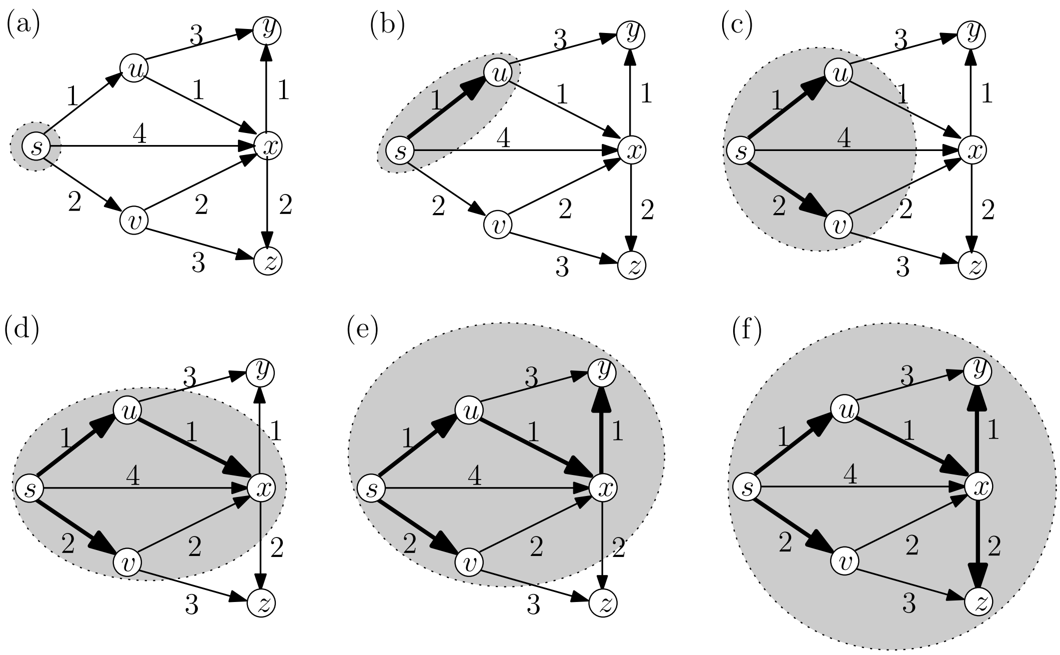
> אם $S \neq V$, וכבר חישבנו את המרחקים הקצרים ביותר מ־s לכל הצמתים בקבוצה S, אז נוכל לחשב (בזמן פולינומיאלי) את המרחק הקצר ביותר לצומת נוסף $v \in V \setminus S$.

אבחנה חשובה היא כי למעשה המסלולים המחושבים על ידי אלגוריתם דייקסטרה יוצרים עץ מכוון T המושרש ב־s, שנקרא עץ המסלולים הקצרים ביותר. לכל צומת s, המסלול (היחיד) מ־s ל־v ב־T הוא מסלול קצר ביותר ב־G מ־s ל־v. עץ זה נבנה בטבעיות במהלך האלגוריתם כך: נניח שחישבנו את המרחקים הקצרים ביותר עבור קבוצת הצמתים S ובנינו עבורם את עץ המרחקים הקצרים ביותר. כאשר אנו מוסיפים צומת v ל־S, אנו מוסיפים לעץ T קשת אחת (u, v) עבורה מתקבל המינימום של $\min_{u \in S}(d(u) + \ell(u, v))$. נדגים זאת על הגרף באיור 4.3, שהעתקנו מן הספר (שם הוא נקרא איור 4.7).

(a) אנו מתחילים מהגרף בחלק a של איור 4.3 כאשר $S = \{s\}$ והעץ $T = (\{s\}, \emptyset)$ (כלומר T מכיל רק את הצומת s).

(b) הצומת הקרוב ביותר ל־s, u, מצטרף ל־S וגם ל־T.

(c) הצומת v מצטרף ל־S וגם ל־T, אבל יכולנו לבחור לצרף גם את x.



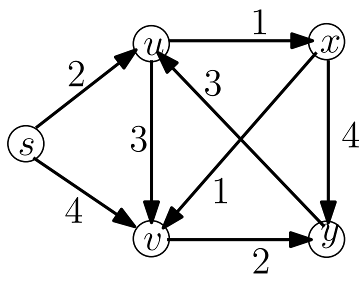
איור 4.3: הדגמת שלבים בריצת אלגוריתם דייקסטרה ובניית עץ המרחקים הקצרים ביותר. בכל שלב, הצמתים ב־S מסומנים באליפסה האפורה, וקשתות העץ T מודגשות.

(d) הצומת x מצטרף ל־S וגם ל־T דרך הקשת (u, x).
(e) הצומת y מצטרף ל־S וגם ל־T דרך הקשת (x, y).
(f) הצומת z מצטרף ל־S וגם ל־T דרך הקשת (x, z).

הערה 4.1. כפי שמוזכר בתחילת סעיף 4.4 בספר, אפשר להשתמש באלגוריתם דייקסטרה לחישוב מסלולים קצרים ביותר גם בגרפים לא־מכוונים. לשם כך מריצים את האלגוריתם על הגרף המכוון, המתקבל על ידי החלפת כל קשת לא־מכוונת בשתי קשתות מנוגדות שהמחירים שלהן זהים לאלה של הקשת הלא־מכוונת. יותר מכך, אם T הוא עץ המסלולים הקצרים ביותר ממקור s בגרף המכוון המתקבל, אזי גרף התשתית של T (כלומר הגרף המתקבל מ־T לאחר "מחיקת" כיווני הקשתות) הוא עץ המסלולים הקצרים ביותר ממקור s בגרף הלא־מכוון.

◄ **תרגיל 4.7**
הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף המכוון המוצג באיור 4.4. הדגימו את כל השלבים בריצת האלגוריתם ובנו את עץ המרחקים הקצרים ביותר. **פתרון בעמ' 61** ►

◄ **תרגיל 4.8**
הציעו אלגוריתם יעיל לבעיה הזו: הקלט הוא גרף מכוון $G = (V, E)$ עם משקלים אי־שליליים על הקשתות ושתי תת־קבוצות זרות S, T של צמתים. יש למצוא מסלול מכוון P המתחיל מצומת ב־S ומסתיים בצומת ב־T. המטרה היא למזער את משקל המסלול P. **פתרון בעמ' 61** ►



איור 4.4: גרף מכוון וממושקל בתרגיל 4.7.

◄ **תרגיל 4.9**
האלגוריתם של דייקסטרה בוחר בכל פעם צומת $v \in V \setminus S$ הממזער את הביטוי $\min_{u \in S}(d(u) + \ell(u,v))$ ומוסיף אותו ל־S, ואת הקשת (u,v) הוא מוסיף ל־T (כאשר u הוא הצומת שמזער את הביטוי $d(u) + \ell(u,v)$). הוכיחו או הפריכו את הטענה הזו: אם נשנה את בחירת v לצומת הממזער את הביטוי "$\min_{u \in S} \ell(u,v)$", האלגוריתם שיתקבל גם כן יחשב את עץ המרחקים הקצרים ביותר. פתרון בעמ' 62 ◄

◄ **תרגיל 4.10**
הקוטר [diameter] של גרף לא־מכוון $G = (V,E)$ עם מרחקים אי־שליליים $\ell : E \to [0,\infty)$ על הקשתות, מוגדר על ידי $D(G,\ell) = \max_{u,v \in V} d(u,v)$, כאשר $d(u,v)$ הוא המרחק (אורך המסלול הקצר ביותר) בין u ל־v ביחס לאורכי הקשתות $\ell(e)$. יהי T עץ המסלולים הקצרים ביותר ממקור s כלשהו, בגרף לא־מכוון G. הוכיחו כי הקוטר של T הוא לכל היותר פעמיים הקוטר של G, כלומר $D(T,\ell|_T) \leq 2D(G,\ell)$. כאן אנו מסמנים ב־$\ell|_T$ את הצמצום של פונקציית אורכי הקשתות ℓ של G לקשתות T בלבד. פתרון בעמ' 62 ◄

4.5 בעיית העץ הפורש המינימלי

קראו את סעיף 4.5 בספר

סעיף זה עוסק בגרפים (לא־מכוונים) קשירים וממושקלים, כלומר גרפים שיש להם פונקציית משקל אי־שלילית $c : E \to [0,\infty)$ על הקשתות. אנו נגדיר עבור תת־קבוצה $E' \subseteq E$ של קשתות, את המשקל של E', כך:

$$c(E') = \sum_{e \in E'} c(e).$$

המטרה בסעיף זה היא לפתור את הבעיה הבאה.

בעיה אלגוריתמית: עץ פורש מינימלי [Minimum Spanning Tree].
הקלט: גרף לא־מכוון וקשיר $G = (V,E)$ עם משקלות אי־שליליים $c : E \to [0,\infty)$ על הקשתות.
הפלט: עץ פורש T של G.
המטרה: למזער את המשקל של T.

נעיר כי עץ "פורש" של G פירושו כי קבוצת הצמתים של העץ היא V, כלומר זהה לקבוצת הצמתים של G.[4] בספר מוצגות שתי שיטות לפתרון הבעיה. בשיטה הראשונה בונים את הפתרון "מלמטה" – החל מהפתרון הריק – ובכל שלב מוסיפים לפתרון קשת אחת, עד אשר מתקבל פתרון אפשרי. כלומר, משפרים את "הישימות" של הפתרון בכל שלב. כאן השאלה המכרעת היא:

האם אפשר לתכנן שגרה שתמצא קשת השייכת בהכרח לאיזשהו עץ פורש מינימלי?

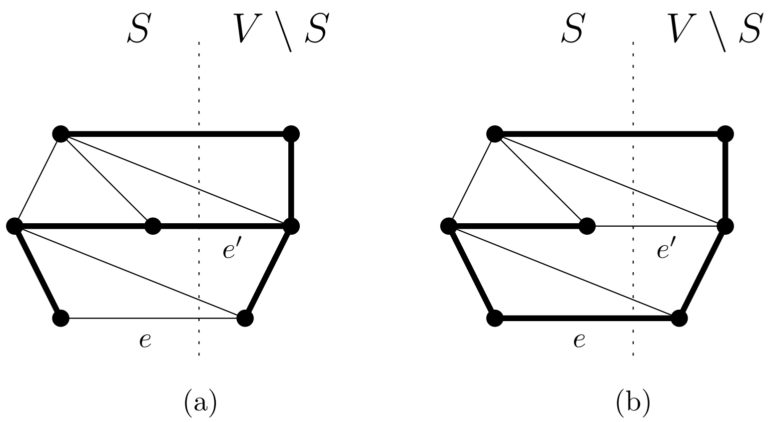
בשיטה השנייה בונים את הפתרון "מלמעלה". מתחילים עם כל הקשתות, ובכל שלב מסירים קשת, עד אשר מתקבל עץ. בפרט, משפרים בכל שלב את העלות של הפתרון. כאן השאלה היא:

האם אפשר לתכנן שגרה שתמצא קשת שבהכרח אינה שייכת לאיזשהו עץ פורש מינימלי?

בשני המקרים נשתמש בתכונה פשוטה של עצים – טענה 4.4. כדי לתאר אותה נזדקק למושג החתך.

הגדרה 4.1 (חתך)**.** יהי $G = (V, E)$ גרף (לא־מכוון), ותהי $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$. החתך המוגדר על ידי S הוא

$$E(S, V \setminus S) = \{\{u, v\} \in E : \ u \in S, \ v \in V \setminus S\}.$$



איור 4.5: הדגמה של הוכחת טענה 4.4. באיור (a) מתואר חתך בגרף ועץ פורש שקשתותיו מודגשות. הקשת e חוצה את החתך והוספתה לעץ הפורש יוצרת מעגל יחיד. מעגל זה חוצה את החתך בקשת (אחת או יותר) נוספת. באיור זו הקשת e'. זריקת הקשת e' מהעץ הפורש והוספת e במקומה יוצרת עץ פורש חדש המכיל את e, כמתואר באיור (b).

טענה 4.4 (טענת ההחלפה)**.** יהי T עץ פורש של גרף לא־מכוון $G = (V, E)$, תהי $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, ותהי $e \in E(S, V \setminus S)$ קשת בחתך המוגדר על ידי S. במקרה כזה T מכיל קשת e' בחתך המוגדר ע"י S, $e' \in T \cap E(S, V \setminus S)$, כך שגם הגרף $T' = (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ הוא עץ פורש של G.

[4] ובאופן כללי, גרף $G' = (V', E')$ הוא תת־גרף פורש של גרף $G = (V, E)$ אם $V' = V$ וגם $E' \subseteq E$.

הוכחה. אם $T \ni e$, נבחר $e' = e$ והטענה ברורה.

נניח עתה ש־$e \notin T$. הוכחת מקרה זה מודגמת באיור 4.5. הגרף $T \cup \{e\}$ מכיל מעגל יחיד $C \subset T \cup \{e\}$, ומעגל זה מכיל את הקשת e. כיוון של־e יש קצה אחד ב־S וקצה שני ב־$V \setminus S$, המעגל מכיל לפחות קשת אחת נוספת $e' = \{x, y\}$ השונה מ־e וגם לה יש קצה אחד ב־S וקצה שני ב־$V \setminus S$. אם נסיר את e' מ־$T \cup \{e\}$ יתקבל שוב גרף קשיר וחסר מעגלים, כלומר עץ. נוכיח זאת: הגרף המתקבל חסר מעגלים כי ב־$T \cup \{e\}$ יש מעגל יחיד, והסרנו קשת ממעגל זה. הגרף $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ הוא גם קשיר כיוון שהגרף $T \cup \{e\}$ קשיר והסרנו ממנו קשת יחידה e', ובכל מסלול ב־$T \cup \{e\}$ אשר משתמש בקשת $e' = \{x, y\}$ אפשר להחליף את הקשת e' בתת־המסלול $C \setminus \{e'\}$ בין x ל־y (או בין y ל־x). ■

טענה 4.5 (תנאי החתך). (דומה לטענה (4.17) בספר) תהי $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$ תת־קבוצה ממש לא ריקה של V. תהי e קשת זולה ביותר מבין הקשתות שיש להן קצה אחד ב־S וקצה שני ב־$V \setminus S$, כלומר

$$e = \operatorname*{arg\,min}_{f \in E(S, V \setminus S)} c(f).$$

במקרה כזה לכל עץ פורש T' קיימת קשת $e' \in T' \cap E(S, V \setminus S)$ כך ש־$T = (T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ הינו עץ פורש המכיל את e ומקיים $c(T) \leq c(T')$. בפרט, קיים עץ פורש מינימלי המכיל את e, ואם T' הוא עץ פורש מינימלי אז גם T הוא עץ פורש מינימלי.

הוכחה. לפי טענת ההחלפה (טענה 4.4), T מכיל קשת e' שיש לה קצה אחד ב־S וקצה שני ב־$V \setminus S$, כך שגם הגרף $T' = (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ הוא עץ. כיוון ש־e היא בעלת משקל מינימלי מבין הקשתות שיש להן קצה אחד ב־S וקצה שני ב־$V \setminus S$, $c(e) \leq c(e')$, אנו מסיקים כי

$$c\left(T'\right) = c\left(T\right) + c\left(e\right) - c\left(e'\right) \leqslant c\left(T\right),$$

כנדרש. ■

הערה 4.2. בניגוד לטענה (4.17) בספר, איננו מניחים בטענה 4.5 שכל משקלי הקשתות שונים זה מזה. עקב כך מתקבלת תכונה חלשה יותר: e מופיעה אמנם באיזשהו עץ פורש מינימלי, אך היא אינה חייבת להופיע בכל עץ פורש מינימלי.

כעת נוכל לתאר אלגוריתם מופשט לפתרון בעיית העץ הפורש המינימלי, הכולל את האלגוריתם של פרים וגם את האלגוריתם של קרוסקל כמקרים פרטיים. אלגוריתם זה מתואר להלן באלגוריתם 4.1.

```
Algorithm 4.1 MST_Cut_Algorithm(G = (V, E), c : E → [0, ∞))
Require: G is connected
  Intialize F ← ∅
  while F does not span G do
      Choose ∅ ⊊ S ⊊ V such that F ∩ E(S, V \ S) = ∅.
      Add the cheapest edge e ∈ E(S, V \ S) to F.
  return F
```

◄ **תרגיל 4.11**

הוכיחו שאלגוריתם 4.1 מחשב עץ פורש.

פתרון בעמ' 63 ►

טענה 4.6. אלגוריתם 4.1 מחשב עץ פורש מינימלי של גרף הקלט G.

הוכחה. מתרגיל 4.11 נובע כי האלגוריתם מחזיר עץ פורש של G. עבור איטרציה i של האלגוריתם, תהי S_i הקבוצה אותה בוחן האלגוריתם, תהי e_i קשת זולה ביותר בחתך $E(S_i, V \setminus S_i)$ אותה מוסיף האלגוריתם ל־F, ותהי $F_i = \{e_1, \ldots, e_i\}$. נוכיח באינדוקציה כי לכל $i = 1, \ldots, n-1$ $|F_i| = i$ וגם שקיים עץ פורש מינימלי של G המכיל את F_i. מכאן נקבל כי העץ F_{n-1} אותו מחזיר האלגוריתם הוא עץ פורש מינימלי.

בסיס האינדוקציה $i = 1$ נובע מתנאי החתך (טענה 4.5). נניח עתה כי קיים עץ פורש מינימלי T' של G המכיל את F_{i-1}, $2 \leq i \leq n-1$. נוכיח בעזרת תנאי החתך כי אז קיים עץ פורש מינימלי T של G המכיל את $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\}$. על פי תנאי החתך, קיימת קשת $e' \in T' \cap E(S_i, V \setminus S_i)$ כך ש־$T = T' \setminus \{e'\} \cup \{e_i\}$ גם הוא עץ פורש מינימלי. שימו לב כי $e' \notin F_{i-1}$, כי האלגוריתם בחר S_i כך שמתקיים $F_{i-1} \cap E(S_i, V \setminus S_i) = \emptyset$. לכן T הוא עץ פורש מינימלי המכיל את $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\}$. מאותה סיבה גם $e_i \notin F_{i-1}$, ולכן $|F_i| = |F_{i-1}| + 1 = i$, כנדרש. ■

◄ **תרגיל 4.12** האלגוריתם של בורובקה

נתבונן באלגוריתם 4.2 לחישוב עץ פורש מינימלי כאשר אין שתי קשתות עם משקל זהה.

1. הוכיחו שהאלגוריתם אמנם מחשב עץ פורש מינימלי.
2. הוכיחו שלולאת while מסתיימת לאחר $\log_2 n$ איטרציות לכל היותר.

פתרון בעמ' 63 ►

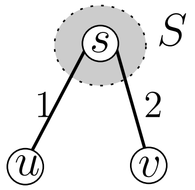
Algorithm **4.2** Boruvka$(G = (V, E), c : E \to [0, \infty))$

Require: G is a connected undirected graph.
Require: $c(e) \neq c(e')$ if $e, e' \in E$, and $e \neq e'$.
  $F \leftarrow \emptyset$
  while the number of connected components in $(V, F) > 1$ do
    Let $\mathcal{W}$ be the set of connected components of (V, F).
    for every $W \in \mathcal{W}$ do
      $e_W \leftarrow$ the cheapest edge in $E(W, V \setminus W)$
    $F \leftarrow F \cup \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$
  return F

נעבור כעת לדון בשאלה מתי אנו יכולים להבטיח כי קשת אינה שייכת לאיזשהו פתרון אופטימלי: איור 4.6 מדגים כי תנאי דמוי תנאי החתך לא מספק לנו קריטריון שכזה.

טענה 4.7 (תנאי המעגל). (דומה לטענה (4.20) בספר) יהי C מעגל ב־G ותהי e' קשת כבדה ביותר ב־C. במקרה כזה, לכל עץ פורש T קיים עץ פורש T' שאינו מכיל את e' כך שמתקיים $c(T') \leq c(T)$. בפרט, קיים עץ פורש מינימלי שאינו מכיל את e'.

הוכחה. נסמן $e' = \{u, v\}$, ונניח ש־$e' \in T$ (אחרת אין מה להוכיח). הגרף $T \setminus \{e'\}$ מורכב משני רכיבי קשירות, נסמנם S ו־$V \setminus S$, כאשר $u \in S$ ו־$v \in V \setminus S$. תת־הגרף $C \setminus \{e'\}$ הוא מסלול ב־G בין u ל־v, ולכן יש בו קשת e שקצה אחד שלה ב־S והקצה השני ב־$V \setminus S$. הקשת e' היא קשת יחידה של T שקצה אחד שלה ב־S והקצה השני ב־$V \setminus S$, לכן, על־פי טענת



איור 4.6: חתך מושרה על ידי S המכיל שתי קשתות, ושתיהן נמצאות בכל פתרון.

ההחלפה (טענה 4.4), $T' = (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ הוא עץ. שימו לב, $c(e) \leq c(e')$, כי $e, e' \in C$, והקשת e' היא קשת כבדה ביותר ב־C. מכאן נקבל $c(T') = c(T) + c(e) - c(e') \leq c(T)$, כנדרש. ■

אם כן, האלגוריתם שמסיר קשתות – הנקרא אלגוריתם המחיקה לאחור – יהיה דומה לאלגוריתם החתך, אבל הוא ימחק קשתות במקום להוסיפן. בכל שלב אנו מוצאים מעגל ב־G, ומוחקים מ־G קשת כבדה ביותר במעגל זה. כשלא נותרים מעגלים, נקבל עץ פורש.

ברצוננו לטעון שהעץ הפורש המתקבל הוא בעל משקל מינימלי. שימו לב, לא מספיק לטעון כי היות שכל קשת שנמחקת אינה שייכת לאיזשהו עץ פורש מינימלי, מותר למחוק אותה, כי אז ייתכן (לכאורה) שבכל פעם נמחק קשת מעץ פורש מינימלי אחר ולבסוף נישאר עם אוסף קשתות שאינן מתאימות לאף עץ פורש מינימלי. זה אמנם לא קורה, אך הטיעון בפסקה הזו לא פוסל מקרה כזה.

במקום זאת נטען כך: נגדיר את סדרת הגרפים המתקבלת ממחיקת הקשתות. יהי $G_0 = G$. תהי e_1 הקשת הראשונה שנמחקת, ויהי G_1 הגרף המתקבל מ־G_0 לאחר מחיקת e_1. באופן דומה, תהי e_i הקשת ה-i שנמחקת, ויהי G_i הגרף המתקבל מ־G_{i-1} לאחר מחיקת e_i. התהליך מסתיים בשלב ה־ℓ כאשר G_ℓ הוא עץ (פורש). נקבע כי T_0 הוא עץ פורש מינימלי של $G_0 = G$. כעת נשתמש באינדוקציה, נניח ש־T_{i-1} הוא עץ פורש מינימלי של G ותת־גרף של G_{i-1}. לפי טענה 4.7, קיים ב־G_{i-1} עץ פורש – נסמנו T_i – שאינו מכיל את הקשת e_i, ולכן T_i הוא תת־גרף של G_i, וכמו כן $c(T_i) \leq c(T_{i-1})$, אך כיוון ש־T_{i-1} הוא עץ פורש מינימלי של G, וכיוון שגם T_i הוא עץ פורש של G, בהכרח $c(T_i) = c(T_{i-1})$, ו־T_i הוא עץ פורש מינימלי. בסיום התהליך קיבלנו כי T_ℓ הוא עץ פורש מינימלי של G ותת־גרף של העץ G_ℓ, ומכאן ש־ $G_\ell = T_\ell$.

◀ **תרגיל 4.13**

הציגו דוגמה לגרף לא־מכוון שיש בו עץ פורש מינימלי יחיד ועץ מרחקים קצרים ביותר יחיד, והעצים האלה שונים. **פתרון בעמ' 64** ▶

◀ **תרגיל 4.14**

נתון גרף (לא־מכוון) קשיר $G = (V, E)$ עם משקלות כלשהם על הקשתות. עבור מסלול בגרף נסמן ב־$\max(P)$ את המשקל של קשת כבדה ביותר במסלול. עבור זוג צמתים נסמן:

$$B(s,t) = \min\{\max(P) : P \text{ is a simple } st - \text{path}\} .$$

הציעו אלגוריתם, יעיל ככל שתוכלו, שיחשב לכל זוג צמתים $s, t \in V$ את $B(s,t)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו. **פתרון בעמ' 64** ▶

4.6 מימוש האלגוריתמים של פרים ושל קרוסקל

קראו את סעיף 4.6 בספר

שימו לב, האלגוריתם של פרים הוא מקרה פרטי של אלגוריתם החתך, שבו אנו קובעים בתחילת האלגוריתם צומת $s \in S$, ובכל איטרציה בלולאה אנו בוחרים את S שיהיה רכיב הקשירות של היער (V, F) המכיל את s.

גם האלגוריתם של קרוסקל הוא מקרה פרטי, שבו אנו בוחרים, בכל צעד בלולאה, את הקשת הזולה ביותר המחברת שני רכיבי קשירות של היער (V, F), ובמקרה זה S הוא אחד משני רכיבי הקשירות של היער (V, F), שממנו יוצאת קשת זו.

בניגוד לגרסה הכללית של אלגוריתם החתך (אלגוריתם 4.1), אפשר לממש את האלגוריתמים של פרים ושל קרוסקל בזמן $O(m \log n)$, אך לא תמיד ניתן להבטיח זמן ריצה כזה לגרסאות אחרות של אלגוריתם החתך.

מימוש האלגוריתם של פרים. בכל צעד בלולאה, כל שעלינו לעשות זה למצוא את הקשת הזולה ביותר מבין הקשתות שקצה אחד שלהן נמצא ב־S והקצה השני ב־$V \setminus S$. בספר מוסבר איך לממש את זה בדומה לאלגוריתם של דייקסטרה.

מימוש האלגוריתם של קרוסקל. האלגוריתם מיושם בשני שלבים.

שלב 1: ממיינים את הקשתות לפי סדר עולה של מחירים. סיבוכיות הזמן: $O(m \log m) = O\left(m \log(n^2)\right) = O(m \log n)$.

שלב 2: מאתחלים $F \leftarrow \emptyset$. לפי סדר המיון, בודקים לכל קשת אם היא מחברת רכיבי קשירות שונים של הפתרון הנוכחי (V, F); אם כן, אנו מוסיפים קשת זו ל־F.

סיבוכיות הזמן של האלגוריתם תלויה בסיבוכיות הזמן הכוללת של m השאילתות "האם הקשת (u, v) מחברת שני רכיבי קשירות שונים?" כדי לממש ביעילות את שלב 2 משתמשים במבנה הנתונים **איחוד־חיפוש** [Union-Find]. מבנה הנתונים הזה מתחזק חלוקה של הקבוצה V, כלומר אוסף תת־קבוצות זרות שאיחודן הוא V, ותומך בשתי הפעולות האלה:

עדכון : איחוד של שתי קבוצות בחלוקה, כלומר מיזוגן לקבוצה אחת.

שאילתה: בהינתן שני איברים, האם הם שייכים לאותה תת־קבוצה?

בטענה (4.24) בספר מוסבר כי ניתן לממש מבנה נתונים זה בסיבוכיות הזמן הבאה:

אתחול: $O(n)$. **עדכון:** $O(1)$. **שאילתה:** $O(\log n)$.

במהלך שלב 2 יש $n-1$ עדכונים, ו־m שאילתות. לכן אפשר לממש את שלב 2 בסיבוכיות הזמן $O(m \log n)$.

◄ **תרגיל 4.15**

הראו כי אפשר לממש את אלגוריתם המחיקה־לאחור בסיבוכיות זמן של $O(mn)$.

פתרון בעמ' 65 ►

◄ **תרגיל 4.16**

הציגו מימוש של אלגוריתם 4.2 (האלגוריתם של בורובקה) בסיבוכיות זמן של $O(m \log^2 n)$.

פתרון בעמ' 65 ►

4.7 הצברה

קראו בספר את סעיף 4.7

בפרק זה דנים בבעיית הצברה [Clustering] שאפשר לנסח אותה בקצרה כך:

בעיה אלגוריתמית: הצברה בעלת מרווח מרבי.
הקלט: גרף $G=(V,E)$ עם מרחקים $d:E\to[0,\infty)$ על הקשתות, ומספר שלם $k\in\mathbb{N}$.
הפלט: חלוקה של V ל־k תת־קבוצות.
המטרה: המרווח (המרחק בין שתי קבוצות הכי קרובות בחלוקה) הוא מרבי.

בספר מוכיחים את הטענה הזו: אם T הוא עץ פורש מינימלי ב־G המחושב על ידי האלגוריתם של קרוסקל (שימו לב כי הוכחת טענה (4.26) בספר אכן מסתמכת על האלגוריתם של קרוסקל), ו־K היא קבוצת k הקשתות הארוכות ביותר ב־T, אזי רכיבי הקשירות של $T\setminus K$ הינם החלוקה האופטימלית. כיוון שהאלגוריתם של קרוסקל יכול לייצר כל עץ פורש מינימלי (ראו תרגיל 4.11 בספר), נובע מכך שהטענה נכונה לכל עץ פורש מינימלי.

4.8 קודי הופמן ודחיסת נתונים

קראו את סעיף 4.8 בספר

בפרק זה דנים בבעיה הזו:

בעיה אלגוריתמית: קוד תחיליות אופטימלי.
הקלט: קבוצה S ושכיחויות $f:S\to(0,\infty)$.
הפלט: מיפוי $\gamma:S\to\{0,1\}^*$ מ־S לקבוצת המחרוזות הבינריות, כך שלכל $x,y\in S$ שונים, מתקיים **תנאי התחיליות**: אף אחת מהמחרוזות הבינריות $\gamma(x)$, $\gamma(y)$ אינה תחילית של האחרת.
מטרה: למזער את הסכום $\sum_{x\in S} f_x|\gamma(x)|$.

הערה: בספר מניחים ש־ $\sum_{x\in S} f_x = 1$. אפשר להניח זאת ללא הגבלת הכלליות על ידי הנרמול $f'_x = f_x/A$, כאשר $A=\sum_{x\in S} f_x$.

ההבחנה הראשונה בתכנון האלגוריתם היא כי כל פתרון אפשרי לבעיה ניתן לייצוג על ידי עץ בינרי שקבוצת העלים שלו היא S. כדי "לקרוא" מהעץ את המחרוזות $\gamma(x)$, רושמים "0" על כל קשת המובילה מאב לבן שמאלי, ורושמים "1" על כל קשת המובילה מאב לבן ימני. אם כן, לכל $x\in S$, המחרוזת שרשומה על המסלול P_x מהשורש לעלה x היא $\gamma(x)$. איור 4.16 בספר ממחיש זאת היטב. תנאי התחיליות מתקיים כי לכל שני עלים x,y, אף אחד מהמסלולים P_x, P_y איננו תת־מסלול של האחר. כל עץ בינרי המכיל קבוצת עלים S, מגדיר באופן זה קוד γ המקיים את תנאי התחיליות. למעשה, קל לראות כי לכל קוד המקיים את תנאי התחיליות מתאים עץ אחד ויחיד כזה. כלומר, יש התאמה חד־ערכית בין קודים של S המקיימים את תנאי התחיליות לבין העצים הבינריים שקבוצת העלים שלהם היא S.[5]

נסמן ב־$\mathrm{depth}_T(x)$ את אורך המסלול P_x מהשורש ל־x בעץ T.

[5]הכוונה לעצים בינריים עם סדר (משמאל לימין) על בניו של כל צומת, כמו בעצי חיפוש בינריים.

◄ **תרגיל 4.17**
הוכיחו שלכל קוד $\gamma : S \to \{0,1\}^*$ המקיים את תנאי התחיליות, מתקיים: $\sum_{x \in S} 2^{-|\gamma(x)|} \leq 1$.
פתרון בעמ' 65 ◄

כיוון שאורך המחרוזת $\gamma(x)$ שווה ל־$\mathrm{depth}_T(x)$, אנו מקבלים:

$$\sum_{x \in S} f_x |\gamma(x)| = \sum_{x \in S} f_x \cdot \mathrm{depth}_T(x).$$

לכן, חישוב קוד אופטימלי לתחיליות שקול לבעיה הזו:

בעיה אלגוריתמית: קוד תחיליות אופטימלי.
הקלט: קבוצה S ושכיחויות $f : S \to (0, \infty)$.
הפלט: עץ בינרי T המכיל קבוצת עלים S.
המטרה: למזער את הביטוי $\sum_{x \in S} f_x \, \mathrm{depth}_T(x)$.

ההבחנה השנייה היא: בהינתן עץ בינרי T שיש לו $k = |S|$ עלים, אפשר למצוא השמה $\tau : S \to T$ של איברי S לעלים של העץ, כך שהסכום $\sum_{x \in S} f_x \, \mathrm{depth}_T(\tau(x))$ יהיה מינימלי בעזרת האסטרטגיה החמדנית הזו: ממיינים את העלים של העץ בסדר עולה לפי המרחק מהשורש, נניח $v_1, \ldots, v_k$, כאשר v_1 הוא העלה הקרוב ביותר לשורש, ו־v_k הוא העלה הרחוק ביותר מהשורש. ממיינים את איברי S בסדר יורד לפי השכיחויות, נניח $x_1, \ldots, x_k$. קל לוודא כי ההשמה האופטימלית לכל i עבור העץ הנתון היא $\tau(x_i) = v_i$. כלומר, האסטרטגיה החמדנית כאן קובעת כי "ככל שהמסלול ארוך יותר, השכיחות קטנה יותר". ובפרט:

> שני האיברים שהשכיחויות שלהם הן הקטנות ביותר, יותאמו לשני העלים הרחוקים ביותר מהשורש.

ההבחנה השלישית היא כי כל פתרון אופטימלי לבעיה לעיל הוא בהכרח עץ בינרי מלא, כלומר לכל צומת שאינו עלה יש בדיוק שני בנים. אחרת, אם יש צומת u שיש לו בן יחיד, נוכל למחוק את u ולחבר את הבן היחיד של u ישירות לאב של u. בכך יקטן ערך הפתרון, כי האורך של מסלול אחד לפחות יקטן ב־1, בעוד ששאר המסלולים לא ישתנו.

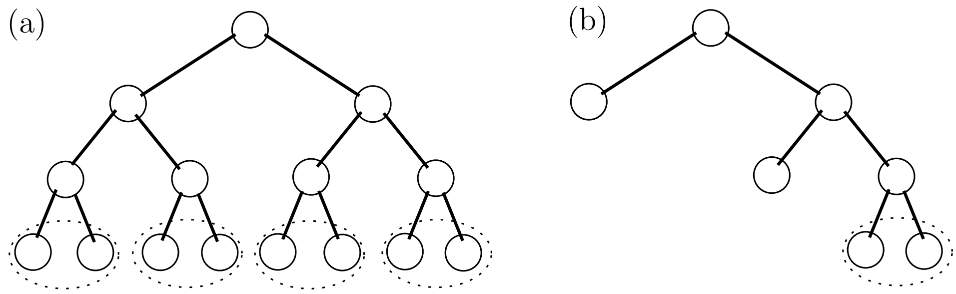
ההבחנה האחרונה מאפשרת לנו להפעיל רקורסיה. נניח שנתונים שני איברים $x, y \in S$ כך שקיים עץ אופטימלי, שבו x ו־y הם עלים אחים, כלומר יש להם אב משותף. שימו לב שהעומק שלהם ב־T שווה. ייתכן שיש הרבה זוגות של אחים כאלה, למשל בעץ בינרי מאוזן (ראו איור 4.7(a)), אבל ייתכן גם שיש רק זוג אחד, למשל בעץ בינרי שהוא כמעט "שרוך" (ראו איור 4.7(b)).

התכונה הבאה של עצים בינריים מלאים מתקיימת בכל עץ בינרי מלא: הבנים של הצומת הפנימי הרחוק ביותר מהשורש הם עלים אחים. לכן, אלגוריתם ההשמה החמדני יוכל להתאים את האיברים x ו־y עם שתי השכיחויות הקטנות ביותר לעלים־אחים הללו. כעת נוכל לאחד את x ו־y לאיבר אחד (שיחליף את שניהם), נסמן אותו ב־w, והוא יהיה בעל שכיחות $f_w = f_x + f_y$. בדרך זו קיבלנו בעיה קטנה יותר שניתנת לפתרון ברקורסיה.

◄ **תרגיל 4.18**
הריצו את האלגוריתם תוך פירוט כל השלבים על הקלט הבא (זוהי דוגמה מהספר):

$$S = \{a, b, c, d, e\}\,, \quad (f_a, f_b, f_c, f_d, f_e) = (32, 25, 20, 18, 5)\,.$$

פתרון בעמ' 66 ◄



איור 4.7: דוגמה לזוגות עלים שהם אחים

◄ **תרגיל 4.19**

יהי T עץ בינרי שקבוצת עליו היא S, והשכיחויות על העלים הן $f : S \to (0, \infty)$. נרחיב את f ל־T, $f : T \to (0, \infty)$, כך ש־f_u יהיה סכום השכיחויות של כל העלים שהם צאצאים של u ב־T. נניח כי קיימים $u, v \in T$ כך ש־$f_u < f_v$, וגם $\mathrm{depth}_T(u) < \mathrm{depth}_T(v)$. הוכיחו כי T מייצג קוד תחיליות שאינו אופטימלי ביחס לשכיחויות f.
פתרון בעמ' 67 ►

◄ **תרגיל 4.20**

בהינתן קבוצת תווים S שהשכיחויות שלהם הן $f : S \to (0, \infty)$, פתחו אלגוריתם ליצירת קוד תחיליות $\gamma : S \to \{0, 1, 2\}^*$ שימזער את $\sum_{x \in S} f_x |\gamma(x)|$. הוכיחו את הנכונות ונתחו את הסיבוכיות. כדי לקצר את התשובה במקצת, אתם יכולים להניח ש־$|S| \geq 3$ ואי־זוגי.
פתרון בעמ' 69 ►

4.9 עץ מושרש זול ביותר בגרף מכוון: אלגוריתם חמדני דו־שלבי

קראו בספר את סעיף 4.9

הסעיף הנוכחי עוסק בבעיה הזו:

בעיה אלגוריתמית: עץ מכוון פורש בעל עלות מינימלית [Minimum Cost Arborescence].
הקלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ עם מחירים אי־שליליים $c : E \to [0, \infty)$ על הקשתות, ושורש $r \in V$.
הפלט: תת־עץ T מכוון פורש המושרש ב־r של G.
המטרה: למזער את העלות של T.

נזכיר כי גרף מכוון T הוא עץ מכוון המושרש ב־r אם:
(A) קיים ב־T מסלול מכוון מ־r לכל צומת אחר;
(B) גרף התשתית של T (הגרף הלא־מכוון המתקבל על ידי התעלמות מכיווני הקשתות) הוא עץ.
כפי שמוכיחים בטענה (4.34) בספר, אפשר להחליף את תנאי (B) בתנאי הזה:
(C) ב־T, דרגת הכניסה של כל צומת שאינו r היא בדיוק 1.

מתנאי (C) נובע כי עלינו לבחור לכל צומת $v \in V \setminus \{r\}$ בדיוק קשת אחת מבין הקשתות הנכנסות ל־v. אם לכל צומת $v \in V \setminus \{r\}$ נבחר את הקשת הזולה ביותר שנכנסת ל־v, נקבל גרף

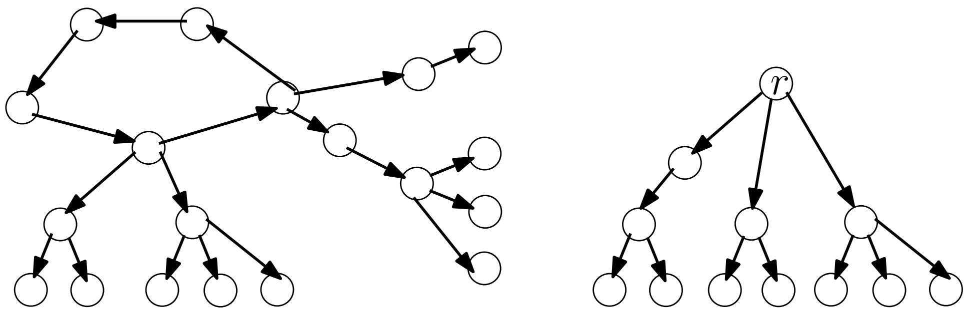
שעלותו אינו עולה על זו של הפתרון האופטימלי. הבעיה שגרף כזה אינו מכיל בהכרח מסלול מ־r לצמתים האחרים. למעשה, אפשר לאפיין גרפים כאלה כך:

טענה 4.8. יהי $H = (V, F)$ גרף מכוון, יהי $r \in V$, ונניח שב־H דרגת הכניסה של כל צומת $v \in V \setminus \{r\}$ היא 1 ודרגת הכניסה של r היא אפס. בתנאים אלה H הוא איחוד של תת־גרפים זרים בצמתים ובקשתות, וכל תת־גרף הוא אחד משני הטיפוסים האלה:

- מעגל מכוון שעליו תלויים עצים מכוונים, שהשורש שלהם הוא אחד מצומתי המעגל, בדומה לחלק השמאלי של איור 4.8; או
- עץ פורש מכוון שהשורש שלו הוא r, בדומה לחלק הימני של איור 4.8.

◄ **תרגיל 4.21**

הוכיחו את טענה 4.8. **(ללא פתרון)** ►



איור 4.8: דוגמה לגרף שבו דרגת הכניסה של כל צומת היא 1, והוא אינו עץ פורש מכוון.

הרעיון באלגוריתם הוא להשתמש ברקורסיה. זה נעשה בשני שלבים. בשלב הראשון מעדכנים את המחירים כדלקמן: לכל צומת $v \in V \setminus \{r\}$, מעדכנים את המחיר של כל קשת e שנכנסת ל־v, כך שהוא יהיה $c'(e) \leftarrow c(e) - y_v$, כאשר y_v הוא המחיר המינימלי של קשת ב־G שנכנסת ל־v. כפי שמוסבר בספר, מתקבלת בעיה שקולה, מפני שהאופטימום קטן ב־$\sum_{v\in V\setminus\{r\}} y_v$ בדיוק. כלומר T הוא פתרון אופטימלי ביחס למחירים החדשים $c'(e)$ אם ורק אם הוא היה פתרון אופטימלי ביחס למחירים המקוריים $c(e)$. אם הקשתות שמחירן אפס מכילות עץ מכוון כנדרש, אזי סיימנו. אחרת, בשלב השני, הקשתות שמחירן אפס מכילות מעגל מכוון. מכווצים את המעגל לצומת אחד, ומפעילים את אותו אלגוריתם על הגרף המתקבל. בשלב שבו האלגוריתם מחזיר עץ מכוון, קיימת אפשרות שזהו עץ פורש מכוון בגרף הקלט ואז סיימנו, או שהיה מעגל שכווץ בשלב הקודם. במקרה האחרון, פותחים את המעגל שכווץ בשלב הקודם ומשמיטים ממנו קשת אחת (יש קשת יחידה כזו) כדי לקבל עץ מכוון.

◄ **תרגיל 4.22**

הריצו את האלגוריתם על הדוגמה המוצגת באיור 4.19 בספר. **פתרון בעמ' 70** ►

4.10 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 4.1 (מעמוד 43)
ערך הפתרון שהאלגוריתם מחשב הוא לפחות מחצית מהערך האופטימלי, ובאופן כללי נניח כי ברשותנו פרוצדורה המקיימת את התכונה הבאה: בכל צעד, ערך הפתרון החלקי $\mathcal{I}'$ גדל ב־1, ואילו ערך הפתרון האופטימלי לבעיה השיורית קטן ב־$1 \geq \alpha$ לכל היותר. במקרה זה, ערך הפתרון שהאלגוריתם מחשב הוא לפחות $1/\alpha$ פעמים הערך האופטימלי.

פתרון תרגיל 4.2 (מעמוד 43)
נשתמש בהבחנה הפשוטה הזו: אם מקטע J חותך שלושה מקטעים מתואמים I_1, I_2, I_3 (כלומר, $I_i \cap I_j = \emptyset$ לכל $1 \leq i < j \leq 3$), אזי J מכיל ממש לפחות מקטע אחד מהמקטעים I_1, I_2, I_3. ובפרט, אם $\mathcal{O}$ הוא פתרון אפשרי כלשהו לבעיית תזמון המקטעים, אזי המקטע הקצר ביותר בקלט $\mathcal{I}$ חותך לכל היותר שני מקטעים של $\mathcal{O}$, אחרת הוא צריך להכיל ממש מקטע מ־$\mathcal{O}$, אך זה בלתי אפשרי עבור מקטע קצר ביותר. לכן:

> בכל צעד, ערך הפתרון החלקי $\mathcal{I}'$ גדל ב־1, ואילו ערך הפתרון האופטימלי לבעיה השיורית קטן ב־2 לכל היותר.

מכאן, שעל פי תרגיל 4.1, האלגוריתם מחשב פתרון שערכו לפחות מחצית מהאופטימום.

פתרון תרגיל 4.3 (מעמוד 43)
כפי שנראה בהמשך, האלגוריתם שפותר את בעיית חלוקת המקטעים מחשב גם את $d(\mathcal{I})$, אבל החישוב של $d(\mathcal{I})$ בלבד הוא פשוט יותר.

Algorithm **4.3** Compute_$d(\mathcal{I} = \{(s_1, f_1), \ldots, (s_n, f_n)\})$

```
Require: s_i < f_i, ∀i ∈ {1, ..., n}
  (t_1, ..., t_2n) ← Sort {s_i, f_i : i ∈ {1, ..., n}} breaking ties such that finish
  events are placed before starting events.
  d ← 0
  curr_d ← 0
  for i ← 1, ..., 2n do
      if t_i is a beginning of interval then
          curr_d ← curr_d+1
          d ← max{d, curr_d}
      else
          curr_d ← curr_d−1
  return d
```

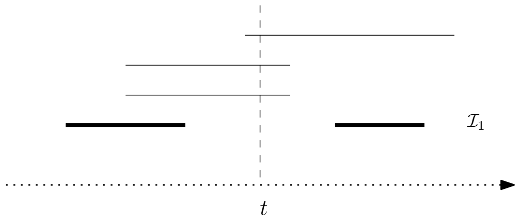
נכונות האלגוריתם ברורה. אפשר להוכיח זאת פורמלית על ידי הוכחה באינדוקציה על i של הטענה הבאה:

> נניח שערכי t_i שונים בזוגות, אז בסיום ביצוע האיטרציה ה־i באלגוריתם 4.3 ערכו של *curr_d* שווה ל־$d(t_i)$.

אנו משאירים לקורא להוכיח טענה זאת.

פתרון תרגיל 4.4 (מעמוד 44)

התשובה היא שלילית. האלגוריתם החמדני, המחשב קבוצה מרבית של מקטעים זרים בזוגות, אינו מכסה בהכרח את קבוצת הנקודות בעומק מרבי. ראו דוגמה נגדית באיור 4.9.



איור 4.9: קבוצת המקטעים המרבית $\mathcal{I}_1$ אינה מכילה נקודות הנמצאות בעומק מרבי.

באיור 4.9, הנקודה t היא בעלת העומק המרבי 3, אבל היא אינה מכוסה על ידי $\mathcal{I}_1$ המורכב משני המקטעים המודגשים.

פתרון תרגיל 4.5 (מעמוד 44)

נפעיל את האלגוריתם החמדני הרגיל שבספר. קבוצת המקטעים $\mathcal{I}$ שהוא יחזיר תהיה מרבית בגודלה. נשים לב כי I_j, I'_j נחתכים, מפני שהאורך של כל אחד מהם הוא לפחות 2 ומפני שהאחד מתקבל מהשני על ידי הזזה ביחידה אחת. לכן יתקיים התנאי "לכל j מקטע אחד לכל היותר מתוך I_j, I'_j השייך ל-$\mathcal{I}$".

פתרון תרגיל 4.6 (מעמוד 45)

1. התשובה היא שלילית, ראו דוגמה נגדית באיור 4.10. האלגוריתם ישבץ תחילה את משימה 1 ואחריה את משימה 2. האיחורים במקרה זה הם

$$\ell_1 = 20 - 10 = 10, \qquad \ell_2 = 30 - 12 = 18,$$

והסכום הוא 28.

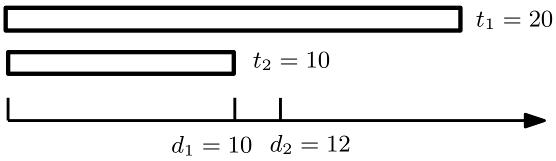
אם נשבץ תחילה את משימה 2 ואחריה את משימה 1, האיחורים יהיו

$$\ell_2 = \max\{10 - 12, 0\} = 0, \qquad \ell_1 = 30 - 10 = 20,$$

והסכום יהיה 20 בלבד.

2. תחילה עלינו להבהיר למה הכוונה באלגוריתם המתעלם מזמני הביצוע, כיוון שרשמית האלגוריתם צריך להחזיר את הזמנים של תחילת הריצה, אך כל עוד זמני הביצוע אינם ידועים, האלגוריתם לא יוכל להשיב עם זמני ביצוע בתזמון אפשרי. למרות זאת השאלה היא הגיונית, כיוון שבלי הגבלת הכלליות ניתן להניח שהמשימות מתוזמנות (מזמן 0) ברציפות – כפי שהנחנו בבעיה המקורית (תזמון מקטעים לשם מזעור האיחור). מכאן שמספיק להגדיר את סדר ביצוע המשימות כדי למזער את האיחור המרבי.

כדי להוכיח שכל אלגוריתם המתעלם מזמני הביצוע t_i אינו יכול לחשב סדר משימות שימזער את $\sum_i \ell_i$, נציג שני מופעים של הבעיה שבהם מספר המשימות יהיה זהה, וגם המועדים האחרונים



איור 4.10: דוגמה לקלט שעבורו התזמון הממזער את האיחור המרבי אינו ממזער את סכום האיחורים.

לביצוע המשימות יהיו זהים, אך זמני הביצוע יהיו שונים. אנו נראה שלמופעים השונים יש סדרי משימות אופטימליים שונים. מובן שאלגוריתם המתעלם מזמני הביצוע אינו יכול להבדיל בין המופעים, ולכן הוא מחויב להחזיר את אותו הפתרון, מכאן שלפחות באחד מן המופעים, האלגוריתם יחזיר פתרון שאינו הפתרון האופטימלי.

- במופע הראשון $n = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t_1 = t_2 = 1$. בסידור שבו משימה 1 מבוצעת לפני משימה 2, נקבל $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, ולכן

$$\ell_1 + \ell_2 = \max\{s_1 + t_1 - d_1, 0\} + \max\{s_2 + t_2 - d_2, 0\} = 0 + 0 = 0.$$

בסידור שבו משימה 2 מבוצעת לפני משימה 1 נקבל $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, ולכן

$$\ell_1 + \ell_2 = \max\{s_1 + t_1 - d_1, 0\} + \max\{s_2 + t_2 - d_2, 0\} = 1 + 0 = 1.$$

- במופע השני $n = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t_1 = 3$, $t_2 = 2$. בסידור שבו משימה 1 מבוצעת לפני משימה 2, נקבל $s_1 = 0$, $s_2 = 3$, ולכן

$$\ell_1 + \ell_2 = \max\{s_1 + t_1 - d_1, 0\} + \max\{s_2 + t_2 - d_2, 0\} = 2 + 3 = 5.$$

בסידור שבו משימה 2 מבוצעת לפני משימה 1 נקבל $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, ולכן

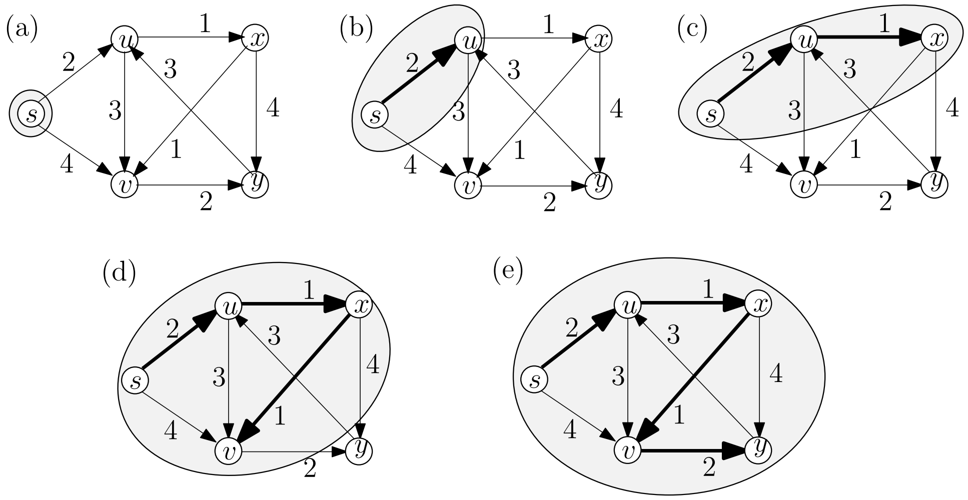
$$\ell_1 + \ell_2 = \max\{s_1 + t_1 - d_1, 0\} + \max\{s_2 + t_2 - d_2, 0\} = 4 + 0 = 4.$$

פתרון תרגיל 4.7 (מעמוד 48)

כל שלבי הבנייה של עץ המרחקים הקצרים ביותר מודגמים באיור 4.11. במקרה הזה נוכחנו שהעץ הוא מסלול. שימו לב, בשלב (d) יכולנו לצרף את הצומת v ישירות מ־s ולא דרך הצומת x (איזה עץ מרחקים קצרים ביותר היה מתקבל במקרה זה?).

פתרון תרגיל 4.8 (מעמוד 48)

נוסיף שני צמתים חדשים s, t. נחבר את s לכל צומת ב־S על ידי קשת במשקל 0, ונחבר כל צומת ב־T ל־t על ידי קשת במשקל 0. בגרף המתקבל נשתמש באלגוריתם דייקסטרה לחישוב המסלול הקצר ביותר P' המוביל מ־s ל־t. קל לראות כי המסלול P המתקבל מ־P' על ידי זריקת הצומת הראשון (s) והאחרון (t), הוא המסלול הקצר ביותר, כנדרש. זמן הריצה של האלגוריתם הוא כמו זה של אלגוריתם דייקסטרה.

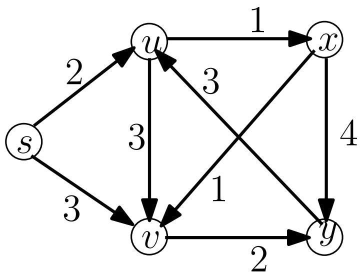


איור 4.11: שלבי הריצה של אלגוריתם דייקסטרה מהצומת s בגרף שתואר באיור 4.4.

פתרון תרגיל 4.9 (מעמוד 49)

האלגוריתם החדש אינו מחשב את המרחקים הקצרים ביותר מצומת נתון. לדוגמה, באיור 4.12 אפשר לראות את ריצת האלגוריתם הזה על הגרף, החל מצומת s. בהתחלה $S = \{s\}$. הצומת הקרוב ביותר ל־s הוא u; בשלב השני u מצטרף ל־S ול־$T = (\{s,u\},\{(s,u)\})$. בשלב השלישי הצומת הקרוב ביותר לצומת מ־S הוא x, שמצטרף ל־S. כעת $T = (\{s,u,x\},\{(s,u),(u,x)\})$.

בשלב הרביעי הקשת הקלה ביותר היוצאת לצומת מ־S היא (x,v), לכן מתקבל העץ $T = (\{s,u,x,v\},\{(s,u),(u,x),(x,v)\})$. בעץ הזה המרחק מ־$s$ ל־v הוא 4, בעוד שהמרחק המינימלי מ־s ל־v בגרף המקורי היה 3.



איור 4.12: הפרכה לתרגיל 4.9

פתרון תרגיל 4.10 (מעמוד 49)

נסמן ב־$d_T(u,v)$ את המרחק בין הצמתים $u,v \in V$ בעץ T, ונסמן ב־$d_G(u,v)$ את המרחק ביניהם בגרף G. יהיו u,v הצמתים שהמרחק ביניהם ב־T הוא מרבי. אזי מתקיים:

$$D(T,\ell|_T) = d_T(u,v) \le d_T(u,s) + d_T(v,s)$$
$$= d_G(u,s) + d_G(v,s) \le 2D(G,\ell).$$

אי־השוויון הראשון הוא למעשה אי־שוויון המשולש שמקיימת כל פונקציית מרחקים; השוויון הרשום אחריו נובע מהעובדה שהמרחקים ב־G, מ־s לכל צומת, שווים למרחקים האלה ב־T.

פתרון תרגיל 4.11 (מעמוד 52)

ברור כי האלגוריתם מחשב תת־גרף פורש קשיר (V,F), ונותר רק להוכיח כי גרף זה הוא עץ. למעשה נטען כי במהלך האלגוריתם (V,F) הוא יער, כלומר אין ב־F מעגלים. עובדה זו נובעת משתי ההבחנות הבאות.

1. בכל איטרציה באלגוריתם אנו מוסיפים קשת המחברת שני רכיבי קשירות שונים של (V,F),
2. אם נוסיף ליער כלשהו קשת המחברת שני רכיבי קשירות שונים נקבל שוב יער.

את הוכחת הבחנה 2 אנו משאירים לקורא. הבחנה 1 נכונה בגלל שבכל איטרציה S מקיימת $F \cap E(S, V \setminus S) = \emptyset$. לכן (הבהירו לעצמכם מדוע), כל רכיב קשירות של (V,F), כולו ב־S או שכולו ב־$V \setminus S$. מכאן נובע כי כל קשת בחתך $E(S, V\setminus S)$, ובפרט הקשת שמוסיף האלגוריתם, מחברת שני רכיבי קשירות שונים של (V,F).

פתרון תרגיל 4.12 (מעמוד 52)

1. על־פי הגדרתו, אלגוריתם 4.2 מחזיר קבוצת קשתות F כך שהגרף $T=(V,F)$ הוא קשיר. אנו נוכיח כי בתת־הגרף הזה אין מעגלים. לשם כך מספיק להוכיח כי בכל איטרציה של לולאת **while**, אם F הוא יער (בתחילת האיטרציה) אזי גם $F \cup \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$ הוא יער; כאן $\mathcal{W}$ היא קבוצת רכיבי הקשירות של היער F, ולכל $W \in \mathcal{W}$ הקשת e_W היא הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W, כלומר הקשת הקלה ביותר מבין קשתות החתך $E(W, V \setminus W)$.

נניח בשלילה כי $F \cup \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$ מכיל מעגל C. כיוון שכל קשת בקבוצה $\{e_W : W \in \mathcal{W}\}$ מחברת בין רכיבי קשירות שונים של F, המעגל C לא יכול להיות תחום בתוך רכיב קשירות יחיד של F. נסמן ב־$(W_1, W_2, \ldots, W_\ell, W_1)$, $\ell \geq 2$ את סדרת רכיבי הקשירות ב־F שהמעגל C עובר בהם. נתבונן בקשת e המחברת בין רכיבי הקשירות W_1 ו־W_2; ייתכן שיש שתי קשתות כאלה ב־C אם $\ell = 2$. הקשת e היא בהכרח הקשת הקלה ביותר מבין הקשתות היוצאות מ־W_1, או הקשת הקלה ביותר מבין הקשתות היוצאת מ־W_2 (או משניהם). נניח, ללא הגבלת הכלליות, ש־e היא הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_2.

במקרה $\ell = 2$ יש עוד קשת $e' = \{W_2, W_1\}$, וזו הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_1. לכן $c(e') < c(e)$ (לא ייתכן שוויון, כי אין שתי קשתות בעלות אותו משקל). אבל e' יוצאת גם מ־W_2, וכיוון ש־e היא הקשת הקלה ביותר שיוצאת מ־W_2 נקבל $c(e) < c(e')$. זו סתירה.

נניח אם כן ש־$\ell \geq 3$ ונתבונן בקשת $\{W_2, W_3\}$. כיוון שאין שתי קשתות בעלות אותו משקל, והיא אינה הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_2, לכן היא בהכרח הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_3, וכן $c(\{W_2, W_3\}) > c(\{W_2, W_1\})$. באופן דומה (באינדוקציה) אנו מקבלים ש־$\{W_i, W_{i+1}\}$ היא בהכרח הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_{i+1} וש־$c(\{W_i, W_{i+1}\}) > c(\{W_i, W_{i-1}\})$ לכל $i \in \{2, \ldots, \ell\}$. בפרט $\{W_\ell, W_{\ell-1}\}$ היא הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_ℓ וכן

$$c(\{W_\ell, W_{\ell-1}\}) > c(\{W_{\ell-1}, W_{\ell-2}\}) > \ldots > c(\{W_2, W_1\}).$$

כעת נתקדם עוד צעד אחד: הקשת $\{W_\ell, W_1\}$ אינה הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_ℓ, לכן היא הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־W_1 וכן

$$c(\{W_\ell, W_1\}) > c(\{W_\ell, W_{\ell-1}\}) > c(\{W_2, W_1\}),$$

וזאת סתירה.

הוכחנו שאלגוריתם בורובקה מחזיר עץ פורש. נותר להוכיח שהוא מחזיר עץ פורש מינימלי. נוכיח כי כל קשת בעץ המתקבל חייבת להופיע בכל העצים הפורשים המינימליים של הגרף G. לשם כך נפעיל את טענה (4.17) בספר: נתבונן בקשת כלשהי $e = \{u, v\}$ שאלגוריתם 4.2 החזיר. זה קרה כי ללא הגבלת הכלליות, במהלך ריצת אלגוריתם 4.2 נוצר רכיב קשירות U שמכיל את u, והקשת e היא הקשת הקלה ביותר היוצאת מ־U, כלומר היא הקשת הקלה ביותר החוצה את החתך $E(U, V \setminus U)$; לפי טענה (4.17) בספר (וכיוון שהנחנו שאין שתי קשתות עם משקל שווה ב־G), e בהכרח נמצאת בעץ הפורש המינימלי. כיוון שכל קשתות העץ הפורש שאלגוריתם בורובקה מחזיר חייבות להיות בכל העצים הפורשים, אנו מסיקים שלגרף יש עץ פורש מינימלי יחיד, והוא העץ המוחזר על ידי אלגוריתם בורובקה.

2. אנו נוכיח שלאחר כל איטרציה של לולאת **while**, מספר רכיבי הקשירות בגרף (V, F) קטן פי 2 לפחות. בתחילת האלגוריתם $F = \emptyset$ ומספר רכיבי הקשירות הוא n, לכן לאחר t איטרציות, מספר רכיבי הקשירות יהיה לכל היותר $n/2^t$ ולכן ברור שאלגוריתם 4.2 אינו מגיע לאיטרציה $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ כיוון שאחרת מספר רכיבי הקשירות היה לכל היותר

$$\frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}} < \frac{n}{2^{\log_2 n}} = 1,$$

אך זה לא ייתכן, כי האלגוריתם נעצר ברגע שיש רכיב קשירות אחד.

נותר להוכיח כי בכל איטרציה של לולאת **while**, מספר רכיבי הקשירות ב־(V, F) קטן לפחות פי 2. לשם כך נטען כי כל רכיב קשירות של הגרף (V, F') כאשר $F' = F \cup \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$ מכיל לפחות שני רכיבי קשירות מתוך קבוצת רכיבי הקשירות $\mathcal{W}$ של F. הסיבה לכך היא כי לכל רכיב $W \in \mathcal{W}$ יש בקבוצה $F' \setminus F = \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$ לפחות קשת אחת שיוצאת מ־W לרכיב קשירות נוסף $W' \in \mathcal{W} \setminus \{W\}$, ולכן בהכרח W, W' יהיו מוכלים שניהם באותו רכיב הקשירות של F'.

פתרון תרגיל 4.13 (מעמוד 53)

הדוגמה הכי פשוטה היא מעגל באורך 3 ומשקלי קשתות 2, 3, ו־4, כאשר צומת המקור s אינו קצה של הקשת שמשקלה 2. קל לוודא כי העץ הפורש המינימלי מורכב מהקשתות שמשקליהן 2 ו־3, ואילו עץ המרחקים הקצרים ביותר מ־s מורכב מהקשתות שמשקליהן 3 ו־4.

פתרון תרגיל 4.14 (מעמוד 53)

האלגוריתם מוצא עץ פורש מינימלי T ב־G ולכל זוג צמתים $s, t \in V$, $B(s,t)$ הוא המשקל של הקשת הכבדה ביותר במסלול היחיד בין s ל־t ב־T.

נוכיח את נכונות האלגוריתם. יהיו $s, t \in V$, ויהי P המסלול היחיד בין s ל־t ב־T. תהי e קשת כבדה ביותר ב־P. עלינו להראות כי $w(e) = B(s,t)$. נניח בשלילה שזה לא כך. במקרה כזה קיים ב־G מסלול P' בין s ל־t כך שמתקיים $\max(P') < w(e)$; כלומר, כל קשת $e' \in P$ מקיימת את התנאי $w(e') < w(e)$. עתה, $T \setminus \{e\}$ מכיל שני רכיבי קשירות, S ו־$V \setminus S$, כאשר $s \in S, t \in V \setminus S$. נתבונן בחתך $\delta(S)$ של G. כיוון ש־T הוא עץ פורש מינימלי, אזי e היא קשת קלה ביותר בחתך הזה)תנאי החתך(. כמו כן, לפחות קשת אחת של P', נניח e', נמצאת בחתך הזה. אבל אז $w(e) < w(e')$, בסתירה להנחה כי $w(e') < w(e)$ לכל קשת $e' \in P$.

סיבוכיות: הזמן הדומיננטי הוא הזמן הדרוש לחישוב ערכי $B(s,t)$ לאחר מציאת T; אפשר למצוא את הקשת הכבדה ביותר לכל זוג $s, t \in V$ במסלול שבין s ל־t ב־T בזמן $O(|V|)$. לכן הסיבוכיות הכוללת של האלגוריתם היא $O(|V|^3)$.

פתרון תרגיל 4.15 (מעמוד 54)

תחילה מוצאים בגרף איזשהו עץ פורש T, למשל על ידי אלגוריתם BFS. הסיבוכיות היא $O(m)$. לאחר מכן, כל עוד $E \setminus T \neq \emptyset$, בוחרים קשת $e \in E \setminus T$, ומבצעים את הפעולות האלה:

1. הגרף $T \cup \{e\}$ מכיל מעגל יחיד; מוצאים את הקשת היקרה ביותר e' במעגל זה.
2. מעדכנים את T ואת E: $T \leftarrow (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$, $E \leftarrow E \setminus \{e'\}$.

את הפעולות האלה אפשר לממש בזמן $O(n)$, וכיוון שיש לכל היותר m פעולות כאלה, הסיבוכיות הכוללת היא $O(mn)$.

פתרון תרגיל 4.16 (מעמוד 54)

כפי שהוכחנו בתרגיל 4.12, לולאת **while** של אלגוריתם 4.2 מתרחשת לכל היותר $\log_2 n$ פעמים, ולכן מספיק להציג את המימוש של אלגוריתם 4.2 שבו הסיבוכיות של כל איטרציה בלולאת **while** היא $O(m \log n)$. המימוש יהיה דומה למימוש של אלגוריתם קרוסקל. נתחזק את רכיבי הקשירות של (V, F) במבנה הנתונים איחוד־חיפוש. מימוש האיטרציה יבוצע כמפורט באלגוריתם 4.4.

Algorithm 4.4 Boruvka-Iteration-Implementation

```
Let G = (V, E) be the original graph
Let W_0 be the set of connected componenets of (V, F)
for every ŵ ∈ W_0 do
    set e(ŵ) ← nil {Assume c(nil) = ∞{
for every e = {u, v} ∈ E do
    û ← Find connected component of u
    v̂ ← Find connected component of v
    if û ≠ v̂ then
        if c(e) < c(e(û)) then
            e(û) ← e
        if c(e) < c(e(v̂)) then
            e(v̂) ← e
for ŵ ∈ W_0 do
    Let e(ŵ) = {u, v}
    û ← Find connected component of u
    v̂ ← Find connected component of v
    if û ≠ v̂ then
        Add e(ŵ) to F
        Union(û, v̂)
```

עיקר הזמן במימוש הזה מתרחש בלולאה על הקשתות ב־E (יש m קשתות כאלה) ובתוך הלולאה הזאת, הזמן הדרוש לפעולת החיפוש הוא $O(\log n)$. לכן קיבלנו את זמן הריצה הדרוש.

הערה. למרות זמן הריצה של אלגוריתם בורובקה שלכאורה הוא פחות טוב, גרסאות שלו משמשות באלגוריתמים המהירים ביותר לחישוב עץ פורש מינימלי.

פתרון תרגיל 4.17 (מעמוד 56)

אנו ניעזר בייצוג קוד תחיליות באמצעות עץ בינרי מושרש. לפי השקילות הזאת מספיק להוכיח כי

לכל עץ בינרי T עם קבוצת עלים S מתקיים:

$$\sum_{x\in S} 2^{-\operatorname{depth}_T(x)} \le 1. \tag{4.4}$$

ההוכחה של (4.4) מתבצעת באינדוקציה על מספר הצמתים של T. כאשר $|T| = 1$, יהיה ל־T עלה אחד בלבד, שהוא גם השורש ולכן עומקו 0, ואמנם $2^{-0} = 1$.

כאשר $|T| > 1$, נסמן ב־x_0 את העלה העמוק ביותר ב־T, וב־w_0 את אביו של x_0; אם ל־w_0 יש בן נוסף נסמנו ב־y_0; אחרת נסמן $x_0 = y_0$. שימו לב, גם y_0 הוא עלה ב־T (אחרת צאצא של y_0 היה עלה עמוק יותר מ־x_0). כעת נגדיר עץ T' הדומה ל־T, למעט העובדה שהעלים x_0 ו־y_0 נמחקו. נשים לב שקבוצת העלים של T' היא $(S \setminus \{x_0, y_0\}) \cup \{w_0\}$, ושב־$T'$ יש פחות צמתים מאשר ב־T. לכן, מהנחת האינדוקציה

$$\sum_{x\in(S\setminus\{x_0,y_0\})\cup\{w_0\}} 2^{-\operatorname{depth}_{T'}(x)} \le 1.$$

נשים לב ש־$\operatorname{depth}_T = \operatorname{depth}_{T'}$ למעט העובדה ש־ $\operatorname{depth}_{T'}$ אינה מוגדרת על $\{x_0, y_0\}$. כמו כן $\operatorname{depth}_T(x_0) = \operatorname{depth}_T(y_0) = \operatorname{depth}_T(w_0) + 1$. נסכם:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S} 2^{-\operatorname{depth}_T(x)} &\le \sum_{x\in S\setminus\{x_0,y_0\}} 2^{-\operatorname{depth}_T(x)} + \frac{1}{2}\cdot \sum_{x\in\{x_0,y_0\}} 2^{-\operatorname{depth}_T(w_0)} \\ &\le \sum_{x\in(S\setminus\{x_0,y_0\})\cup\{w_0\}} 2^{-\operatorname{depth}_{T'}(x)} \le 1.\end{aligned}$$

פתרון תרגיל 4.18 (מעמוד 56)

איור 4.13 מדגים את כל השלבים של האלגוריתם: בניית העץ והסקת הקידוד מהעץ.

(א) שתי השכיחויות הקטנות הן $f_e = 5$, $f_e = 18$. מחברים את d ו־e לאב de בעל השכיחות $5 + 18 = 23$.

(ב) שתי השכיחויות הקטנות הן $f_c = 20$, $f_{de} = 23$. מחברים את ed ו־c לאב cde בעל השכיחות $20 + 23 = 43$.

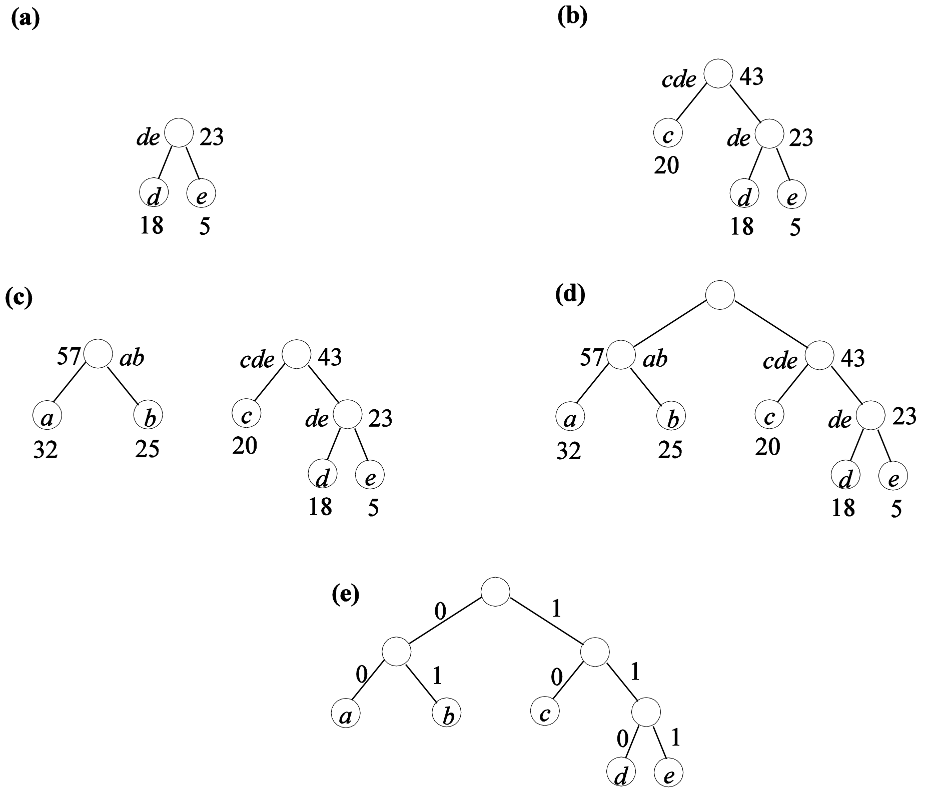
(ג) שתי השכיחויות הקטנות הן $f_b = 25$, $f_a = 32$. מחברים את a ו־b לאב ab בעל השכיחות $32 + 25 = 57$.

(ד) שתי השכיחויות הן $f_{cde} = 43$, $f_{ab} = 57$. מחברים את שני הצמתים המתאימים לאותו אב.

(ה) הסקת הקידוד. רושמים 0 על קשתות המובילות מאב לבן שמאלי, רושמים 1 על קשתות המובילות מאב לבן ימני (ואפשר גם להפך). הקידוד של x רשום על המסלול המוביל מן השורש אל העלה x.

הקידוד המתקבל וחישוב פונקציית המטרה מסוכמים בטבלה הבאה:

x	$\gamma(x)$	$\lvert\gamma(x)\rvert f_x$
a	00	$2\cdot 32 = 64$
b	01	$2\cdot 25 = 50$
c	10	$2\cdot 20 = 40$
d	110	$3\cdot 18 = 56$
e	111	$3\cdot 5 = 15$
		total 225



איור 4.13: בניית העץ המיטבי והסקת הקידוד.

פתרון תרגיל 4.19 (מעמוד 57)

נוכיח זאת על ידי בניית עץ קידוד בינרי T' על קבוצת העלים S המקיים את התנאי הזה:

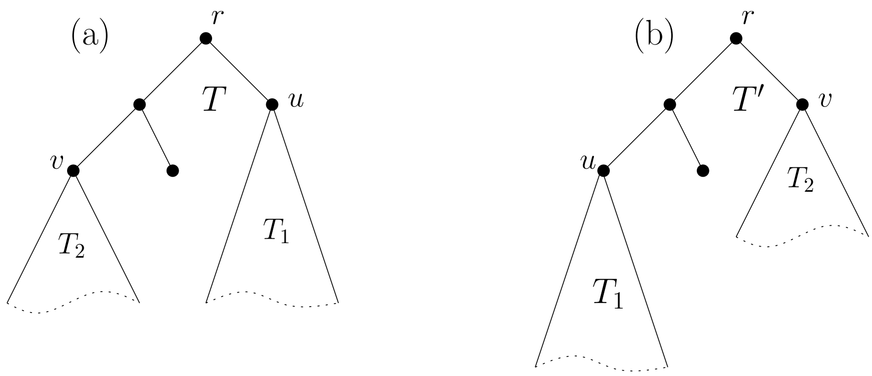
$$\sum_{x\in S} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) < \sum_{x\in S} f_x \,\text{depth}_{T}(x).$$

נסמן ב־ T_1 את תת־העץ של T המושרש ב־u, וב־T_2 את תת־העץ של v ב־T, ראו איור 4.14 (a). כיוון ש־$f_u < f_v$, v איננו צאצא של u. כיוון ש־$\text{depth}_T(u) < \text{depth}_T(v)$, u איננו צאצא של v. מכאן שהתת־עצים T_1 ו־T_2 הם זרים. יהי T' העץ מתקבל מהעץ T על ידי החלפת המקומות של T_1 ו־T_2 בעץ T, ראו איור 4.14 (b). נסמן ב־$S' = S \setminus (T_1 \cup T_2)$.

$$\sum_{x\in S} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) = \sum_{x\in S'} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) + \sum_{x\in S\cap T_1} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) + \sum_{x\in S\cap T_2} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) \tag{4.5}$$

נשים לב שעבור $x \in S'$, $\text{depth}_{T'}(x) = \text{depth}_{T}(x)$ ולכן

$$\sum_{x\in S'} f_x \,\text{depth}_{T'}(x) = \sum_{x\in S'} f_x \,\text{depth}_{T}(x).$$



איור 4.14: (a) עץ קידוד בינרי T. (b) העץ הנוצר לאחר החלפת מקומם של תת־העצים המושרשים ב־u וב־v.

אשר לגורם השני ב־(4.5), עבור $x \in S \cap T_1$,

$$\mathrm{depth}_{T'}(x) = \mathrm{depth}_{T_1}(x) + \mathrm{depth}_{T'(u)} = \mathrm{depth}_{T_1}(x) + \mathrm{depth}_T(v)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S\cap T_1} f_x\,\mathrm{depth}_{T'}(x) &= \sum_{x\in S\cap T_1} f_x(\mathrm{depth}_{T_1}(x) + \mathrm{depth}_T(v))\\ &= f_u\,\mathrm{depth}_T(v) + \sum_{x\in S\cap T_1} f_x\,\mathrm{depth}_{T_1}(x).\end{aligned}$$

באופן דומה הגורם השלישי ב־(4.5) מקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S\cap T_2} f_x\,\mathrm{depth}_{T'}(x) &= \sum_{x\in S\cap T_2} f_x(\mathrm{depth}_{T_2}(x) + \mathrm{depth}_T(u))\\ &= f_v\,\mathrm{depth}_T(u) + \sum_{x\in S\cap T_2} f_x\,\mathrm{depth}_{T_2}(x).\end{aligned}$$

שימו לב, מן ההנחות נובע כי $(f_v - f_u)(\mathrm{depth}_T(v) - \mathrm{depth}_T(u)) > 0$ ולכן

$$f_v\,\mathrm{depth}_T(v) + f_u\,\mathrm{depth}_T(u) > f_v\,\mathrm{depth}_T(u) + f_u\,\mathrm{depth}_T(v).$$

אם כן, מ־(4.5) אנו מקבלים את השוויון הזה:

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in S} f_x\,\mathrm{depth}_{T'}(x)\\ &\quad= \sum_{x\in S'} f_x\,\mathrm{depth}_{T'}(x)\\ &\qquad+ f_u\,\mathrm{depth}_T(v) + \sum_{x\in S\cap T_1} f_x\,\mathrm{depth}_{T_1}(x) + f_v\,\mathrm{depth}_T(u) + \sum_{x\in S\cap T_2} f_x\,\mathrm{depth}_{T_2}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \sum_{x\in S'} f_x \operatorname{depth}_T(x) \\
&\quad + f_u \operatorname{depth}_T(u) + \sum_{x\in S\cap T_1} f_x \operatorname{depth}_{T_1}(x) + f_v \operatorname{depth}_T(v) + \sum_{x\in S\cap T_2} f_x \operatorname{depth}_{T_2}(x) \\
&= \sum_{x\in S_1} f_x \operatorname{depth}_T(x) + \sum_{x\in S\cap T_1} f_x \operatorname{depth}_T(x) + \sum_{x\in S\cap T_2} f_x \operatorname{depth}_T(x) \\
&= \sum_{x\in S} f_x \operatorname{depth}_T(x).
\end{aligned}
$$

פתרון תרגיל 4.20 (מעמוד 57)

נניח כי $|S| \geq 3$ ואי־זוגי. בעזרת אלגוריתם הופמן לקידוד מעל $\{0,1,2\}$, נבנה עץ טרינרי מלא, שקבוצת העלים שלו היא S; ראו אלגוריתם 4.5.

Algorithm **4.5** Trinary-Hufmman($S,\ f: S \to [0,\infty)$)

Require: $|S| \geq 3$ and odd
  if $|S| = 3$ then
    Assume $S = \{x_0, y_0, z_0\}$.
    $T \leftarrow$ Root, and three children which are also leaves, labelled x_0, y_0, z_0.
  else
    Let x_0, y_0 and z_0 be the three lowest-frequency letters
    Let $w_0 \notin S$ a new letter
    Form $S' \leftarrow (S \setminus \{x_0, y_0, z_0\}) \cup \{w_0\}$
    Set $f_{w_0} \leftarrow f_{x_0} + f_{y_0} + f_{z_0}$
    Recursively call $T' \leftarrow$ Trinary-Hufmman(S', f)
    $T \leftarrow$ (Start with T'. Take the leaf labeled w_0
      and add 3 children below it labeled x_0, y_0 and z_0).
  return T

ההבדל העיקרי בין הוכחת הנכונות של אלגוריתם הופמן לקידוד טרינרי לבין אלגוריתם הופמן לקידוד בינרי, הוא בהוכחת הטענה הבאה:

טענה 4.9. כאשר $|S| \geq 3$ ואי־זוגי, עץ הקידוד האופטימלי הוא מלא.

הוכחה. יהיה T עץ קידוד טרינרי שאינו מלא. נראה כיצד לבנות עץ קידוד T' כך שיתקיים התנאי הזה:

$$\sum_{x\in S} f_x \operatorname{depth}_{T'}(x) < \sum_{x\in S} f_x \operatorname{depth}_T(x). \tag{4.6}$$

כיוון ש־T אינו מלא, קיים צומת שמספר בניו הוא 1 או 2. אם קיים צומת u שיש לו בן יחיד, אז בדומה לטיעון הנוגע לעצים בינריים אפשר למחוק את u ולחבר את הבן של u ישירות לאב של u וכך לקבל עץ T' המקיים את (4.6).

נניח אם כן שקיים צומת u שיש לו רק שני בנים ולא קיים צומת שיש לו בן יחיד. במקרה זה חייב להיות בעץ צומת נוסף v, $u \neq v$, שיש לו רק שני בנים, אחרת מספר העלים הוא זוגי (הוכיחו!). נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\operatorname{depth}_T(u) \geq \operatorname{depth}_T(v)$. במקרה זה נעביר את אחד מבניו של u להיות בן שלישי של v. פעולה זו לא מגדילה את מספר הסיביות הממוצע לאות בקוד.

u נשאר כעת עם בן יחיד ונוכל להפעיל עליו את הפעולה שתוארה בפסקה הקודמת ולקבל עץ T' המקיים את (4.6). ■

המשך הוכחת הנכונות של אלגוריתם 4.5 זהה למעשה להוכחת הנכונות של אלגוריתם הופמן עבור קידוד בינרי, כפי שמופיע בספר.

טענה 4.10. אם x_0, y_0, z_0 הם התווים ב־S שהשכיחויות שלהם הן הנמוכות ביותר, אז קיים עץ קידוד טרינרי מלא שבו שלושתם עלים־אחים.

הוכחה. זהה להוכחת טענה (4.13) בספר. ■

כעת הוכחת האופטימליות של קידוד הופמן הטרינרי באינדוקציה על $|S|$ זהה להוכחה בספר.

פתרון תרגיל 4.22 (מעמוד 58)

איור 4.15 מדגים את כל שלבי האלגוריתם.

(a) גרף הקלט.

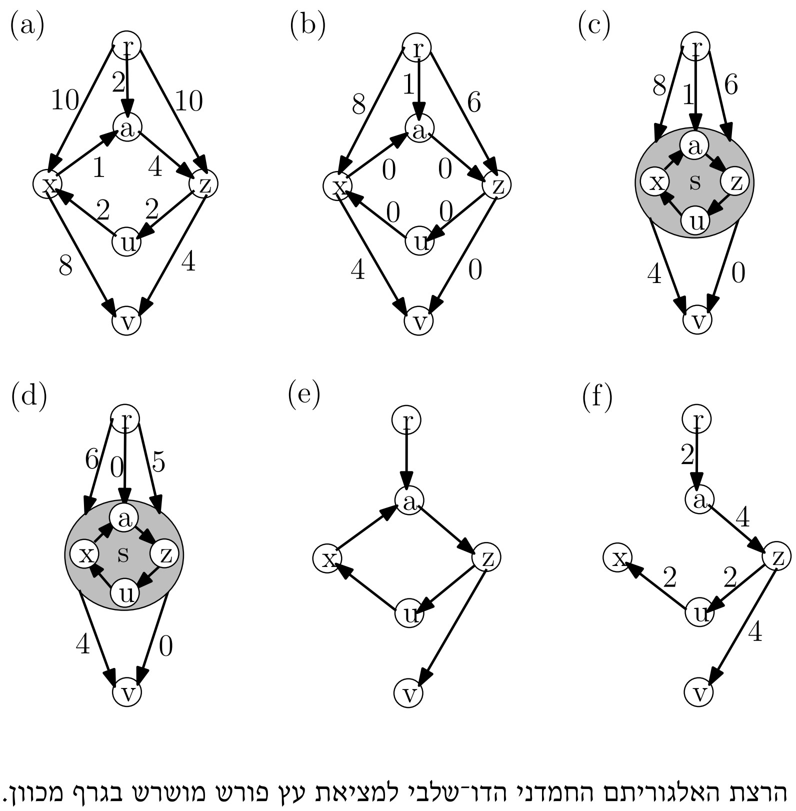
(b) המחירים $c'(e)$. כאן $y_a = 1, y_x = 2, y_z = 4, y_u = 2, y_v = 4$.

(c) מחירו של המעגל על הצמתים x, a, z, u הוא אפס, והוא מכווץ לצומת אחד s.

(d) עדכון מחירים שני, כאשר $y_v = 0,\ y_s = 1$. בשלב הזה הגרף מכיל עץ מכוון.

(e) הגרף המתקבל מהעץ המכוון של שלב (d) ופתיחת המעגל של צומת s.

(f) העץ המכוון המוכל בגרף שחושב בשלב (e) הוא הפתרון האופטימלי.



איור 4.15: הרצת האלגוריתם החמדני הדו־שלבי למציאת עץ פורש מושרש בגרף מכוון.

פרק 5
הפרד ומשול

5.1 הצגת שיטת הפרד ומשול

קראו בספר את ההקדמה לפרק 5

אלגוריתמים המבוססים על שיטת הפרד ומשול מפרקים בעיה נתונה לתת־בעיות, פותרים את תת־הבעיות רקורסיבית (או ישירות אם תת־הבעיה "קטנה" מספיק), ואז מרכיבים מחדש את תת־הפתרונות לכדי פתרון לבעיה המקורית. האלגוריתם מיון מיזוג [Merge Sort] הוא דוגמה פשוטה יחסית לגישה זו שנלמדה כבר בקורס "מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים". זהו אלגוריתם למיון סדרת מספרים הפועל כדלקמן: אם הסדרה מכילה רק איבר אחד – היא כבר ממוינת. אחרת, האלגוריתם מחלק את הסדרה לשני חלקים שווים (בערך) בגודלם, ממיינם רקורסיבית ואת שתי הסדרות הממוינות הוא ממזג בזמן לינארי לסדרה אחת ממוינת.

נשים לב שלמעט הקריאות הרקורסיביות, זמן הריצה של האלגוריתם הוא לינארי. לכן מתקבל הביטוי הרקורסיבי הבא לזמן הריצה על סדרות באורך n:

$$T(n) \leq \begin{cases} O(1) & n=1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + cn & \text{otherwise} \end{cases}$$

כדי לפשט את הדיון, נתעלם מפעולת העיגול למספרים שלמים, שאינו משפיע על ההתנהגות האסימפטותית של $T(n)$. במקרה שהצגנו לעיל, אנו נכתוב:

$$T(n) \leq \begin{cases} O(1) & n=1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{otherwise} \end{cases}$$

במשך הפרק ניתקל בנוסחאות נסיגה שונות. סעיפים 5.1 ו־5.2 בספר מתרגלים פתרון נוסחאות נסיגה.

קראו בספר את סעיפים 5.1 ו־5.2 אם אתם זקוקים לרענון בפתרון נוסחאות נסיגה

◄ **תרגיל 5.1**
מצאו חסמים הדוקים אסימפטוטית לחסמים הרקורסיביים האלה:

$$T(n) \le \begin{cases} 100 & n \le 6 \\ T(n/3) + T(2n/3) + n\log n & n > 6 \end{cases}$$

$$T(n) \le \begin{cases} 10 & n \le 2 \\ T(n/2)^2 + n^2 & n > 2 \end{cases}$$

$$T(n) \le \begin{cases} 10 & n \le 10 \\ T(n-\sqrt{n}) + 2T(2\sqrt{n}) + n & n > 10 \end{cases}$$

$$T(n) \le \begin{cases} 10 & n \le 10 \\ 2T(n/2) + cn\log n & n > 10 \end{cases}$$

$$T(n) \le \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T(7n/10) + cn & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) \le \begin{cases} O(1) & n \le 20 \\ T(n/5+1) + T(7(n+4)/10) & n > 20. \end{cases}$$

(ללא פתרון) ►

5.2 ספירת היפוכים

קראו בספר את סעיף 5.3

נתונה סדרת מספרים $s = (a_1, \ldots, a_n)$; מספר ההיפוכים בה הוא מספר הזוגות (i, j) שבהם $1 \le i < j \le n$ וכן $a_i > a_j$. אנו מתעניינים כעת בבעיה הזו:

בעיה אלגוריתמית: ספירת היפוכים [Counting Inversions].
הקלט: סדרת מספרים $s = (a_1, \ldots, a_n)$.
הפלט: מספר ההיפוכים בסדרה הנתונה.

בסעיף הזה מוצג האלגוריתם **מיון ומנייה** Sort-and-Count המבוסס על האלגוריתם מיון מיזוג; האלגוריתם מיון ומנייה סופר את מספר ההיפוכים בסדרה נתונה שאורכה n בזמן $O(n\log n)$, אף על פי שמספר ההיפוכים יכול להיות עד $n(n-1)/2$.

האלגוריתם מיון ומנייה מבוסס על הרעיון הזה: נתונה סדרה $(a_1, \ldots, a_n)$; נחלק אותה לשתי תת־סדרות שהאורך של כל אחת מהן יהיה כמחצית מהסדרה הנתונה; המחצית הראשונה $A = (a_1, \ldots, a_{n/2})$ תיקרא תחתונה, והמחצית השנייה $B = (a_{n/2+1}, \ldots, a_n)$ תיקרא עליונה. את ההיפוכים שיתקבלו בפלט אפשר לחלק לשלושה סוגים:

- ספירת היפוך ששני איבריו ב־A תבוצע על ידי קריאה רקורסיבית לאלגוריתם מיון ומנייה על התת־סדרה A.
- ספירה של היפוך ששני איבריו ב־B, תבוצע על ידי קריאה רקורסיבית לאלגוריתם מיון ומנייה על התת־סדרה B.

- היפוך (a_i, a_j), $i < j$, $a_i \in A$, ו־$a_j \in B$. מספר ההיפוכים הללו ניתן לספירה בזמן לינארי כדלקמן: לכל $a_j \in B$, מספר ההיפוכים שבהם מופיע $a_j \in B$ והאיבר האחר הוא מ־A, הוא בדיוק מספר האיברים ב־A הגדולים מ־a_j. סכימת מספר הזוגות הללו קלה לביצוע בשלב המיזוג שמבצע האלגוריתם מיון מיזוג: יהיו A', ו־B' הרשימות הממוינות של A ו־B בהתאמה. בכל פעם שנבחר איבר מ־B' לרשימה הממוזגת, מספר האיברים ב־ A' שעדיין לא מוזגו הוא בדיוק מספר ההיפוכים הזה.

דוגמה 5.1. נריץ את האלגוריתם מיון ומנייה על הסדרה $(3, 4, 2, 8, 7, 9, 6, 5, 1, 10)$.

- בשלב הראשון נחלק את הסדרה לשני חלקים שווים (בערך) בגודלם $A = (3, 4, 2, 8, 7)$, ו־$B = (9, 6, 5, 1, 10)$.
- נקרא רקורסיבית לאלגוריתם Sort-and-Count ונריץ אותו על הסדרה A. נקבל בחזרה את הסדרה $A' = \text{sort}(A) = (2, 3, 4, 7, 8)$, ואת מספר ההיפוכים ב־$A$, שהוא 3.
- נקרא רקורסיבית לאלגוריתם מיון ומנייה ונריץ אותו על הסדרה B. נקבל בחזרה את הסדרה $B' = \text{sort}(B) = (1, 5, 6, 9, 10)$, ואת מספר ההיפוכים ב־$B$ שהוא 6.
- נריץ את Merge-and-Count על הקלט (A', B') בצורה הבאה:
  - נאפס את count$\leftarrow 0$
  - נמזג את A' ו־B'. המיזוג ייראה כך:

A'		2	3	4			7	8		
B'	1				5	6			9	10
Remaining in A'	5				2	2			0	0

  בכל פעם שממוזג איבר מ־B', מצוין בשורה השלישית מספר האיברים שעדיין לא מוזגו ב־A', לכן השגרה מיזוג ומנייה (Merge-and-Count) מחזירה את הרשימה הממוזגת $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ ואת סכום ההיפוכים שהתגלו בשלב המיזוג: $5 + 2 + 2 + 0 + 0 = 9$.
- האלגוריתם מיון ומנייה מחזיר את הרשימה הממוזגת, את סכום ההיפוכים שנספרו רקורסיבית ואת אלה שנספרו בשלב המיזוג, בסך הכול: $3 + 6 + 9 = 18$.

◄ **תרגיל 5.2**

ספירת שחלופים [exhanges]. פעולת שחלוף על סדרת מספרים $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ מחליפה את המקומות של a_i ו־a_{i+1} עבור $1 \leq i < n$ כלשהו, ונוצרת הסדרה $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n)$. מרחק השחלופים של סדרה σ הוא המספר המינימלי של פעולות שחלוף הנדרש כדי לעבור מן הסדרה הנתונה למיון העולה שלה. הוכיחו שמרחק השחלופים של סדרה שווה למספר ההיפוכים בה. פתרון בעמ' 83 ►

5.3 זוג נקודות קרובות ביותר במישור

קראו בספר את סעיף 5.4

הסעיף הזה עוסק בבעיה הזו:

בעיה אלגוריתמית: זוג נקודות קרובות ביותר במישור [Closest Pair of Points].

הקלט: n נקודות $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ במישור, $p_i = (x_i, y_i)$.

הפלט: זוג נקודות p_i, p_j, $i \neq j$.
המטרה: p_i, p_j הן זוג הנקודות הקרובות ביותר ברשימה P, לפי המרחק האוקלידי $d(p_i,p_j) = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$.

שימו לב, בעיה זו מכלילה את בעיית מציאת זוג הנקודות הקרוב ביותר על הישר (שאפשר למצוא בקלות על ידי מיון), ושהאלגוריתם הסורק את כל הזוגות, רץ בזמן $O(n^2)$. הסעיף הנוכחי מציג אלגוריתם הפרד ומשול מתוחכם, שפותר את הבעיה בזמן $O(n\log n)$. להלן תיאור מקוצר של האלגוריתם וניתוחו:

1. בשלב הראשון אנו מוצאים את החציון m לפי ציר־x של הנקודות ומחלקים אותן לשתי קבוצות בגודל $n/2$ (בערך):

$$P_L = \{p_i = (x_i, y_i):\ x_i \le m\} \quad P_R = \{p_i = (x_i, y_i):\ x_i > m\}.$$

(התת־קבוצות באלגוריתם זה מתוחזקות בעזרת רשימות.)

2. אנו מפעילים רקורסיבית את האלגוריתם על P_L ומוצאים את זוג הנקודות הקרוב ביותר בקבוצה P_L, כשהמרחק בין הנקודות הוא δ_L.
3. באופן דומה אנו פועלים על P_R ומוצאים את זוג הנקודות הקרוב ביותר ב־P_R, כשהמרחק בין הנקודות הוא δ_R.
4. נסמן $\delta = \min\{\delta_L, \delta_R\}$.
5. בשלב ה"מיזוג" עלינו לבדוק את הזוגות "המעורבים" של הנקודות $p \in P_L$, $q \in P_R$, ולחפש אם יש זוג כזה המקיים $d(p,q) < \delta$. להלן תיאור החיפוש:

א. תחילה אנו מבחינים כי מספיק לבדוק את הנקודות הקרובות לקו החציון, כלומר מספיק לסרוק זוגות $p \in P'_L$ ו־$q \in P'_R$ כאשר

$$P'_L = \{p_i = (x_i, y_i):\ m-\delta \le x_i \le m\},$$
$$P'_R = \{p_i = (x_i, y_i):\ m < x_i \le m+\delta\}.$$

מפני שהנקודות ב־$P_L \setminus P'_L$ ו־$P_R \setminus P'_R$ נמצאות רחוק מדי מקו ההפרדה ואינן יכולות להיות חלק מזוג מעורב במרחק הקטן מ־δ.

ב. הקטנו את גודל הסריקה, אך לא במידה מספקת, כי עדיין ייתכן שאוסף הזוגות $\{(p,q):\ p \in P'_L,\ q \in P'_R\}$ יכיל $\Omega(n^2)$ נקודות.

ג. כאן אנו משתמשים בטענה המכריעה (שהובאה בספר כטענה (5.10), ראו גם תרגיל 5.3):
נתון זוג נקודות (p,q) כאשר $p \in P'_L$, $q \in P'_R$; אם זוג הנקודות הללו במרחק קטן מ־δ (כלומר $d(p,q) < \delta$) אז הן חייבות להיות עד 15 מקומות זו מזו במיון של $P'_L \cup P'_R$ לפי ציר־y.

לכן כל שעלינו לעשות הוא לסרוק את $P'_L \cup P'_R$, ולכל איבר $p \in P'_L$ לסרוק את 30 האיברים הקרובים ל־p במיון לפי ציר־y של $P'_L \cup P'_R$, ולחפש ביניהם $q \in P'_R$ שממזער את $d(p,q)$.

6. האלגוריתם מחזיר את המינימום בין δ לבין הערך שנמצא בסריקה לעיל של $P'_L \cup P'_R$.

הוכחת הנכונות הפורמלית תהיה, כנהוג באלגוריתמים רקורסיביים, באינדוקציה, ולמעשה הדרך כבר נרמזה בביאור לעיל. ננתח כעת את זמן הריצה. בניתוח נאיבי, בשלב הפירוק ובשלב המיזוג אנו נדרשים למיין, לכן זמן הריצה במימוש נאיבי של האלגוריתם מקיים $T(n) \le 2T(n/2) + cn\log n$. כפי שראינו בתרגיל 5.1, נוסחת הנסיגה הזו מקיימת $T(n) = O(n\log^2 n)$.

אפשר לשפר במקצת את האלגוריתם לפי ההבחנה הזו: הצעדים היחידים שדרוש להם זמן $O(n\log n)$ במהלך הפירוק וההרכבה, הם מיון קבוצת הנקודות המקורית P לפי ציר־x ולפי ציר־y

של תת־קבוצות. אפשר אם כן בתחילת האלגוריתם ולפני ביצוע השגרה הרקורסיבית שלעיל, למיין את כל הנקודות לפי ציר־x ולפי ציר־y, ואז הקלט לקריאות הרקורסיביות יהיה תת־קבוצה של הנקודות שכבר מוינו לפי ציר־x ולפי ציר־y. כעת נותר לנו רק להבחין שהקריאות הרקורסיביות לא צריכות כבר למיין אלא רק לשלוף תת־רשימות מתוך רשימות ממוינות, ואת זה אפשר לבצע בזמן לינארי. זמן הריצה המשופר מקיים אם כן $T(n) \le 2T(n/2) + cn$. נוסחת הנסיגה הזו מקיימת $T(n) = O(n \log n)$.

◄ תרגיל 5.3

שפרו את החסם העליון על מספר האיברים המפרידים ברשימה הממוינת של $P'_L \cup P'_R$ בין איברי הזוג הקרוב ביותר, כך שיהיה קטן מ־15. **פתרון בעמ' 83 ►**

5.4 כפל מספרים שלמים

קראו בספר את סעיף 5.5

◄ תרגיל 5.4

כתבו את האלגוריתם שמבצע כפל של שני מספרים בני n סיביות, שנלמד בבית הספר, בשם "כפל ארוך". הראו שמספר הפעולות הבסיסיות הדרושות לו (על סיביות) הוא $\Theta(n^2)$. **פתרון בעמ' 83 ►**

בסעיף זה אנו לומדים אלגוריתם הפרד ומשול פשוט וחכם שמשפר (אסימפטוטית) את מספר הפעולות הבסיסיות הדרושות. הרעיון: בהינתן זוג מספרים x ו־y בני n סיביות, אפשר לכותבם כך: $x = 2^{n/2}x_1 + x_0$ ו־$y = 2^{n/2}y_1 + y_0$, ואז מספר הסיביות במספרים x_0, x_1, y_0, y_1 יהיה $n/2$ סיביות. לפיכך:

$$xy = (x_1 2^{n/2} + x_0) \cdot (y_1 2^{n/2} + y_0) = x_1 y_1 2^n + (x_1 y_0 + y_1 x_0) 2^{n/2} + x_0 y_0. \tag{5.1}$$

(שימו לב, כפל ב־2^n או ב־$2^{n/2}$ הוא בסך הכול הזזת סיביות ואין צורך בקריאה רקורסיבית לפעולת הכפל). אנו מקבלים נוסחה עם ארבע מכפלות (רקורסיביות). ההבחנה החשובה היא שאפשר לחשב את שלושת הגורמים ב־(5.1) על ידי חישוב של שלוש המכפלות האלה:

$$a = (x_1 + x_0) \cdot (y_1 + y_0) \qquad b = x_1 \cdot y_1 \qquad c = x_0 y_0$$

הפעולה מבוצעת כדלקמן: הגורם שמכפיל את 2^n הוא b, הגורם שמכפיל את 1 הוא c, והגורם שמכפיל את $2^{n/2}$ הוא $a - b - c$. שימו לב שאפשר לבצע חיבור וחיסור בזמן לינארי (האלגוריתם שלמדנו בבית הספר). לכן אנו מקבלים אלגוריתם רקורסיבי המבצע שלוש מכפלות רקורסיביות על מספרים שמספר הסיביות שלהם הוא מחצית ולכן זמן הריצה מקיים:

$$T(n) \le 3T(n/2) + cn.$$

נוסחה רקורסיבית זו מקיימת $T(n) = O(n^{\log_2 3})$.

◄ תרגיל 5.5

מספר מרוכב הוא נקודה במישור $x = (a, b)$. חיבור מספרים מרוכבים זהה לחיבור וקטורים דו־ממדיים, כלומר $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$. כפל מוגדר כדלקמן:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

הראו כיצד אפשר לחשב כפל של מספרים מרוכבים (בייצוג המוגדר לעיל), בעזרת שלוש מכפלות ממשיות בלבד. **פתרון בעמ' 85 ►**

◄ **תרגיל 5.6**
נתונים זוג פולינומים במשתנה אחד מעל השלמים $f, g \in \mathbb{Z}[x]$. כל פולינום נתון כסדרת מקדמים. הציגו ונתחו אלגוריתם לחישוב פולינום המכפלה $f \cdot g$ בזמן $O(n^{\log_2 3})$, כאשר $n-1$ הוא הגבוה מבין דרגות הפולינומים (דרגת הפולינום היא החזקה הגבוהה ביותר שהמקדם שלה אינו 0).
לדוגמה: אנו מזהים את הקלט $f = (1, 2, 3, 4)$, $g = (0, -2, 4)$ עם הפולינומים $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ ו־$g(x) = 4x^2 - 2x$. המכפלה שלהם היא:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x) \\ &= 16x^5 + (12 - 8)x^4 + (8 - 6)x^3 + (4 - 4)x^2 - 2x,\end{aligned}$$

ולכן הפלט צריך להיות $(0, -2, 0, 2, 4, 16)$. בסעיף הבא נראה אלגוריתם יעיל יותר לחישוב כפל פולינומים.
פתרון בעמ' 85 ►

5.5 קונבולוציה והתמרת פורייה המהירה

קראו בספר את סעיף 5.6

הערה 5.1. כיוון שבסעיף זה נרבה להשתמש במספרים מרוכבים. הסימן "i" יהיה שמור בסעיף זה למספר המדומה $i = \sqrt{-1}$, ולא ישמש כאינדקס.

סעיף זה דן בחישוב מהיר של כפל פולינומים. ניזכר: אם

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad g(x) = b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0,$$

אזי

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = c_{m+n-2}x^{m+n-2} + c_{m+n-3}x^{m+n-3} + \ldots + c_0,$$

כאשר המספר c_k מוגדר כדלקמן:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

הפעולה על הסדרות $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ ו־$(b_0, \ldots, b_{m-1})$ המייצרת את הסדרה $(c_0, \ldots, c_{m+n-2})$ נקראת קונבולוציה [Convolution] וסימנה הוא "$*$".

דוגמה 5.2.

$$f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 2x - 1 \qquad g(x) = 8x^3 + 7x^2 + 6x + 5$$

אזי

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (-4 \cdot 8)x^6 + (-4 \cdot 7 + 5 \cdot 8)x^5 + (-4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 8)x^4 \\ &\quad + (-4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 7 - 1 \cdot 8)x^3 + (5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 7)x^2 \\ &\quad + (2 \cdot 5 - 1 \cdot 6)x - 1 \cdot 5 \\ &= -32x^6 + 12x^5 + 27x^4 + 16x^3 + 15x^2 + 4x - 5.\end{aligned}$$

בסימון סדרות אנו מקבלים

$$(-1,2,5,-4)*(5,6,7,8)=(-5,4,15,16,27,12,-32).$$

בתרגיל 5.6 התבקשתם לפתח אלגוריתם הפרד ומשול ישיר לכפל פולינומים שסיבוכיותו היא $O(n^{\log_2 3})$. בסעיף זה אנו לומדים על דרך מעט עקיפה לחישוב כפל פולינומים, שבסופה נקבל אלגוריתם מהיר ויעיל יותר, המבוסס על התמרת פורייה המהירה [Fast Fourier Transform (FFT)].

כצעד ראשון לפיתוח אלגוריתם כפל פולינומים מהיר נבחין שכל פולינום f מדרגה $n-1$ נקבע באופן יחיד על־ידי ערכו ב־n נקודות שונות, ולכן אפשר לייצג את f בייצוג אלטרנטיבי על־ידי:

$$(x_0,f(x_0)),\ (x_1,f(x_1)),\ \ldots,(x_{n-1},f(x_{n-1})),$$

כאשר $x_0,\ldots,x_{n-1}$ הוא אוסף של נקודות זרות בזוגות. בשני התרגילים הבאים נוכיח זאת ונתייחס לאספקט האלגוריתמי של ייצוג זה.

◄ **תרגיל 5.7**

בהינתן סדרת המקדמים $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ ו־$x_0\in\mathbb{C}$, הראו כיצד לחשב את $f(x_0)$ בזמן $O(n)$, כאשר $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$. פתרון בעמ' 86 ►

◄ **תרגיל 5.8** אינטרפולציה פולינומיאלית

תהי $(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ \ldots,(x_{n-1},y_{n-1})$ סדרה של זוגות מספרים מרוכבים המקיימת $x_k\neq x_j$ לכל $k\neq j$. הוכיחו שקיים פולינום יחיד $f(x)$ (עם מקדמים מרוכבים) מדרגה $n-1$ כך ש־ $f(x_k)=y_k$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה מדרגה $n-1$ של אוסף הזוגות $(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ \ldots,(x_{n-1},y_{n-1})$. הראו כיצד ניתן לחשב את מקדמי פולינום האינטרפולציה בזמן $O(n^2)$. פתרון בעמ' 86 ►

עתה, בהינתן זוג פולינומים f ו־g בייצוג ערכיהם בנקודות $x_0,\ldots,x_m$, קל לייצר את מכפלתם:

$$(x_0,f(x_0)g(x_0)),\ \ldots,(x_m,f(x_m)g(x_m)).$$

אנו מקבלים גישה מעניינת לחישוב כפל פולינומים: בהינתן זוג הפולינומים f ו־g, כל אחד מדרגה $n-1$, עליכם לבצע פעולות אלה:

1. בחרו ℓ נקודות, $\ell\geq 2n-1$, $x_0,\ldots,x_{\ell-1}\in\mathbb{C}$.
2. חשבו את ערכי f ו־g בנקודות האלה.
3. חשבו את $h_k=f(x_k)g(x_k)$.
4. מִצאו את מקדמי פולינום האינטרפולציה h לזוגות $(x_0,h_0),\ldots,(x_{\ell-1},h_{\ell-1})$ המקיים $h(x_j)=h_j$.

בגישה זאת, פעולת הכפל (צעד 3) מתבצעת בקלות בזמן לינארי. מובן שהסטנו את הקושי לחישוב ערכי הפולינום בנקודות, ולחישוב אינטרפולציה עבור שניהם ראינו בתרגיל 5.7 ובתרגיל 5.8 אלגוריתמים העובדים בזמן $O(n^2)$, מה שכמובן איננו משפר את זמן הריצה. הרעיון הנוסף שמאפשר את שיפור זמן הריצה הוא בחירה חכמה של הנקודות $x_0,\ldots,x_{\ell-1}$ שמאפשרת לקבל אלגוריתם הפרד ומשול יעיל לביצוע חישוב הערכים והאינטרפולציה – זהו ה־FFT.

אם כן, מטרתנו כעת היא למצוא סדרה של נקודות $x_0,\ldots,x_{n-1}$, שקל לחשב בה ערכי פולינומים ממעלה עד $n-1$. יהי $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. נניח ש־$n$ הוא חזקה של 2. נפרק את f לחזקות זוגיות וחזקות אי־זוגיות, ונכתוב $f(x)=xf_o(x^2)+f_e(x^2)$.

כלומר,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \\ &= x\left(a_{n-1}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-4} + \ldots + a_1x^0\right) \\ &\quad + \left(a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \ldots a_2x^2 + a_0x^0\right) \\ &= xf_o(x^2) + f_e(x^2) \end{aligned}$$

כאשר,

$$\begin{aligned} f_o(x) &= a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1} + a_{n-3}x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots + a_3x + a_1, \\ f_e(x) &= a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1} + a_{n-4}x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots + a_2x + a_0. \end{aligned}$$

המטרה היא לחשב את ערכי f בנקודות $x_0, \ldots x_{n-1}$ בשיטת הפרד ומשול. נניח שחישבנו את ערכי f_e ו־f_o על מחצית מקבוצת הנקודות $x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}$. לצורך חישוב f אנו צריכים לחשב את f_e ו־f_o בנקודות $x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2$. כדי ששיטת הפרד ומשול תהיה יעילה, עלינו להוסיף כמה שפחות עבודה רקורסיבית לצורך חישוב f. במקרה זה, המשמעות היא שלצורך חישוב f אין אנו רוצים לבצע הערכות נוספות של פולינומים בנקודות. יהיה מועיל מאד אם כן ששתי הקבוצות שלעיל יתלכדו. כלומר אנו רוצים שיתקיים

$$\{x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2\} = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{n-2}\}.$$

אנו גם רוצים שתכונה זאת תישמר רקורסיבית, כלומר שיתקיים גם

$$\{x_0^2, x_2^2, x_4^2, \ldots, x_{n-2}^2\} = \{x_0, x_4, x_8, \ldots, x_{n-4}\},$$

וכן הלאה. האם לכל n שהוא חזקה של שתיים, קיימת קבוצת מספרים המקיימת תנאים אלה? מתברר שכן, בתנאי שאנו מאפשרים גם מספרים מרוכבים: אלה **שורשי היחידה מסדר** n.

לפני שנפנה להצגת שורשי היחידה נסביר את הסימון "$e^{i\theta}$". בספר וגם במדריך אנו נשתמש בסימון $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, כלומר e בחזקת $i\theta$, כאשר e הינו בסיס הלוגריתם הטבעי, ו־$i = \sqrt{-1}$. ישנה הצדקה מתמטית חזקה לזהות את הביטוי $\cos\theta + i\sin\theta$ עם פעולת החזקה במספר מדומה. אנו לא נרחיב בנקודה זאת פה. לצרכינו מספיק לחשוב על זה כסימון נוח. עיקר הנוחות נובעת מהקיצור ברישום ומכך שנוסחת דה־מואבר,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

מתלכדת עם פעולת החזקה:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

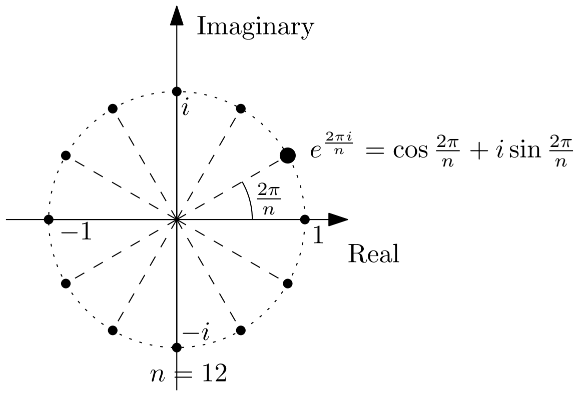
שורשי היחידה. שורש יחידה מסדר n הוא מספר מרוכב x המקיים $x^n = 1$. כפי שלמדתם בקורס "אלגברה לינארית", שורשי היחידה הם קבוצת המספרים

$$\begin{aligned} &\left\{\cos\theta + i\sin\theta :\ \theta \in \{0, \tfrac{2\pi}{n}, \tfrac{2\pi}{n}\cdot 2, \tfrac{2\pi}{n}\cdot 3, \ldots, \tfrac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right\} \\ &\qquad = \left\{1 = e^{i\frac{2\pi\cdot 0}{n}}, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{2\pi\cdot 2}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right\}. \end{aligned}$$

לדוגמה, עבור $n=4$ שורשי היחידה מסדר 4 (כלומר הפתרונות של המשוואה $x^4=1$) הינם

$$\begin{aligned} e^{i0} &= \cos 0 + i\sin 0 = 1 && \text{for } j=0\\ e^{i\frac{2\pi}{4}} &= \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} = i && \text{for } j=1\\ e^{i\frac{2\pi\cdot 2}{4}} &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 && \text{for } j=2\\ e^{i\frac{2\pi\cdot 3}{4}} &= \cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2} = -i && \text{for } j=3. \end{aligned}$$

ראו גם המחשה של שורשי היחידה מסדר 12 באיור 5.1.



איור 5.1: שורשי היחידה מסדר n הם נקודות על מעגל היחידה, והזווית שהן יוצרות עם ציר המספרים הממשיים היא כפולה שלמה של $\frac{2\pi}{n}$; העלאה בחזקת k משמעותה הכפלת הזווית ב־k. בזווית $2\pi/n$ נמצא שורש יחידה פרימיטיבי. האיור מדגים את שורשי היחידה מסדר $n=12$.

שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n, המסומן ב־$\omega=\omega_n$, מקיים בנוסף לאמור לעיל, גם $\omega^k\neq 1$ לכל $0<k<n$. לדוגמה, אפשר לבחור $\omega=e^{i2\pi/n}$ (כאמור, בסעיף זה $i=\sqrt{-1}$). כ עת נבחר $x_k=w^k$. נשים לב שאמנם

$$\begin{aligned} \{x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2\} &= \{\omega^{0\cdot 2}, \omega^{1\cdot 2}, \ldots, \omega^{(n-1)2}\}\\ &= \{\omega^{0\cdot 2}, \omega^{1\cdot 2}, \ldots, \omega^{(\frac{n}{2}-1)\cdot 2}, \omega^{\frac{n}{2}\cdot 2}, \omega^{(\frac{n}{2}+1)\cdot 2}, \ldots, \omega^{(n-1)2}\}\\ &= \{\omega^{0\cdot 2}, \omega^{1\cdot 2}, \ldots, \omega^{n-2}, \omega^0, \omega^2, \ldots, \omega^{n-2}\}\\ &= \{x_0, x_2, x_4 \ldots, x_{n-2}\}, \end{aligned}$$

כנדרש.

מטרתנו היא אם כן לחשב ההתאמה המתאימה לסדרת המספרים $(a_0,\ldots,a_{n-1})$ את סדרת המספרים $(f(\omega^0), f(\omega^1), \ldots, f(\omega^{n-1}))$, כאשר $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ו־ω שורש יחידה פרמיטיבי מסדר־n. התאמה זו נקראת **התמרת פורייה הבדידה** [Discrete Fourier Transform (DFT)].

עתה נתאר אלגוריתם מהיר לחישוב DFT. אלגוריתם זה נקרא **התמרת פורייה המהירה** [Fast Fourier Tansform (FFT)] כאשר n חזקה של 2:

1. רקורסיבית נחשב את $f_o(x) = a_{n-1}x^{\frac{n}{2}} + a_{n-3}x^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + a_1$ בנקודות $1, \omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{n-4}, \omega^{n-2}$.

2. רקורסיבית נחשב את $f_e(x) = a_{n-2}x^{\frac{n}{2}} + a_{n-4}x^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + a_0$ בנקודות $1, \omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{n-4}, \omega^{n-2}$.
3. "נרכיב" את החישובים שלעיל כדי לקבל את ערכי $f(x)$ בנקודות $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ כדלקמן:

$$f(\omega^k) = \omega^k f_o((\omega^k)^2) + f_e((\omega^k)^2),$$

תוך כדי שימת לב שאת $f_o(\omega^{2k})$ חישבנו כבר בצעד 1, ואת $f_e(\omega^{2k})$ חישבנו כבר בצעד 2.
נרשום את האלגוריתם הנקרא $\mathrm{FFT}((a_0, \ldots, a_{n-1}), \omega)$ (ראו אלגוריתם 5.1), המחשב את התמרת פורייה הבדידה של $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ תחת ההנחה ש־ω הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n וש־n הוא חזקה של 2.

Algorithm 5.1 $\mathrm{FFT}((a_0, \ldots, a_{n-1}), \omega)$

```
Require: ω^n = 1
Require: ∀0 < k < n, ω^k ≠ 1.
Require: n is a power of 2.
  if n = 1 then
      return (f(1) = a_0)
  (f_e(1), f_e(ω^2), f_e(ω^4), ..., f_e(ω^{n-2})) ←FFT((a_0, a_2 ..., a_{n-4}, a_{n-2}), ω^2)
  (f_o(1), f_o(ω^2), f_o(ω^4), ..., f_o(ω^{n-2})) ←FFT((a_1, a_3, ..., a_{n-3}, a_{n-1}), ω^2)
  for k ← 0, ..., n − 1 do
      f(ω^k) ← f_e(ω^{2k}) + ω^k f_o(ω^{2k})
  return (f(ω^0), f(ω^1), ..., f(ω^{n-1}))
```

נכונות האלגוריתם תוארה בקצרה לעיל. סיבוכיות הזמן $T(n)$ מקיימת

$$T(n) \le 2T(n/2) + cn$$

כלומר $T(n) = O(n \log n)$.

◄ **תרגיל 5.9**

אלגוריתם 5.1 נכתב תוך כדי שימוש ב"אינדקס" ω^k, והוא מנצל את העובדה ש־$\omega^{2k} = \omega^{2(k-\frac{n}{2})}$ עבור $k \ge n/2$. כתבו את האלגוריתם מחדש בעזרת אינדקסים רגילים בטווח $0, \ldots, n-1$.
הניחו ש־$\omega = e^{2\pi i/n}$ וש־n הינו חזקה של 2. **פתרון בעמ' 87** ►

כדי לסיים את תיאור האלגוריתם המהיר לכפל פולינומים (או בניסוח שקול, חישוב קונבולוציות) נותר לנו רק לתאר את שלב האינטרפולציה בשורשי היחידה. זוהי התמרה ההפוכה ל־DFT. אנו רוצים למצוא כיצד לחשב את הפעולה ההפוכה, ולשם כך נתחיל בהבנה טובה יותר של מהי DFT.
התמרת פורייה של סדרת מספרים $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ היא הווקטור הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1}\omega^{0(n-1)} + a_{n-2}\omega^{0(n-2)} + \ldots + a_1\omega^0 + a_0 \\ a_{n-1}\omega^{n-1} + a_{n-2}\omega^{n-2} + \ldots + a_1\omega + a_0 \\ a_{n-1}\omega^{2(n-1)} + a_{n-2}\omega^{2(n-2)} + \ldots + a_1\omega^2 + a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}\omega^{(n-1)(n-1)} + a_{n-2}\omega^{(n-1)(n-2)} + \ldots + a_1\omega^{n-1} + a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-2)} & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & \dots & \omega^{(n-1)(n-2)} & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כלומר, התמרת פורייה הבדידה היא התמרה (טרנספורמציה) לינארית שהמטריצה שלה $\mathcal{D}(\omega)$ מוגדרת כ־ $\mathcal{D}(\omega)_{k\ell} = \omega^{k\ell}$ (האינדקסים הם בתחום $0, \dots, n-1$). אם כן, האינטרפולציה היא גם כן התמרה לינארית שהמטריצה שלה היא המטריצה ההפוכה ל־$\mathcal{D}(\omega)$.

טענה 5.1. המטריצה ההפוכה ל־$\mathcal{D}(\omega)$ היא $\frac{1}{n}\mathcal{D}(\omega^{-1})$.

הוכחה. ניזכר שהמטריצה $\mathcal{D}(\omega)$ מוגדרת כ־$\mathcal{D}(\omega)_{k\ell} = \omega^{k\ell}$. כמו כן, $\mathcal{D}(\omega^{-1})_{k\ell} = \omega^{-k\ell}$. נסמן את מכפלת המטריצות הללו כך: $\mathcal{I} = \mathcal{D}(\omega) \cdot \frac{1}{n}\mathcal{D}(\omega^{-1})$. אנו צריכים להראות ש־$\mathcal{I}$ היא מטריצת הזהות. נחשב תחילה את ערכי האלכסון של $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathcal{D}(\omega)_{k\ell}\mathcal{D}(\omega^{-1})_{\ell k}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{k\ell} \cdot \omega^{-k\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{k\ell - k\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = 1.$$

כעת נראה שמחוץ לאלכסון הראשי, ערכי $\mathcal{I}$ הם כולם 0. מובן שלצורך כך אנו יכולים להניח ש־$n > 1$ (עבור $n = 1$ המטריצות הן מגודל 1×1 ואין איברים מחוץ לאלכסון הראשי). נקבע $k \neq k'$

$$\mathcal{I}_{kk'} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathcal{D}(\omega)_{k\ell}\mathcal{D}(\omega^{-1})_{k'\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{k\ell} \cdot \omega^{-\ell k'} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{(k-k')\ell}$$

נותר להראות ש־$0 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \widehat{\omega}^{\ell}$, כאשר $\widehat{\omega} = \omega^{k-k'}$. נשים לב, $\widehat{w}$ הינו שורש יחידה (לא בהכרח פרמיטיבי) כיוון ש־

$$\widehat{w}^n = (\omega^n)^{k-k'} = 1^{k-k'} = 1.$$

כמו כן, $\widehat{\omega} \neq 1$ כיוון ש־ω שורש יחידה פרמיטיבי ו־$n > |k-k'| > 0$.

כדי להוכיח ש־$0 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \widehat{\omega}^{\ell}$, ניזכר ששורש יחידה מסדר n מקיים את המשוואה $x^n = 1$, כלומר $\widehat{\omega}$ מאפס את הפולינום $x^n - 1$. אנו יכולים לרשום את הפולינום $x^n - 1$ בעזרת נוסחת טור גיאומטרי כ:

$$x^n - 1 = (x-1)\cdot(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = (x-1)\cdot\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} x^{\ell}\right)$$

נציב בחזרה $\widehat{\omega}$ בפולינום זה ונקבל

$$0 = \widehat{\omega}^n - 1 = (\widehat{\omega} - 1)\cdot\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \widehat{\omega}^{\ell}\right). \tag{5.2}$$

נשים לב: באגף ימין של (5.2) יש מכפלה של שני איברים השווה ל-0. האיבר הראשון – $(\widehat{\omega}-1)$ – איננו 0 כיוון שהראינו ש-$\widehat{\omega}\neq 1$, ולכן האגף השני הוא 0, כלומר:

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\widehat{\omega}^{\ell}=0,$$

וזה בדיוק מה שנדרשו להוכיח. ■

כלומר, כדי לחשב את מקדמי פולינום האינטרפולציה, עלינו להפעיל את הטרנספורמציה הלינארית $\frac{1}{n}\mathcal{D}(\omega^{-1})$. כיוון שגם ω^{-1} הוא שורש יחידה פרמיטיבי מסדר n (ראו תרגיל 5.10), אפשר לחשב את הטרנספורמציה $\mathcal{D}(\omega^{-1})$ בעזרת השגרה $\mathrm{FFT}(\cdot,\omega^{-1})$. בזאת סיימנו את תיאור האלגוריתם המהיר לחישוב כפל פולינומים.

◄ תרגיל 5.10

הוכיחו שאם ω הוא שורש פרימיטיבי מסדר n, אזי גם ω^{-1} הוא שורש פרימיטיבי מסדר n.

פתרון בעמ' 87 ►

◄ תרגיל 5.11

הריצו את $\mathrm{FFT}((-1,2,5,-4),\omega)$, ואחרי כן הריצו את $\mathrm{FFT}(\cdot,\omega^{-1})$ על הפלט מההרצה הקודמת. השוו את התשובה שקיבלתם לקלט המקורי, $(-1,2,5,-4)$.

פתרון בעמ' 87 ►

◄ תרגיל 5.12

חשבו את התמרת פורייה הבדידה של הסדרה $(-1,-i,2,2i,5,5i,-4,-4i)$.

פתרון בעמ' 88 ►

◄ תרגיל 5.13

פתחו אלגוריתם שיחשב במהירות את התמרת פורייה הבדידה לסדרה באורך n כאשר n הוא חזקה של 3.

פתרון בעמ' 89 ►

5.6 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 5.2 (מעמוד 73)
נסמן ב־$d_{\text{ex}}(\sigma)$ את מרחק השחלופים של סדרה σ, וב־$\text{rev}(\sigma)$ את מספר ההיפוכים בה. עלינו להוכיח כי $d_{\text{ex}}(\sigma) = \text{rev}(\sigma)$ לכל סדרה σ.

נגדיר "היפוך צמוד" כזוג $(i, i+1)$ עבורו $a_i > a_{i+1}$. כעת שימו לב, אם בסדרה נתונה יש היפוכים (כלומר היא אינה מונוטונית עולה), אז יש בה לפחות "היפוך צמוד" אחד. כדי לראות זאת, נבחר היפוך (i, j), $i < j$, כלומר $a_i > a_j$. אם $j = i+1$, אז סיימנו (זה היפוך צמוד), אחרת, בהכרח $i+1 < j$, ו־ $(i+1, j)$ הוא היפוך, ובאינדוקציה על $j - i$ סיימנו גם כן.

כמו כן נשים לב ששחלוף של היפוך צמוד $(i, i+1)$ מקטין את מספר ההיפוכים בסדרה באחד: לאחר השחלוף, הזוג $(i, i+1)$ כבר אינו היפוך וכל היפוך אחר שבו הופיעו i או $i+1$ נשאר היפוך (עם החלפת i ב־$i+1$, והחלפת $i+1$ ב־i).

שילוב שתי הטענות לעיל מאפשר להוכיח באינדוקציה על $\text{rev}(\sigma)$ את האי־שוויון $d_{\text{ex}}(\sigma) \leq \text{rev}(\sigma)$: אם $\text{rev}(\sigma) = 0$, הטענה ברורה (הסדרה היא מונוטונית עולה ולכן גם $d_{\text{ex}}(\sigma) = 0$). אחרת, אם $\text{rev}(\sigma) > 0$, אזי לפי האמור לעיל, קיים שחלוף (של היפוך צמוד) שמייצר סדרה σ' שעבורה $\text{rev}(\sigma') = \text{rev}(\sigma) - 1$. מהנחת האינדוקציה, $d_{\text{ex}}(\sigma') \leq \text{rev}(\sigma')$ ולכן

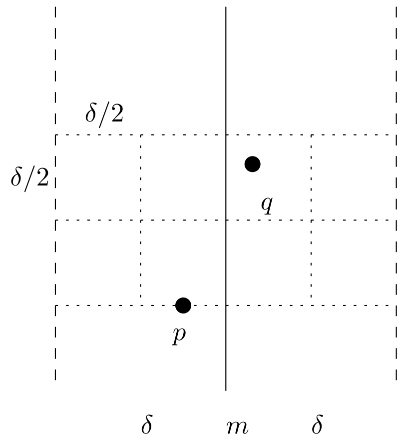
$$d_{\text{ex}}(\sigma) \leq d_{\text{ex}}(\sigma') + 1 \leq \text{rev}(\sigma') + 1 = \text{rev}(\sigma).$$

בכיוון השני נוכיח באינדוקציה על $d_{\text{ex}}(\sigma)$ ש־$d_{\text{ex}}(\sigma) \leq \text{rev}(\sigma)$. אם $d_{\text{ex}}(\sigma) = 0$ אז הסדרה מונוטונית עולה ולכן גם $\text{rev}(\sigma) = 0$. אם $d_{\text{ex}}(\sigma) > 0$, אזי מהגדרת d_{ex} קיים שחלוף של σ המייצר סדרה σ' שעבורה $d_{\text{ex}}(\sigma') = d_{\text{ex}}(\sigma) - 1$. שימו לב, $|\text{rev}(\sigma) - \text{rev}(\sigma')| \leq 1$: עבור שחלוף $(i, i+1)$ כל הזוגות, למעט $(i, i+1)$ נשארים באותו היפוך או לא־היפוך (תוך שינוי אינדקס i ל־$i+1$ ולהפך). מהנחת האינדוקציה $\text{rev}(\sigma') \leq d_{\text{ex}}(\sigma')$ ולכן

$$\text{rev}(\sigma) \leq \text{rev}(\sigma') + 1 \leq d_{\text{ex}}(\sigma') + 1 = d_{\text{ex}}(\sigma).$$

פתרון תרגיל 5.3 (מעמוד 75)
הארגומנט בספר לא עבר אופטימיזציה, לכן קל מאוד לשפרו. אנו נשפר אותו ל־7 ללא מאמץ רב בצורה הזו (ראו גם איור 5.2): נניח כי קיים זוג נקודות $p = (x_1, y_1) \in P'_L$ ו־$q = (x_2, y_2) \in P'_R$, כך ש־ $d(p, q) < \delta$. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי $y_2 < y_1$. נצייר ריבועים (כמו באיור 5.7 בספר) בגודל $\frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2}$, ונדאג שהבסיס התחתון של הריבועים יהיה ב־y_1, (ראו איור 5.2). במקרה זה ברור ש־q יכול להימצא לכל היותר בשורה אחת גבוהה יותר, אחרת יתקיים ש $d(p, q) \geq \delta$. כיוון שבכל שורה יש ארבעה ריבועים, ובכל אחד מהריבועים יכולה להיות לכל היותר נקודה אחת (ראו הטיעון בהוכחת (5.10) בספר), הנקודה q יכולה להופיע לכל היותר כנקודה השביעית לאחר p במיון עולה לפי ציר y של $P'_L \cup P'_R$.

פתרון תרגיל 5.4 (מעמוד 75)
להלן דוגמה שתעזור לנו להיזכר באלגוריתם לביצוע כפל ארוך (בבסיס 2) כפי שנלמד בבית הספר



איור 5.2: שיפור החסם על ההפרש בין הנקודות הקרובות ביותר p, q לקו החציון m משני צדדיו: נצייר ריבועים בגודל $\frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2}$ שבסיסם ב־p. כיוון ש־$d(p,q) < \delta$, הנקודה q חייבת להימצא בשורה השנייה לכל היותר, כלומר במסגרת של שמונה ריבועים, וכל ריבוע יכול להכיל נקודה אחת לכל היותר.

היסודי.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \times \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

כדי לתאר את האלגוריתם נניח שנתונים לנו שני מערכי סיביות $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ ו־$(b_0, \ldots, b_{n-1})$; וש־a_0 ו־b_0 הן הסיביות הפחות משמעותיות. האלגוריתם לביצוע כפל ארוך מתואר כדלקמן:

Algorithm 5.2 Long-Multiplication$((a_0, \ldots, a_{n-1}), (b_0, \ldots, b_{n-1}))$

Initialize $c_0, \ldots, c_{2n-1} \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0, \ldots, n-1$ do
    carry $\leftarrow 0$
    if $a_i = 1$ then
        for $j \leftarrow 0, \ldots, n-1$ do
            $c_{i+j} \leftarrow c_{i+j} \oplus b_j \oplus$ carry
            {comment: $\oplus$ is the XOR operation}
            carry $\leftarrow (c_{i+j} \wedge b_j) \vee (c_{i+j} \wedge \text{carry}) \vee (b_j \wedge \text{carry})$
        $c_{i+n} \leftarrow$ carry
return $(c_0, \ldots, c_{2n-1})$

פתרון תרגיל 5.5 (מעמוד 75)
אנו כותבים:

$$\alpha = ac, \qquad \beta = bd, \qquad \gamma = (a+b)\cdot(c+d),$$

ואז

$$(a,b)\cdot(c,d) = (\alpha-\beta, \gamma-\alpha-\beta).$$

פתרון תרגיל 5.6 (מעמוד 76)
נניח לשם הפשטות ש־n הוא חזקה של 2. בדומה לכפל מספרים שלמים, נסמן כך את הפונקציות:

$$f(x) = f_1(x)x^{n/2} + f_0(x), \qquad g(x) = g_1(x)x^{n/2} + g_0(x)$$

ואז

$$f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x)x^n + ((f_1(x)g_0(x)) + g_1(x)f_0(x))x^{n/2} + f_0(x)g_0(x).$$

וכרגיל, נוכל להסתדר עם שלוש פעולות כפל רקורסיביות בלבד על־ידי הבחירה הזו:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= f_1(x)g_1(x),\\ \beta(x) &= f_0(x)g_0(x),\\ \gamma(x) &= (f_1(x)+f_0(x))\cdot(g_1(x)+g_0(x)).\end{aligned}$$

לאחר חישוב $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ נותר לחשב את הביטוי

$$f(x)g(x) = \alpha(x)x^n + (\gamma(x)-\beta(x)-\alpha(x))x^{n/2} + \beta(x)$$

תיאור מפורט מובא באלגוריתם 5.3.

Algorithm 5.3 Polynomial-Multiplication$((a_0,\dots a_{n-1}),(b_0,\dots,b_{n-1}))$

Require: n is a power of two (for simplicity of the presentation)

$(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) \leftarrow$Polynomial-Multiplication$((a_{n/2},\dots,a_{n-1}),(b_{n/2},\dots,b_{n-1}))$

$(\beta_0,\dots,\beta_{n-1}) \leftarrow$Polynomial-Multiplication$((a_0,\dots,a_{n/2-1}),(b_0,\dots,b_{n/2-1}))$

$(\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1}) \leftarrow$Polynomial-Multiplication$((a_0+a_{n/2},\dots,a_{n/2-1}+a_{n-1}),(b_0+b_{n/2},\dots,b_{n/2-1}+b_{n-1}))$

$$\delta_i \leftarrow \begin{cases}\beta_i & 0\le i\le n/2-1\\ \beta_i + (\gamma_{i-n/2}-\alpha_{i-n/2}-\beta_{i-n/2}) & n/2\le i\le n-1\\ \alpha_{i-n} + (\gamma_{i-n/2}-\alpha_{i-n/2}-\beta_{i-n/2}) & n\le i\le 3n/2-1\\ \alpha_{i-n} & 3n/2\le i\le 2n-1\end{cases}$$

return $(\delta_0,\dots,\delta_{2n-1})$

פתרון תרגיל 5.7 (מעמוד 77)

האלגוריתם הנאיבי לחישוב $f(x_0)$ ייקח $O(n^2)$ זמן. ההבחנה המאפשרת את שיפור זמן הריצה היא שניתן לכתוב את $f(x)$ כדלקמן:

$$f(x) = (\cdots((a_{n-1}x + a_{n-2})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

נוסחה זאת מובילה ישירות לאלגוריתם הבא:

Algorithm 5.4 Poly-eval$((a_0, \ldots, a_{n-1}), x_0)$

```
y_0 ← a_{n-1}
for k ← n − 2 down to 0 do
    y_0 ← y_0 · x_0 + a_k
return y_0
```

פתרון תרגיל 5.8 (מעמוד 77)

תחילה נוכיח שקיים פולינום אינטרפולציה. זוהי **נוסחת לגראנז'** שמוגדרת כדלקמן:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \frac{\prod_{j:j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j:j\neq k}(x_k - x_j)}. \tag{5.3}$$

נשים לב שבהגדרה אין חלוקה ב־0, כיוון שהנחנו ש־$x_k \neq x_j$ כאשר $j \neq k$.

נראה עתה שלכל $t \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f(x_t) = y_t$. ב־(5.3) מופיע סכום של n איברים. נתבונן באיבר ה־k בסכום. כאשר $k \neq t$ נקבל

$$y_k \cdot \frac{\prod_{j:j\neq k}(x_t - x_j)}{\prod_{j:j\neq k}(x_k - x_j)} = 0,$$

כיוון שבמכפלה במונה מופיע הביטוי $x_t - x_t = 0$, כאשר $j = t$. לעומת זאת כאשר $k = t$,

$$y_k \cdot \frac{\prod_{j:j\neq k}(x_t - x_j)}{\prod_{j:j\neq k}(x_k - x_j)} = y_t \cdot \frac{\prod_{j:j\neq t}(x_t - x_j)}{\prod_{j:j\neq t}(x_t - x_j)} = y_t,$$

כיוון שהמונה שווה למכנה. מכאן שסכום האיברים – $f(x_t)$ – שווה ל־y_t, כנדרש.

נוכיח עתה את יחידות הפתרון. לשם כך נשתמש באלגברה לינארית. נסמן ב־W את המטריצה מסדר $n \times n$ כך ש־$W_{\ell k} = x_\ell^k$ (האינדקסים בטווח $\{0, \ldots, n-1\}$). כלומר

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

בפסקה הקודמת, בהוכחת קיום פולינום אינטרפולציה, הוכחנו בעצם שלכל וקטור $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$, קיים וקטור מקדמים $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})^T$ המקיים

$$W \cdot a = y.$$

במושגים של העתקות ליניאריות, ההעתקה $W:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ היא "על" ולכן היא חייבת להיות ממעלה n. לפי כללי האלגברה הלינארית אנו יודעים שזה ייתכן אם ורק אם W היא חד חד ערכית, כלומר הפתרון a הוא יחיד, כנדרש.

נותר להציג אלגוריתם העובד בזמן $O(n^2)$ לחישוב מקדמי פולינום האינטרפולציה. אלגוריתם כזה נובע כמעט ישירות מנוסחת לגראנז' (5.3). מספיק להראות שעבור k קבוע ניתן לחשב את הביטוי

$$y_k \cdot \frac{\prod_{j:j\neq k}(x-x_j)}{\prod_{j:j\neq k}(x_k-x_j)}$$

בזמן $O(n)$. זאת נעשה כדלקמן: המכנה הינו מכפלה של $n-1$ מספרים שמתבצעת בקלות בזמן $O(n)$. המונה הוא פולינום, שניתן לקבלו בייצוג לפי מקדמים בזמן לינארי בצורה הבאה: מחשבים פעם אחת את מקדמי הפולינום $g(x)=\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$. עתה נותר רק להבחין כי

$$\prod_{j:j\neq k}(x-x_j) = \frac{g(x)}{x-x_k}.$$

את אגף ימין ניתן לחשב בזמן לינארי בעזרת אלגוריתם לחילוק פולינומים שנלמד בבית הספר.

פתרון תרגיל 5.9 (מעמוד 80)

Algorithm 5.5 concrete-FFT$((a_0,\ldots,a_{n-1}))$

Require: n is a power of 2.
```
if n = 1 then
    return (f(1) = a_0)
(b_0, b_1, ..., b_{n/2-1}) ← concrete-FFT((a_0, a_2 ..., a_{n-4}, a_{n-2}))
(c_0, c_1, ..., c_{n/2-1}) ← concrete-FFT((a_1, a_3, ..., a_{n-3}, a_{n-1}))
for k ← 0, 1, ..., n/2 - 1 do
    d_k ← b_k + e^{2πki/n} c_k
    d_{k+n/2} ← b_k - e^{2πki/n} c_k
return (d_0, ..., d_{n-1})
```

פתרון תרגיל 5.10 (מעמוד 82)

תחילה נראה ש-ω^{-1} הוא שורש יחידה מסדר n. ואמנם

$$(\omega^{-1})^n = \omega^{-n} = (\omega^n)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

שנית נראה שזהו שורש פרימיטיבי, כלומר לכל $n>k>0$, $(\omega^{-1})^k \neq 1$. ואמנם,

$$(\omega^{-1})^k = \omega^{-k} = (\omega^k)^{-1} \neq 1^{-1} = 1.$$

פתרון תרגיל 5.11 (מעמוד 82)

בתרגיל זה $n=4$. נקבע $\omega = e^{2\pi i/4} = i$.

1. נחשב תחילה את $\mathrm{FFT}((-1,2,5,-4),\omega)$

1. Calling $\mathrm{FFT}((-1,2,5,-4),\omega=i)$
   I. Calling $\mathrm{FFT}((-1,5),\omega^2=-1)$
      a. Calling $\mathrm{FFT}((-1),\omega^4=1)$, returning (-1)
      b. Calling $\mathrm{FFT}((5),\omega^4=1)$, returning (5)
      c. Return $(-1+1\cdot 5,-1+\omega^2\cdot 5)=(4,-6)$
   II. Calling $\mathrm{FFT}((2,-4),\omega^2=-1)$
      a. Calling $\mathrm{FFT}((2),\omega^4=1)$, returning (2)
      b. Calling $\mathrm{FFT}((-4),\omega^4=1)$, returning (-4)
      c. Return $(2+1\cdot(-4),2-1\cdot(-4))=(-2,6)$
   III. Calculate $f(1)=4+1\cdot(-2)=2$, $f(i)=-6+i\cdot 6$, $f(-1)=4+(-1)\cdot(-2)$, $f(-i)=-6-i\cdot 6$,
   IV. Return $(2,-6+6i,6,-6-6i)$

2. נריץ כעת את $\mathrm{FFT}((2,-6+6i,6,-6-6i),\omega^{-1})$

1. Calling $\mathrm{FFT}((2,-6+6i,6,-6-6i),\omega^{-1}=-i)$
   I. Calling $\mathrm{FFT}((2,6),\omega^{-2}=-1)$
      a. Calling $\mathrm{FFT}((2),\omega^{-4}=1)$, returning (2)
      b. Calling $\mathrm{FFT}((6),\omega^{-4}=1)$, returning (6)
      c. Return $(2+1\cdot 6,2+\omega^{-2}\cdot 6)=(8,-4)$
   II. Calling $\mathrm{FFT}((-6+6i,-6-6i),\omega^{-2}=-1)$
      a. Calling $\mathrm{FFT}((-6+6i),\omega^{-4}=1)$, returning $(-6+6i)$
      b. Calling $\mathrm{FFT}((-6-6i),\omega^{-4}=1)$, returning $(-6-6i)$
      c. Return $(-6+6i+1\cdot(-6-6i),-6+6i+\omega^{-2}\cdot(-6-6i)=(-12,12i)$
   III. Calculate $f(1)=8+1\cdot(-12)=-4$, $f(i)=-4+\omega^{-1}\cdot 12i=8$, $f(-1)=8+\omega^{-2}\cdot(-12)=20$, $f(-i)=-4+\omega^{-3}\cdot 12i=-16$,
   IV. Return $(-4,8,20,-16)$

קיבלנו את הסדרה המקורית מוכפלת ב־$n=4$, כפי שצריך להיות.

פתרון תרגיל 5.12 (מעמוד 82)

נפתור תרגיל זה בעזרת FFT ופתרון תרגיל 5.11. בתרגיל זה $n=8$, ו־$\omega=e^{2\pi i/8}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. כדי לחשב את ה־FFT של הסדרה הנתונה, נפריד את סדרת המספרים לאלו במקומות הזוגיים ולאלו במקומות האי־זוגיים.

סדרת המקומות הזוגיים (כשמספור האינדקסים מתחיל ב־0) היא $(-1,2,5,-4)$ ועלינו לפתור את $\mathrm{FFT}((-1,2,5,-4),\omega^2=i)$ אך זו בדיוק הבעיה שפתרנו בתרגיל 5.11, ומשם אנו יודעים שהפתרון הוא

$$(b_0,\dots,b_3)=(2,-6+6i,6,-6-6i).$$

סדרת המקומות האי־זוגיים היא $(-i,2i,5i,-4i)$. עלינו לפתור את $\mathrm{FFT}((-i,2i,5i,-4i),\omega^2=i)$. כפי שכבר כתבנו, FFT הינה פרוצדורה לחישוב DFT, וכפי שראינו DFT הינה התמרה לינארית. כיוון ש־

$$(-i,2i,5i,-4i)=i\cdot(-1,2,5,-4),$$

אנו מסיקים (מלינאריות ההתמרה) ש־

$$(c_0,\dots,c_3) = \mathbf{DFT}((-i,2i,5i,-4i)) = i\cdot \mathbf{DFT}((-1,2,5,-4))$$
$$= i\cdot(2,-6+6i,6,-6-6i) = (2i,-6-6i,6i,6-6i),$$

השוויון השלישי הוא החישוב שעשינו לעיל.

נותר שלב "המיזוג" של התת־פתרונות. תוך כדי שימוש בסימונים של פתרון תרגיל 5.9,

$$\begin{aligned}
d_0 &= b_0 + c_0 = 2+2i, & d_4 &= b_0 - c_0 = 2-2i\\
d_1 &= b_1 + e^{2\pi i/8}c_1 = -6+i(6-6\sqrt{2}) & d_5 &= b_1 - e^{2\pi i/8}c_1 = -6+i(6+6\sqrt{2})\\
d_2 &= b_2 + e^{2\cdot 2\pi i/8}c_2 = 0 & d_6 &= b_2 - e^{2\cdot 2\pi i/8}c_2 = 12\\
d_3 &= b_3 + e^{3\cdot 2\pi i/8}c_3 = -6+i(6\sqrt{2}-6) & d_7 &= b_3 - e^{3\cdot 2\pi i/8}c_3 = -6+i(-6-6\sqrt{2})
\end{aligned}$$

פתרון תרגיל 5.13 (מעמוד 82)

אנו נפתח FFT המשתמש בחלוקות ל־3 במקום חלוקות ל־2 כפי שהיה באלגוריתם 5.1. פרט לשינוי הזה, הרעיונות יהיו זהים. נניח ש־n היא חזקה של 3. בהינתן סדרת מספרים $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ נסתכל על הפולינום $f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k$, ונכתוב אותו כך:

$$f(x) = f_0(x^3) + xf_1(x^3) + x^2f_2(x),$$

כאשר

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{n/3-1} a_{3k}x^k$$
$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n/3-1} a_{3k+1}x^k$$
$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{n/3-1} a_{3k+2}x^k$$

יהי ω שורש יחיד פרימיטיבי מסדר n. מכאן ש־ ω^3 הינו שורש יחידה פרמיטיבי מסדר $n/3$. לכן, ערכם של הפולינומים $f_h(x)$, $h\in\{0,1,2\}$, בנקודות $1,\omega^3,\omega^6,\dots,\omega^{\frac{n}{3}-1}$ הם התמרת פורייה הבדידה מסדר $n/3$ של הסדרות $(a_{3k+h})_{k\in\{0,1,\dots,n/3-1\}}$, עבור $h\in\{0,1,2\}$ בהתאמה. קיבלנו אם כן נוסחה רקורסיבית לחישוב התמרת פורייה הבדידה, והיא מובילה ישירות לאלגוריתם 5.6.

Algorithm 5.6 FFT_B3$((a_0, \dots, a_{n-1}), \omega)$

Require: $\omega^n = 1$
Require: $\forall 0 < k < n, \omega^k \neq 1$.
Require: n is a power of 3.
  if $n = 1$ **then**
    return $(f(1) = a_0)$
  $(f_0(1), f_0(\omega^3), f_0(\omega^6), \dots, f_0(\omega^{n-3}) \leftarrow$FFT_B3$((a_0, a_3, a_6, \dots, a_{n-3}), \omega^3)$
  $(f_1(1), f_1(\omega^3), f_1(\omega^6), \dots, f_1(\omega^{n-3}) \leftarrow$FFT_B3$((a_1, a_4, a_7, \dots, a_{n-2}), \omega^3)$
  $(f_2(1), f_2(\omega^3), f_2(\omega^6), \dots, f_2(\omega^{n-3}) \leftarrow$FFT_B3$((a_2, a_5, a_8, \dots, a_{n-1}), \omega^3)$
  for $k \leftarrow 0, \dots, n-1$ **do**
    $f(\omega^k) \leftarrow f_0(\omega^{3k}) + \omega^k f_1(\omega^{3k}) + \omega^{2k} f_2(\omega^3)$
  return $(f(\omega^0), f(\omega^1), \dots, f(\omega^{n-1}))$

פרק 6
תכנון דינמי

6.1 תזמון מקטעים

קראו בספר מתחילת פרק 6 עד סוף סעיף 6.2

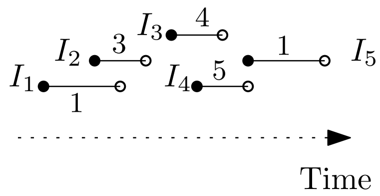
תכנון דינמי [Dynamic Programming] פותר בעיות אופטימיזציה על ידי פתרון איטרטיבי של תת־בעיות ש"גודלן" הולך ועולה, כך שהמעבר מפתרון לתת־בעיה בגודל i לתת־בעיה בגודל $i+1$ הוא פשוט (יחסית). תיאור זה נכון גם לשיטות חמדניות ולשיטות הפרד ומשול. ההבדל המשמעותי הוא שההחלטה בתכנון דינמי נעשית לרוב על סמך "מידע רב יותר": בפתרון דינמי נוטים לחשב פתרון להרבה תת־בעיות בגודל i לפני שפותרים תת־בעיות בגודל $i+1$. נובע מכך שתכנון דינמי נוטה להיות בעל זמני ריצה ארוכים יותר, אך פותר מגוון רחב יותר של בעיות אלגוריתמיות. בהקשר זה אפשר לראות חלק גדול מהאלגוריתמים החמדניים כמקרים פרטיים – מנוונים – של תכנון דינמי.

הדוגמה הראשונה לאלגוריתם תכנון דינמי המובאת בספר היא פתרון בעיה של תזמון מקטעים ממושקלים.

בעיה אלגוריתמית: תזמון מקטעים ממושקלים.
הקלט: קבוצה $\{I_1, I_2 \ldots, I_n\} = \mathcal{I}$ של n מקטעים [Intervals], כאשר לכל מקטע $I_i = [s_i, f_i)$ יש משקל/ערך v_i.
הפלט: תת־קבוצה $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ של מקטעים זרים בזוגות.
המטרה: מבין תת־הקבוצות של $\mathcal{I}$, אשר מכילות רק מקטעים זרים בזוגות, יהיה לתת־קבוצה $\mathcal{J}$ משקל מרבי (השווה לסכום משקלי המקטעים שלה).

באיור 6.1 מוצגת דוגמה לקלט של בעיית תזמון מקטעים ממושקלים.

אלגוריתם תכנון דינמי לבעיה זו, בדומה לאלגוריתם החמדני לבעיה הלא־ממושקלת, מסדר את המקטעים לפי זמן סיום עולה, בוחן אותם אחד־אחד ומנסה לצרפם לפתרון האופטימלי. האלגוריתם החמדני ניסה "רק" להוסיף את המקטע I_i לפתרון האופטימלי של $I_1, \ldots, I_{i-1}$, בתנאי ש־I_i אינו חותך את הפתרון האופטימלי של $I_1, \ldots, I_{i-1}$. במקרה הממושקל זה לא מספיק, כפי שרואים באיור 6.1 שבספר. במקום זאת, "זוכרים" בתכנון הדינמי את הפתרונות האופטימליים לכל התת־בעיות שצורתן עבור $i > j$ היא $I_1, \ldots, I_j$, וכך אפשר לקבל החלטה טובה יותר. למרות הפשטות לכאורה של גישה זאת, ההחלטה מה בדיוק צריך לזכור היא מהותית. כדי להדגים זאת, נבחן כמה דרכים שונות לזכור בעיות קטנות יותר:



איור 6.1: דוגמת קלט של בעיית תזמון קטעים ממושקלים. האלגוריתם החמדני לבעיה הלא־ממושקלת יחזיר $\{I_1, I_3, I_5\}$ שערכו 6, אבל הפתרון האופטימלי הוא $\{I_2, I_4, I_5\}$ שערכו 9.

1. לכל $i > j$ נזכור את ערך הפתרון האופטימלי לתת־בעיה $I_1, \ldots, I_j$ (שיכול לכלול או לא לכלול את I_j). זו בחירה מוצלחת, המאפשרת להגדיר אלגוריתם יעיל, כפי שמודגם בסעיף 6.2 בספר. אבל זו אינה האפשרות היחידה.
2. נזכור לכל $i > j$ את ערך הפתרון האופטימלי לתת־הבעיה $I_1, \ldots, I_j$ מבין הפתרונות החוקיים שמכילים את I_j. גישה זו מובילה לאלגוריתם תכנון דינמי הדומה לאלגוריתם המוצג בספר, אך הוא פחות יעיל במידה ניכרת. בתרגיל 6.1 תתבקשו לכתוב ולנתח אלגוריתם המתבסס על גישה זאת.
3. בדומה לאפשרות 1, נזכור לכל $i > j$ את ערך הפתרון האופטימלי לתת־בעיה $I_1, \ldots, I_j$ (עם או בלי I_j), ונוסף על כך נזכור גם את הפתרון האופטימלי עצמו. זו גישה "נאיבית". היא מאפשרת להחזיר גם את הפתרון האופטימלי ולא רק את ערכו, אך היא פחות יעילה במידה ניכרת. כפי שראינו בסעיף 6.1 בספר, לא צריך לשמור את הפתרונות האופטימליים לכל תתי־הבעיות הנוצרות במהלך האיטרציה כדי לבנות את הפתרון האופטימלי.
4. לכל תת־קבוצה של $I_1, \ldots, I_{i-1}$ נזכור אם היא חוקית, ואם כן נזכור את ערכה. פיתוח גישה זו יוביל לאלגוריתם סריקה מקיף, הרץ בזמן מעריכי (אקספוננציאלי), כלומר קל להתדרדר לפתרון לא יעיל עקב מעט חוסר תשומת לב.

◄ תרגיל 6.1
כתבו אלגוריתם המבוסס על אפשרות 2. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן הריצה וגודל הזיכרון הנדרש. **פתרון בעמ' 106 ►**

6.2 בעיית התרמיל

קראו בספר את סעיף 6.4

אם הורדתם פעם סרטים לטלפון החכם שלכם ייתכן שרציתם "לנצל" את זיכרון הטלפון כמה שיותר, כלומר למלא אותו ככל האפשר בסרטים מבלי לשמור חלקי סרט. הבעיה הבאה הינה ניסוח אלגוריתמי כללי לבעיות מסוג זה.

בעיה אלגוריתמית: בעיית סכומי תת־קבוצות [Subset Sum Problem].
הקלט: n פריטים $\{1, \ldots, n\}$, משקלות לפריטים $w_i \in \mathbb{N}$, וחסם $W \in \mathbb{N}$.

הפלט: תת־קבוצה $S \subseteq \{1,\dots,n\}$, כך ש־$\sum_{i\in S} w_i \le W$.
המטרה: למקסם את המשקל $w(S) = \sum_{i\in S} w_i$ של S.

אפשר לפתור את בעיית סכומי תת־קבוצות בעזרת תכנון דינמי: מגדירים את הטבלה $M(i,w)$ שמכילה את הסכום המרבי שניתן להגיע אליו מתוך תת־קבוצה של $\{w_1,\dots,w_i\}$ תחת האילוץ שהסכום הוא לכל היותר w. טבלה זאת מקיימת את הנוסחה הרקורסיבית הזו:

$$M(i,w) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ M(i-1,w) & w_i > w \\ \max\{M(i-1,w), w_i + M(i-1,w-w_i)\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

הסבר: נסתכל על הפתרון האופטימלי O של בעיית סכומי תת־קבוצות של $\{w_1.\dots,w_i\}$ שערכם לכל היותר w. ייתכנו שני מקרים:

1. $i \in O$. במקרה זה $O \setminus \{i\}$ הוא פתרון אופטימלי של בעיית סכומי תת־קבוצות של $\{w_1.\dots,w_{i-1}\}$ שערכם לכל היותר $w - w_i$, ולכן מהנחת האינדוקציה ערך הפתרון האופטימלי הוא $w_i + M(i-1, w-w_i)$.
2. $i \notin O$. במקרה זה O הוא פתרון אופטימלי של בעיית סכומי תת־קבוצות של $\{w_1.\dots,w_{i-1}\}$ שערכם לכל היותר w, ולכן מהנחת האינדוקציה ערך הפתרון האופטימלי הוא $M(i-1,w)$.

מובן שהפתרון האופטימלי הוא המקסימום מבין האפשרויות שלעיל.

הנוסחה שלעיל מגדירה אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב הטבלה, והתשובה לשאלה המקורית היא כמובן $M(n,W)$. שימו לב, זמן הריצה וגודל הזיכרון הנדרש על ידי האלגוריתם הזה הם $\Theta(nW)$. זה אינו חסם פולינומיאלי מפני ש־nW עלול להיות מעריכי במספר הסיביות $O(n\log W)$ הדרושות לייצוג הקלט. אלגוריתמים מסוג זה נקראים "פסאודו־פולינומיאלים".

◀ **תרגיל 6.2**

הריצו את האלגוריתם תכנון דינמי לבעיית סכומי תת־קבוצות על הקלט הזה:

$$n=4, \quad \{w_1=2, w_2=3, w_3=5, w_4=6\},$$

ועבור כל $W \le 16$. מלאו את הטבלה M ופתרו את אוסף הבעיות לעיל. **פתרון בעמ' 107** ▶

להלן בעיה אשר מכלילה את הבעיה של סכומי תת־קבוצות.

בעיה אלגוריתמית: בעיית התרמיל [Knapsack Problem].
הקלט: n פריטים $\{1,\dots,n\}$. לכל פריט i יש משקל $w_i \in \mathbb{N}$ וערך $v_i \in \mathbb{N}$. כמו כן נתון חסם $W \in \mathbb{N}$.
הפלט: תת־קבוצה $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ המקיימת $\sum_{i\in S} w_i \le W$.
המטרה: למקסם את הביטוי $\sum_{i\in S} v_i$.

בעיית סכומי תת־קבוצות היא מקרה פרטי של בעיית התרמיל כאשר $w_i = v_i$.

אפשר לפתור את הבעיה הזאת בעזרת תכנון דינמי הדומה מאוד לאלגוריתם עבור סכומי תת־קבוצות. נגדיר טבלה $M(i,w)$ המחושבת בעזרת הנוסחה הרקורסיבית הזו:

$$M(i,w) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ M(i-1,w) & w_i > w \\ \max\{M(i-1,w), v_i + M(i-1,w-w_i)\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.1}$$

התשובה לבעיית התרמיל היא כמובן $M(n,W)$. הנוסחה לעיל מגדירה אלגוריתם תכנון דינמי שהוא כמעט זהה לאלגוריתם תכנון דינמי לבעיה של סכומי תת־קבוצות.

◀ **תרגיל 6.3**

נוסחה (6.1) מחשבת רק את הערך האופטימלי. הציעו אלגוריתם יעיל שיחשב גם את התת־קבוצה שמשיגה את הערך האופטימלי. **פתרון בעמ' 108** ▶

◀ **תרגיל 6.4**

נבחן מקרה פרטי של בעיית התרמיל, שבו ידוע שכל הערכים v_i מקיימים $v_i \leq 10n^3$. הציעו אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה זאת. הוכיחו את טענותיכם. **פתרון בעמ' 108** ▶

◀ **תרגיל 6.5**

במקום תרמיל אחד היכול לשאת משקל W, נתונים כעת שני תרמילים שיכולים לשאת את המשקלות W_1, ו־W_2 בהתאמה. הציעו אלגוריתמים מבוססי תכנון דינמי לבעיית התרמילים בתנאים האלה:

1. כאשר כל פריט יכול להתחלק בין התרמילים בכל צורה שהיא;
2. כאשר כל פריט חייב להיכנס במלואו לתרמיל אחד.

פתרון בעמ' 110 ▶

6.3 תכנון דינמי על פני מקטעים

קראו בספר את סעיף 6.5

ספר הלימוד בחר להציג את שיטת התכנון הדינמי על פני מקטעים בעזרת בעיה אלגוריתמית מתחום הביולוגיה. למרות ההנחות המפשטות הרבות שהספר מניח כדי לקבל בעיה אלגוריתמית נקייה, הבעיה המתקבלת מכילה כמה פרטים ונושאים טכניים שאינם נחוצים כדי להבין את מהות השיטה. במקום זאת אנו נציג עתה בעיה דומה ברוחה, אך עם פחות פרטים טכניים.

בתוכנות מתמטיות רבות הטקסט מקבל ביטויים מתמטיים המכילים סוגי סוגריים שונים. לדוגמה:

$$(abc\{x\{y[x]z\}\}[math])$$

נתון לנו אם כן טקסט שמכיל, בין היתר, את סוגי הסוגריים האלה: 1. $(\ )$; 2. $[\ ]$; 3. $\{\ \}$; כל סימן פותח מתאזן על ידי סימן סוגר ואפשר ל"סגור" את הביטוי רק כאשר אין בו סוגריים "פתוחים" מסוג כלשהו. לדוגמה: הביטוי '$[\,(\,]\,)$' אינו מאוזן ולכן אינו חוקי. כיוון שכל התווים, למעט הסוגריים, אינם משפיעים על האיזון של הסוגריים, נניח שהמחרוזת מכילה רק סוגריים.

נגדיר כעת פורמלית את התאמות הסוגריים. עבור המחרוזת הזו

$$X = x_1 \ldots x_n \in \{`(`, `[`, `\{`, `)', `]', `\}'\}^*$$

התאמה חוקית היא אוסף של זוגות סדורים

$$\mathcal{M} = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_t,j_t)\}$$

המקיימים את התנאים האלה:

1. לכל $\ell \in \{1,\ldots,t\}$, $1 \leq i_\ell < j_\ell \leq n$.
2. כל $a \in \{1,\ldots,n\}$ מופיע לכל היותר פעם אחת ב־$\mathcal{M}$.
3. לכל $\ell \in \{1,\ldots,t\}$ הזוג (x_{i_ℓ},x_{j_ℓ}) הם זוג סוגריים תואמים, כלומר $x_{i_\ell} \in \{`(`, `[`, `\{`\}$, $x_{j_\ell} \in \{`)`, `]`, `\}`\}$ ואם $x_{i_\ell} = `(`$ אז $x_{j_\ell} = `)`$ וכדומה.

4. ההתאמה היא **למינרית** [laminar], כלומר, לכל $k \neq \ell$ מתקיימת אחת מארבע האפשרויות האלה:
   א. $i_\ell < j_\ell < i_k < j_k$;
   ב. $i_k < j_k < i_\ell < j_\ell$;
   ג. $i_\ell < i_k < j_k < j_\ell$;
   ד. $i_k < i_\ell < j_\ell < j_k$.

לדוגמה, עבור המחרוזת הבאה:

$$\begin{array}{cccccccccccc} (& (& [& [& \{ & \{ & \} & [&) &] &] &) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$

ההתאמה הבאה היא התאמה חוקית:

$$\{(1,12),\ (3,11),\ (6,7),\ (8,10)\}$$

ואילו התווים במקומות 2, 4, 5 ו־9 נשארו ללא בן זוג.

מחרוזת נקראת מאוזנת אם קיימת התאמה חוקית אשר לא משאירה אף איבר במחרוזת ללא בן זוג.

◄ **תרגיל 6.6**

1. תארו אלגוריתם בסיבוכיות זמן לינארית, אשר בודק אם מחרוזת נתונה

$$X \in \{\ `(', `)', `[', `]', `\{', `\}'\ \}^*$$

היא מאוזנת.

2. אם המחרוזת אינה מאוזנת, המשתמשים רוצים לגלות היכן "הסוגר החסר". לצורך זה המערכת צריכה להחזיר התאמה שתכיל מספר מינימלי של תווים שאינם מותאמים. פתחו ונתחו אלגוריתם שיבצע משימה זאת.

פתרון בעמ' 111 ►

6.4 יישור סדרות

קראו בספר את סעיף 6.6

בעיית יישור הסדרות [Sequence Alignment] מוגדרת כדלקמן: בהינתן אלף־בית Σ (שאינו כולל את הסימן "–") ושתי סדרות (מחרוזות) $X, Y \in \Sigma^*$, מוסיפים את הסימן "–" לתוך X ו־Y במקומות שונים, כך שמתקבלות המחרוזות $X' \in (\Sigma \cup \{"\text{–}"\})^*$ ו־$Y' \in (\Sigma \cup \{"\text{–}"\})^*$ (בהתאמה) שהן באותו אורך. פעולה זו היא **פעולת יישור**: קיבלנו שתי מחרוזות באותו אורך ו"יישרנו" (כלומר התאמנו) את התו X'_i ל־Y'_i.

ברצוננו למזער את "עלות היישור" שתוגדר להלן. לצורך כך נגדיר "קנס" $\alpha(a,b)$ עבור התאמה של התו $a \in \Sigma$ לתו $b \in \Sigma$ (בדרך כלל $\alpha(a,a) = 0$), וקנס פער $\delta > 0$ עבור שימוש בריווח, כלומר בתו "–". אפשר לאחד את הקנסות בצורה הזו: בהינתן עלות אי־התאמה בין סמלים $\alpha : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$, וקנס פער $\delta > 0$. נרחיב את עלות האי־התאמה גם לסימן "–":

$$\overline{\alpha} : (\Sigma \cup \{\text{-}\}) \times (\Sigma \cup \{\text{-}\}) \to \mathbb{R},$$

$$\overline{\alpha}(a,b) = \begin{cases} \alpha(a,b) & a \neq \text{-} \text{ and } b \neq \text{-} \\ \delta & \text{otherwise.} \end{cases}$$

בהינתן יישור $X' = x_1x_2\ldots x_n$, $Y' = y_1y_2\ldots y_n$ של שתי סדרות $X, Y \in \Sigma^*$, עלות היישור מוגדרת כך:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}(x_i, y_i).$$

בעיה אלגוריתמית: יישור הסדרות.
הנחות: אלף־בית ידוע ועלויות קבועות לאי־התאמה ולפער.
הקלט: זוג סדרות $X = x_1x_2\ldots x_m$ ו־$Y = y_1y_2\ldots y_n$ ביחס (או מעל) Σ,
הפלט: יישור של הסדרות X ו־Y.
המטרה: מזעור עלות היישור.

קל יחסית לכתוב אלגוריתם תכנון דינמי שיחשב את עלות היישור המינימלית. נגדיר טבלה $A(i,j)$ שתכיל את עלות היישור האופטימלי בין $x_1x_2\ldots x_i$ לבין $y_1y_2\ldots y_j$. אפשר למלא את הטבלה A בעזרת הנוסחה הרקורסיבית הזו:

$$A(i,j) = \begin{cases} i\delta & j = 0 \\ j\delta & i = 0 \\ \min \left\{ \begin{array}{c} \alpha(x_i, y_j) + A(i-1, j-1), \\ \delta + A(i, j-1), \\ \delta + A(i-1, j) \end{array} \right\} & i, j > 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

נוסחה (6.2) מגדירה מיידית את האלגוריתם תכנון דינמי לחישוב $A(i,j)$ ועלות היישור המינימלית של המחרוזות המקוריות היא $A(m,n)$.

נותר להסביר מדוע נוסחה (6.2) באמת מחשבת את העלות המינימלית של היישור בין $x_1x_2\ldots x_i$ לבין $y_1y_2\ldots y_j$. עובדה זאת מוכחת בספר בטענה (6.16), ומבוססת על ההבחנה הבאה (טענה (6.15) בספר): ביישור של X ו־Y תתקיים אחת משלוש אפשרויות: א. התו האחרון ב־X מותאם לתו האחרון ב־Y; ב. התו האחרון ב־X אינו מותאם לאף תו ב־Y; ג. התו האחרון ב־Y אינו מותאם לאף תו ב־X.

נעיר שהאלגוריתם המתקבל ממלא טבלה בגודל $m \times n$ וזמן הריצה שלו הוא $O(mn)$.

◄ **תרגיל 6.7**

שנו את האלגוריתם לחישוב הערך המינימלי של יישור סדרות נתונות באורך m ו־n, כך שגודל הזיכרון שיידרש לו יהיה רק $O(m+n)$. רמז: שימו לב שהאלגוריתם אינו זקוק בו־זמנית לכל הטבלה M.

פתרון בעמ' 112 ►

הערה 6.1. אם ברצוננו למצוא את היישור האופטימלי (ולא רק את ערכו) תוך כדי שימוש בגודל זיכרון לינארי, אזי האלגוריתם שהוצג בתרגיל 6.7 אינו מספק (ודאו שאתם מבינים מדוע תרגיל 6.7 אינו פותר בעיה זו). למרות זאת אפשר לחשב את היישור האופטימלי גם תוך כדי שימוש בגודל זיכרון לינארי. תוכלו לקרוא על כך בסעיף 6.7 בספר, אך סעיף זה אינו חובה בקורס.

מרחק עריכה

נדון כעת בבעיה הקרובה ברוחה לבעיית יישור סדרות – זוהי בעיית חישוב **מרחק העריכה** [Edit distance] בין מחרוזות. מרחק זה הוא מדד למידת השוני בין שתי מחרוזות. הוא מודד את

מספר הפעולות המינימלי מסוג מחיקת תו והוספת תו הדרוש כדי לעבור ממחרוזת אחת לשנייה. משתמשים במרחק העריכה לעתים קרובות כדי להתגבר על טעויות הקלדה באפליקציות מילוניות.

דוגמה 6.1. נראה שמרחק העריכה בין המחרוזת sophisticated למחרוזת phisticats הוא לכל היותר 5; מוחקים את התווים 's' ו־'o' בהתחלת המחרוזת, מוחקים את התווים 'e' ו־'d' בסוף המחרוזת, ומוסיפים את התו 's' בסוף המחרוזת.

פורמלית נגדיר:

הגדרה 6.1 (פעולת מחיקה). המחרוזת $Y \in \Sigma^*$ מתקבלת מהמחרוזת $X = x_1x_2\cdots x_m \in \Sigma^*$ על ידי פעולת מחיקה, אם קיים $i \in \{1,\ldots,n\}$ שעבורו $Y = x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n$.

הגדרה 6.2 (פעולת הוספה). המחרוזת $Y \in \Sigma^*$ מתקבלת מהמחרוזת $X = x_1x_2\cdots x_m \in \Sigma^*$ על ידי פעולת הוספה, אם קיימים אינדקס $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ ואות $z \in \Sigma$ שעבורם מתקיים $Y = x_1x_2\ldots x_izx_{i+1}\ldots x_n$.

הגדרה 6.3 (מרחק עריכה). מרחק העריכה בין המחרוזת $X \in \Sigma^*$ למחרוזת $Y \in \Sigma^*$, הוא המספר המינימלי של פעולות מחיקה והוספה ההופכות את X ל־Y. מרחק זה מסומן ב־$d_{\text{ED}}(X,Y)$.

◀ **תרגיל 6.8**

הוכיחו שמרחק העריכה הוא סימטרי, כלומר מתקיים $d_{\text{ED}}(X,Y) = d_{\text{ED}}(Y,X)$, לכל $X,Y \in \Sigma^*$.
פתרון בעמ' 113 ▶

◀ **תרגיל 6.9**

פתחו אלגוריתם לחישוב מרחק עריכה בין שתי מחרוזות נתונות. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיות זמן הריצה שלו.
פתרון בעמ' 113 ▶

6.5 מסלולים קצרים ביותר בגרף בעל משקלים חיוביים ושליליים

קראו בספר את סעיף 6.8

בפרק 4 למדנו שאלגוריתם דייקסטרה משמש לחישוב מרחקים מצומת נתון בגרף עם משקלות אי־שליליים על הקשתות. בסעיף הזה נבחן בעיה כללית יותר, כאשר מותרות קשתות עם משקלות שליליים. התבוננו באיור 6.12 בספר (שם יש לגרף קשתות שליליות), ותיווכחו כי במקרה כזה האלגוריתם של דייקסטרה לא תמיד עובד; יתרה מזאת, אם יש בגרף מעגל שלילי, אזי לא קיים מרחק קצר ביותר (סופי) בין זוג צמתים על מעגל זה.

כעת נניח כי אין בגרף מעגלים שליליים. תחת הנחה זאת קל לראות שקיימים מסלולים קצרים ביותר שהם פשוטים, ולכן מכילים $|V|-1$ קשתות לכל היותר. עובדות אלה מאפשרות לנו להגדיר אלגוריתם לתכנון דינמי שיחשב את המרחקים הקצרים ביותר מכל הצמתים לצומת נתון t. נגדיר את $\text{OPT}(i,v)$ כאורך המסלול הקצר ביותר מ־v ל־t , המכיל לכל היותר i קשתות. קל להוכיח באינדוקציה על i ש־$\text{OPT}(i,v)$ מקיים את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{aligned}
&\text{OPT}(0,t) = 0\\
&\text{OPT}(0,v) = \infty \quad \text{when } v \neq t\\
&\text{OPT}(i,v) = \min\Big\{\text{OPT}(i-1,v),\ \min_{(v,u)\in E} \text{OPT}(i-1,u) + c(v,u)\Big\}\\
&\qquad\qquad \text{when } i > 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

המרחק הקצר ביותר בין s ל־t הוא כמובן $\mathrm{OPT}(n-1,s)$. אנו נשתמש כאן (וגם בהמשך) בסימן האינסוף ∞ כדי לציין שאין מסלול המקיים את התנאים. באלגוריתמים שנלמד, הפעולות שמתבצעות על מרחקים (שליליים או אי־שליליים) ועל אינסוף, הן: חיבור, מציאת מינימום והשוואה. באופן טבעי, $a+\infty=\infty$, ו־$\min\{a,\infty\}=a$.

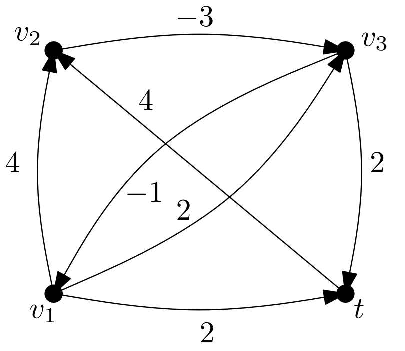
נוסחה (6.3) מובילה ישירות לאלגוריתם לתכנון דינמי. נגדיר טבלה $M(i,v)$ ונמלא אותה על פי (6.3). האלגוריתם המתקבל נקרא אלגוריתם בלמן־פורד, והוא רשום באופן מפורט כאלגוריתם 6.1.

Algorithm **6.1** Bellman-Ford algorithm

Require: Weighted directed graph $G=(V,E,c)$ with n vertices, so that G has no negative cycles.
Require: $t \in V$.
  Initialize $M(0,t) \leftarrow 0$.
  Initialize $M(0,v) \leftarrow \infty$, for every $v \neq t$.
  for $i \leftarrow 1,\dots,n-1$ **do**
    for $v \in V$ **do**
      $M(i,v) \leftarrow \min\big\{M(i-1,v), \min_{u\in V:(v,u)\in E} M(i-1,u)+c(v,u)\big\}$
  return $M(n-1,u) \quad \forall u \in V$

דוגמה 6.2. נריץ את אלגוריתם 6.1 (בלמן־פורד) אל הצומת t על הגרף מאיור 6.2. בצד ימין של איור 6.2 מתוארים ערכי הטבלה $M(i,v)$ כפי שממלא אותה אלגוריתם בלמן־פורד. שימו לב, $M(1,v_2)=\infty$ כיוון שאין קשת מ־v_2 ל־t, ואילו $M(2,v_2)=-1$ מפני שבסבב זה בוצע השיפור $M(1,v_3)+c(v_2,v_3)=2-3$. אבל באותו סבב $M(2,v_3)$ שופר ל־1 ולכן המצב בסבב האחרון הוא:

$$M(3,v_2)=M(2,v_2)+c(v_2,v_3)=1-3=-2.$$



M	v_1	v_2	v_3	t
$i=0$	∞	∞	∞	0
$i=1$	2	∞	2	0
$i=2$	2	-1	1	0
$i=3$	2	-2	1	0

איור 6.2: בצד ימין מוצגת הטבלה $M(i,v)$ כפי שמולאה על ידי אלגוריתם 6.1 שהורץ על הגרף שבצד שמאל.

ניתוח זמן הריצה של אלגוריתם בלמן־פורד. האלגוריתם מבצע לולאה על המשתנים i, ו־v; חישוב פעולת המינימום מתבצע d_v פעמים לכל v (כאשר מייצגים גרפים ברשימת שכנויות). זמן הריצה

שיתקבל בסך הכול יהיה:

$$O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in V} d_v\right) = O(nm),$$

כאשר n הוא מספר הצמתים בגרף ו־m הוא מספר הקשתות בגרף.

◄ תרגיל 6.10

בהינתן גרף ממושקל $G = (V, E, c)$ ללא מעגלים שליליים וצומת $s \in V$, כתבו אלגוריתם שימצא את המרחקים מצומת $s \in V$ לכל שאר הצמתים בגרף. **פתרון בעמ' 114 ►**

אלגוריתם חוסך־מקום. כמו במקרים קודמים, כדי לחשב את המסלולים הקצרים ביותר, אין צורך לשמור מפורשות את כל טבלה M. נבחין כי בשלב i האלגוריתם פונה רק לכניסות $(i-1,k)$ ו־(i,k) בטבלה M עבור $k \in \{1,\ldots,n\}$, לכן מספיק לשמור בכל רגע נתון רק את שתי השורות האחרונות ב־M. לאמיתו של דבר אפשר לפשט אף יותר – התבוננו באלגוריתם 6.2; גם הוא מחשב מרחקים קצרים ביותר.

Algorithm **6.2** Space efficient Bellman-Ford

Require: Weighted directed graph $G = (V, W, c)$ with n vertices, so that G has no negative cycles.

Require: $t \in V$.

  Initialize $M(t) \leftarrow 0$.
  Initialize $M(v) \leftarrow \infty$, for every $v \neq t$.
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$ do
    for $v \in V$ do
      for $u \in V$, $(v, u) \in E$ do
        $M(v) \leftarrow \min\{M(v), M(u) + c(v, u)\}$
  return $M(s)$ for every $s \in V$

דוגמה 6.3. באיור 6.3 אנו מריצים על הגרף (בצד שמאל) את אלגוריתם 6.2. באיור 6.2 הרצנו על אותו גרף את אלגוריתם 6.1. בריצת אלגוריתם 6.1 התקבל הערך $M(2, v_2) = -1$, בעוד שבריצת אלגוריתם 6.2, כאשר $i = 2$, התקבל הערך $M(v_2) = -2$. הסיבה לכך היא שבזמן ביצוע הלולאה $i = 2$ באלגוריתם 6.2, $M(v_3)$ ירד ל־1 ומייד לאחר מכן, בעדכון של v_2 , ירד ערכו של $M(v_2)$ ל־-2. אלגוריתם 6.1, לעומת זאת, מעדכן את $M(2, v_2)$ בעזרת $M(1, v_3)$ שנשאר 2. שימו לב: ערכי הטבלה M בזמן הריצה של אלגוריתם 6.2, רגישים לסדר שבו אנו עוברים על הצמתים (בניגוד לריצת אלגוריתם 6.1), ולכן בדוגמה המובאת באיור 6.3 קבענו שמקומו של v_3 לפני v_2 בסדר עדכון הצמתים.

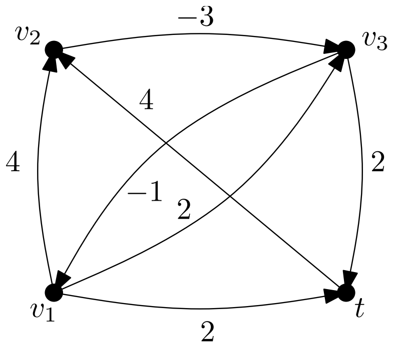
◄ תרגיל 6.11

הוכיחו כי אלגוריתם 6.2 מחשב את המרחקים מכל הצמתים אל הצומת t. **פתרון בעמ' 115 ►**

◄ תרגיל 6.12

הוכיחו שאם קיים $\ell \leq n-1$ כך ש־$M_{\ell-1}(v) = M_\ell(v)$ לכל $v \in V$, אזי לכל $v \in V$, המרחק הקצר ביותר מ־v ל־t הוא $M_\ell(v)$. **פתרון בעמ' 115 ►**

תרגיל 6.12 מציע שיפור פרקטי לאלגוריתם 6.2: אין צורך להריץ את הלולאה על i עד $n-1$, מספיק לבדוק שהמערך M לא השתנה כלל במשך ביצוע איטרציה אחת של הלולאה על i.



M	t	v_3	v_2	v_1
$i=0$	0	∞	∞	∞
$i=1$	0	2	-1	2
$i=2$	0	1	-2	2
$i=3$	0	1	-2	2

איור 6.3: בצד ימין מוצגת הטבלה $M(v)$ כפי שמולאה על ידי אלגוריתם 6.2 שהורץ על הגרף שבצד שמאל. אנו מניחים שהצמתים הנסרקים על ידי האלגוריתם נרשמים בטבלה משמאל לימין.

חישוב מסלולים קצרים ביותר. נדון עתה בשאלה כיצד נוכל לשמור גם את המסלולים הקצרים ביותר ל־t באלגוריתם 6.2 (בלמן־פורד החוסך־מקום). בפרק 4 ראינו כבר כיצד מייצגים מסלולים קצרים ביותר לצומת נתון t: בעזרת תת־גרף מכוון שגרף התשתית שלו (כאשר מתעלמים מכיווני הקשתות) הינו עץ מושרש ששורשו הוא t. כמו כן כיווני הקשתות (בגרף המקורי) הם מבן לאב. כדי לתחזק עץ כזה מספיק שכל צומת $u \in V \setminus \{t\}$ יצביע על $S(u)$ – הצומת העוקב במסלול קצר ביותר מ־u ל־t (שהוא אביו בעץ שהוגדר לעיל). עובדות אלו נכונות גם בגרף עם משקלות שלמים (חיובים או שליליים) – כל עוד אין מעגלים שליליים. הסיבה (שכבר ראינו) היא שאם

$$u = u_0, u_1, \ldots, u_k = t$$

הוא מסלול קצר ביותר מ־u ל־t, אזי בהכרח

$$u_1, \ldots, u_k = t$$

הוא מסלול קצר ביותר מ־u_1 ל־t. אחרת, לו היה מסלול קצר יותר מ־u_1 ל־t, היינו יכולים להשתמש בו כדי לקבל מסלול קצר יותר מ־u ל־t. משמעות הדבר שהסדרה

$$u,\ u_1 = S(u),\ u_2 = S(u_1), \ldots$$

תיעצר ב־t ושהמסלול שיתקבל יהיה המסלול הקצר ביותר מ־u ל־t.

כעת נוכל להתאים את אלגוריתם 6.2 (בלמן־פורד החוסך־מקום) כך שיחשב גם את פונקציית העוקב $S(\cdot)$ עבור כל צומת שאיננו t. התוצאה היא אלגוריתם 6.3.

לצורך הוכחת הנכונות של אלגוריתם 6.3 מספיק לטעון את הטענה הבאה:

טענה 6.1. בכל שלב במהלך אלגוריתם 6.3 ולכל $v \in V$, אם $M(v) < \infty$ אזי קיים מסלול מ־v ל־t שאורכו $M(v)$ והצומת השני בו הוא $S(v)$.

הוכחה. החלק הראשון של הטענה (קיום מסלול שאורכו $M(v)$) הוכח למעשה בפתרון של תרגיל 6.11. נחזור כאן על הוכחת הטענה, וההוכחה היא באינדוקציה על מספר הפעמים שהפקודה **if** מתבצעת. לאחר האתחול של M ו־S הטענה האינדוקטיבית נכונה בבירור. כאשר הפעולה **if** מתבצעת, משמעות הדבר היא שקיים צומת u והעדכונים האלה מתבצעים:

$$S(v) \leftarrow u, \quad M(v) \leftarrow M(u) + c(v,u)$$

ונשמר התנאי האינדוקטיבי על S. ∎

Algorithm 6.3 Bellman-Ford with shortest paths

Require: Weighted directed graph $G = (V, W, c)$ with n vertices, so that G has no negative cycles.
Require: $t \in V$.
Initialize $M(t) \leftarrow 0$.
Initialize $M(v) \leftarrow \infty$, for every $v \neq t$.
Initialize $S(v) \leftarrow$nil, for every $v \in V$
for $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$ do
  for $v \in V$ do
    for $u \in V$, $(v, u) \in E$ do
      if $M(v) > M(u) + c(v, u)$ then
        $M(v) \leftarrow M(u) + c(v, u)$
        $S(v) \leftarrow u$
return M and S

.

בתרגיל 6.11 כבר טענו כי בסיום ריצת האלגוריתם, $M(v)$ הוא המרחק הקצר ביותר, לכן נוכל להסיק מן הטענה שלעיל כי בסיום ריצת האלגוריתם, $S(v)$ מכיל את הצומת העוקב ל־v במסלול הקצר ביותר מ־v ל־t.

6.6 מסלולים קצרים בין כל זוגות הצמתים

נדון עתה בבעיית מציאת המרחקים הקצרים ביותר בין כל הזוגות בגרף מכוון וממושקל אבל ללא מעגלים שליליים. פורמלית:

בעיה אלגוריתמית: מציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל זוגות הצמתים [All-pairs shortest paths].

הקלט: גרף מכוון וממושקל (כולל משקלים שליליים) $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E, c)$ ללא מעגלים שליליים.

הפלט: מטריצת המרחקים M, אשר בה הכניסה M_{ij} מכילה את המרחק מ־v_i ל־v_j.

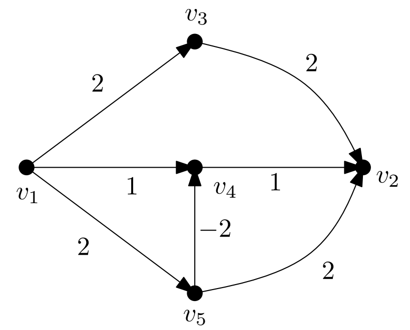
ניתן כמובן להריץ את אלגוריתם בלמן־פורד עבור כל צומת בגרף. כיוון שכל הרצה של בלמן־פורד חסומה בזמן $O(nm)$ וכיוון שיש n צמתים בגרף, סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם זה היא $O(n^2m)$. בסעיף זה נתוודע לאלגוריתמים יעילים יותר אסימפטוטית כפונקציה של m ו־n.

אלגוריתם פלויד־וורשאל [Floyd–Warshall] למציאת המרחקים בין כל זוגות הצמתים מבוסס על תכנון דינמי שונה מזה שראינו באלגוריתם בלמן־פורד. לשם הנוחות נניח שצומתי הגרף ממוספרים, כלומר $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. עבור מסלול פשוט (כלומר שאף צומת בו לא מופיע יותר מפעם אחת) $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{\ell-1}}, v_{i_\ell})$ אנו נקרא לצמתים $v_{i_2}, \ldots, v_{i_{\ell-1}}$ **צמתים פנימיים**; ולצמתים v_{i_1}, v_{i_ℓ}, **קצוות המסלול**.

עתה נגדיר $\mathrm{OPT}(i, j, k)$ כאורך המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים מ־v_i ל־v_j שכל צומתיהם הפנימיים שייכים לתת־הקבוצה $\{v_1, \ldots, v_k\}$. לדוגמה, באיור 6.4,

$$\mathrm{OPT}(1,2,0) = \mathrm{OPT}(1,2,1) = \mathrm{OPT}(1,2,2) = \infty,$$

כיוון שאין מסלול מ־v_1 ל־v_2 שאיננו מכיל בחלקו הפנימי אף צומת למעט v_1 או v_2 (כלומר אין קשת מ־v_1 ל־v_2). לעומת זאת, $\mathrm{OPT}(1,2,3) = 4$ כיוון שיש מסלול יחיד – (v_1, v_3, v_2) – מ־v_1 ל־v_2 העובר רק דרך $\{v_1, v_2, v_3\}$. כמו כן $\mathrm{OPT}(1,2,4) = 2$ בעזרת המסלול (v_1, v_4, v_2) שמשקלו הוא 2. לבסוף $\mathrm{OPT}(1,2,5) = 1$ בזכות המסלול (v_1, v_5, v_4, v_2) שמשקלו 1.



איור 6.4: דוגמת גרף לצורך הרצת אלגוריתם פלויד־וורשאל

היתרון של הביטוי $\mathrm{OPT}(i,j,k)$ הוא שניתן לחשבו בקלות יחסית בעזרת $\mathrm{OPT}(i',j',k-1)$ בעזרת ההבחנה הבאה: במסלול הקצר ביותר מ־v_i ל־v_j שכל צמתיו הפנימיים הם מ־$v_1, \ldots, v_k$ מתקיים אחד מן השניים: או ש־v_k איננו צומת פנימי, או שהוא כן צומת פנימי במסלול זה. במקרה הראשון, המסלול הינו גם מסלול קצר ביותר מ־v_i ל־v_j שכל צמתיו הפנימיים הם מ־$v_1, \ldots, v_{k-1}$, ומהנחת האינדוקציה זה $\mathrm{OPT}(i,j,k-1)$. במקרה השני, כיוון שהמסלול פשוט, v_k מופיע בו רק פעם אחת, ולכן ניתן לפרקו לשני תתי־מסלולים – מ־v_1 ל־v_k, ומ־v_k ל־v_j. בתתי־ מסלולים אלו v_k איננו מופיע כצומת פנימי ולכן סכום אורכיהם הוא $\mathrm{OPT}(i,k,k-1) + \mathrm{OPT}(k,j,k-1)$. פורמלית, נוכיח:

טענה 6.2.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{OPT}(i,i,0) = 0 && \\
&\mathrm{OPT}(i,j,0) = c(v_i, v_j) && (v_i, v_j) \in E \\
&\mathrm{OPT}(i,j,0) = \infty && (v_i, v_j) \notin E \\
&\mathrm{OPT}(i,j,k) = \min\big\{\mathrm{OPT}(i,j,k-1), && k > 0 \\
&\qquad\qquad \mathrm{OPT}(i,k,k-1) + \mathrm{OPT}(k,j,k-1)\big\} &&
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

הוכחה. ההוכחה תהיה באופן טבעי באינדוקציה על k. עבור $k = 0$, מסלול בין v_i ל־v_j שאינו עובר באף צומת אחר, יכול להיות רק קשת, לכן אם אין קשת בין v_i ל־v_j, לא קיים מסלול כזה (עלות אינסופית), ואם יש קשת כזאת – היא המסלול ועלותה היא עלות המסלול.

עבור $k > 0$, יהי P מסלול פשוט, שהוא המסלול הקצר ביותר בין v_i ל־v_j שכל צמתיו הפנימיים שייכים לקבוצה $\{v_1, \ldots, v_k\}$. ייתכנו שני מקרים:

- המסלול P אינו מכיל את הצומת v_k. במקרה זה כל צמתיו הפנימיים שייכים לקבוצה $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ ולפי הנחת האינדוקציה, אורכו $\mathrm{OPT}(i,j,k-1)$.
- המסלול P מכיל את הצומת v_k. כיוון ש־P הוא מסלול פשוט, הוא עובר דרך v_k רק פעם אחת, ואפשר לפרק אותו לשני מסלולים: מסלול P_1 מ־v_i ל־v_k, ומסלול P_2 מ־v_k ל־v_j. הצמתים הפנימיים של P_1 הם קבוצה חלקית של $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. לכן P_1 הוא המסלול הקצר ביותר מבין המסלולים המובילים מ־v_i ל־v_k שצומתיהם הפנימיים מוכלים

ב־$\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$. אילו היה קיים מסלול P_1' קצר יותר, הייתה אפשרות להחליף את P_1 ב־P_1' במסלול P, ולקבל מסלול P' מ־v_i ל־v_j, קצר יותר מ־P העובר רק דרך הצמתים $\{v_1,\ldots,v_k\}$, בניגוד לאופטימליות של P. מהנחת האינדוקציה אנו יודעים כי אורכו של P_1 הוא $\mathrm{OPT}(i,k,k-1)$. באופן דומה, אורכו של P_2 הוא $\mathrm{OPT}(k,j,k-1)$. לכן אורכו של P, שהוא סכום אורכי P_1 ו P_2,יהיה:

$$\mathrm{OPT}(i,k,k-1)+\mathrm{OPT}(k,j,k-1).$$

■

נוסחה (6.4) מגדירה ישירות את האלגוריתם לתכנון דינמי שאנו מפרטים באלגוריתם 6.4.

Algorithm 6.4 Floyd–Warshall

Require: Weighted graph $G=(\{1,\ldots,n\},E,c)$ without negative cycles.
  Initialize $M(i,j,0)\leftarrow c(v_i,v_j)$ if $(v_i,v_j)\in E$
  Initialize $M(i,j,0)\leftarrow \infty$ if $(v_i,v_j)\notin E$
  Initialize $M(i,i,0)\leftarrow 0$
  for $k\leftarrow 1,\ldots,n$ do
    for $i\leftarrow 1,\ldots,n$ do
      for $j\leftarrow 1,\ldots,n$ do
        $M(i,j,k)\leftarrow \min\{M(i,j,k-1),M(i,k,k-1)+M(k,j,k-1)\}$.
  return $M(i,j,n)$ for every $i,j\in\{1,\ldots,n\}$.

דוגמה 6.4. באיור 6.5 מודגמת הריצה של אלגוריתם פלויד־וורשאל על הגרף שבאיור. הטבלה $M(i,j,0)$ היא למעשה מטריצת השכנויות של הגרף (עם '0' על האלכסון ו־'∞' כאשר אין קשת).

טענה 6.3. אלגוריתם פלויד־וורשאל מחשב מרחקים בין כל זוגות הצמתים בגרף ממושקל בעל n צמתים, ללא מעגלים שליליים. זמן הריצה שלו הוא $O(n^3)$.

הוכחה. נכונות האלגוריתם נובעת ישירות מנוסחה (6.4). זמן הריצה נשלט על ידי ביצוע שלוש לולאות מקוננות, כל אחת באורך n, ולכן הוא נמשך $O(n^3)$. ■

◄ תרגיל 6.13

גודל הזיכרון הדרוש לאלגוריתם 6.4 הוא $\Theta(n^3)$. כתבו אלגוריתם דומה שיספיק לו גודל זיכרון $O(n^2)$.

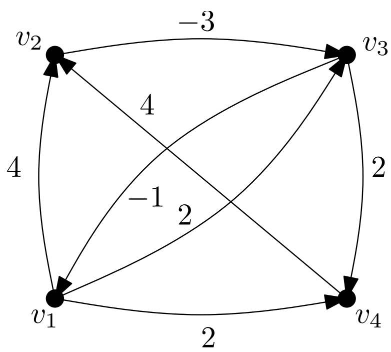
פתרון בעמ' 115 ►

◄ תרגיל 6.14

ברצוננו למצוא כעת את המסלולים הקצרים ביותר בין כל זוג צמתים.

1. הגדירו ייצוג של מסלולים קצרים ביותר שדרוש לו גודל זיכרון $O(n^2)$, ובהינתן זוג צמתים הוא מאפשר להחזיר מסלול קצר ביותר בין הצמתים בזמן $O(\ell)$, כאשר ℓ הוא מספר הצמתים במסלול המדוות.
2. שנו את האלגוריתם שכתבתם בתרגיל 6.13, כך שבהינתן הנתונים הרשומים לעיל (בסעיף 1), הוא יחזיר את ייצוג המסלולים הקצרים ביותר.

פתרון בעמ' 115 ►



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	4	2	2
v_2	∞	0	-3	∞
v_3	-1	∞	0	2
v_4	∞	4	∞	0

$M(i,j,0)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	4	2	2
v_2	∞	0	-3	∞
v_3	-1	3	0	1
v_4	∞	4	∞	0

$M(i,j,1)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	4	1	2
v_2	∞	0	-3	∞
v_3	-1	3	0	1
v_4	∞	4	1	0

$M(i,j,2)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	4	1	2
v_2	-4	0	-3	-2
v_3	-1	3	0	1
v_4	0	4	1	0

$M(i,j,3)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	4	1	2
v_2	-4	0	-3	-2
v_3	-1	3	0	1
v_4	0	4	1	0

$M(i,j,4)$

איור 6.5: הטבלה $M(i,j,k)$ כפי שמולאה על ידי אלגוריתם 6.4 שהורץ על הגרף המוצג מעליה.

◄ **תרגיל 6.15** האלגוריתם של ג'ונסון (תרגיל רשות)
בתרגיל זה נפתח אלגוריתם אחר לחישוב המרחקים בין כל הצמתים בגרף ממושקל ללא מעגלים שליליים, שיהיה יותר יעיל אסימפטוטית מפלויד-וורשאל בגרפים דלילים. יהי $G=(V,E,c)$ גרף מכוון, ממושקל, עם משקלות שלמים וללא מעגלים שליליים.

1. נניח שנתונה על הצמתים הפונקציה $h: V \to \mathbb{R}$ (הנקראת "פונקציית גובה"). נגדיר משקלות חדשים $\bar{c}: E \to \mathbb{R}$ על הקשתות כך: $\bar{c}(u,v) = c(u,v) + h(u) - h(v)$. בהינתן המרחקים הקצרים ביותר ב־$\overline{G} = (V,E,\bar{c})$ ופונקציית הגובה h, הראו כיצד אפשר לחשב ביעילות את המרחקים הקצרים ביותר ב־G.
2. נוסיף כעת ל־G צומת חדש q ונחבר אותו לכל הצמתים המקוריים של G בקשתות יוצאות שמשקלן 0. עבור $v \in V$ נגדיר את $h(v)$ כמרחק הקצר ביותר מ־q ל־v בגרף החדש שנוצר. הוכיחו שהמשקלות החדשים $\bar{c}$ הם אי־שליליים כאשר משתמשים בפונקציית הגובה h.
3. השתמשו בסעיפים הקודמים של תרגיל זה כדי לפתח אלגוריתם לחישוב המרחקים בין כל זוגות הצמתים בגרף G, ללא מעגלים שליליים, עם סיבוכיות זמן $O(mn\log n)$. **רמז:** השתמשו באלגוריתם של בלמן־פורד ושל דייקסטרה.

פתרון בעמ' 116 ►

אלגוריתם	פרק	מרחקים מ...	ממושקלים?	זמן	מקום
סריקה־לרוחב	3	מצומת נתון	לא	$m+n$	$m+n$
דייקסטרה	4	″	טבעיים	$(m+n)\log n$	$m+n$
בלמן־פורד	6	″	שלמים	mn	$m+n$
פלויד־וורשאל	6	בין כל הזוגות	″	n^3	n^2
ג׳ונסון	6	″	″	$mn\log n$	n^2

טבלה 6.1: אלגוריתמים למציאת מרחקים קצרים ביותר בגרפים שנלמדו בקורס. סיבוכיות הזמן מבוטאת עד כדי סדר גודל. לאלגוריתם דייקסטרה יש מימוש יעיל יותר עם סיבוכיות זמן של $O(m+n\log n)$.

6.7 סיכום

תכנון דינמי הוא שיטה אלגוריתמית שימושית. בספר ובמדריך הוצגו דוגמאות רבות מתחומים מגוונים: הצברה, דמיון מחרוזות, מרחקים בגרפים עם משקלים שליליים ועוד. סביר שתתקלו בדוגמאות נוספות בהמשך לימודיכם.

כאן המקום לסכם את האלגוריתמים השונים לחישוב מרחקים בגרפים שנלמדו בקורס זה. טבלה 6.1 מסכמת את תכונותיהם העיקריות.

6.8 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 6.1 (מעמוד 92)
נכתוב אלגוריתם תכנון דינמי בשיטה האיטרטיבית. נניח שהמקטעים $I_1 = [s_1, f_1), \dots, [s_n, f_n)$ מסודרים בסדר לא יורד של זמני סיום – $f_i \le f_{i+1}$. האלגוריתם יחשב מערך $M(i)$ אשר מכיל את הערך המרבי שניתן להשיג מתת־קבוצה של המקטעים $S \subseteq \{I_1, \dots, I_i\}$ כך ש־$I_i \in S$.
לצורך חישוב $M(\cdot)$ אנו גם נזדקק לפונקציה

$$p(i) = \max\{k : \ 0 \le k < j \text{ and } f_k \le s_i\},$$

אשר מתאימה למקטע I_i את המקטע שמסתיים מאוחר ביותר מבין המקטעים שמסתיימים לפני תחילת I_i.
עתה ניתן לחשב אינדוקטיבית את $M(i)$ כדלקמן: מחשבים את המקסימום על פני כל $M(j)$ על פני כל האינדקסים j כך ש־$j < i$ ושאינם חותכים את I_i, כלומר $j \le p(i)$. לזה מוסיפים את הערך של המקטע I_i.

Algorithm 6.5 Inefficient-DP($I_1 = [s_1, f_1), \dots, I_n = (s_n, f_n)$)

Require: $f_i \le f_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$
Require: $p(i) = \max\{k : \ 0 \le k < j \text{ and } f_k \le s_i\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
  $M(0) \leftarrow 0$
  for $i = 1, \dots, n$ do
    $M(i) \leftarrow \max\{M(j) : \ j \le p(i)\} + v_i$
  return $\max_i M(i)$

נשים לב שסיבוכיות הזמן של אלגוריתם 6.5 היא $O(n^2)$, בניגוד לסיבוכיות הלינארית של אלגוריתם התכנון הדינמי המתואר בספר. קל להוכיח את נכונות האלגוריתם באינדוקציה על j, ולכן לא נתאר אותה כאן.
נסיים בתיאור האלגוריתם לחישוב הפונקציה p, ללא הוכחת נכונות. נניח שוב כי $I_1, I_2, \dots, I_n$ מסודרים לפי זמן סיום עולה. נניח גם כי נתונה הפרמוטציה $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ כך שהמקטעים $I_{\pi(1)}, I_{\pi(2)}, \dots, I_{\pi(n)}$ מסודרים לפי זמן התחלה עולה. שימו לב שאת שני הסדרים הללו ניתן לחשב בקלות בעזרת מיון בזמן $O(n \log n)$.
עתה האלגוריתם הוא כדלקמן:

Algorithm 6.6 Compute-$p(I_1 = [s_1, f_1), \ldots, I_n = (s_n, f_n))$

```
Require: f_i ≤ f_{i+1}, ∀i ∈ {1,...,n−1}
Require: s_{π(i)} ≤ s_{π(i+1)}, ∀i ∈ {1,...,n−1}
  p(π(1)) ← 0
  i ← 2
  j ← 1
  while i ≤ n do
      if s_{π(i)} < f_j then
          i ← i + 1
      else
          p(π(i)) ← j
          j ← j + 1
  return p
```

פתרון תרגיל 6.2 (מעמוד 93)

שימו לב, אלגוריתם התכנון הדינמי עבור הערך $W = W_0$ פותר למעשה את בעיית סכומי התת־קבוצות לכל $W \leq W_0$. מילוי הטבלה M מתבצע כדלקמן:

- $M(0, w) = 0$
- $M(1,0) = M(1,1) = 0$, ועבור $w \geq 2$, מתקיים

$$M(1, w) = \max\{0, 2 + 0\} = 2$$

- $M(2,w) = M(1,w)$, עבור $w_2 = 3 > w$.

$$M(2,3) = \max\{M(1,3), 3 + M(1,0)\} = 3$$

ובאופן דומה עבור $M(2,4)$. עבור $w > 4$,

$$M(2,w) = 3 + M(1, w-3) = 3 + 2 = 5.$$

- עבור $w < 5$, $M(3,w) = M(2,w)$. $M(3,5) = \max\{5, 0+5\} = 5$. עבור $w > 5$,

$$M(3,w) = \max\{5, 5 + M(2, w-5)\} = 5 + M(2, w-5).$$

לסיכום, הנה הטבלה M

$i \setminus w$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	0	0	2	3	3	5	5	7	8	8	10	10	10	10	10	10	10
4	0	0	2	3	3	5	6	7	8	9	10	11	11	13	14	14	16

הפתרונות עבור $W \leq 16$ מוצגים בשורה האחרונה בטבלה.

פתרון תרגיל 6.3 (מעמוד 94)

החישוב ייעשה באופן זהה לחישוב הסכומים של התת־קבוצות, ונחזור עליו כאן: דרך ראשונה (פחות יעילה) היא להחזיק, בנוסף לטבלת הערכים $M(i,w)$, גם את טבלת התת־קבוצות $S(i,w)$ שתכיל את התת־קבוצה המשיגה את $M(i,w)$. האלגוריתם המתקבל הוא:

Algorithm 6.7 Compute the knapsack ver. I

Require: weights $(w_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, and values $(v_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$.
  Initialize $M(0,w) \leftarrow 0$; $S(0,w) \leftarrow \emptyset$
  for $i \leftarrow 1,\dots,n$ **do**
    for $w \leftarrow 0,\dots,W$ **do**
      if $w_i > w$ **then**
        $M(i,w) \leftarrow M(i-1,w)$
        $S(i,w) \leftarrow S(i-1,w)$
      else
        if $M(i-1,w) \le v_i + M(i-1,w-w_i)$ **then**
          $M(i,w) \leftarrow M(i-1,w)$
          $S(i,w) \leftarrow S(i-1,w)$.
        else
          $M(i,w) \leftarrow v_i + M(i-1,w-w_i)$
          $S(i,w) \leftarrow S(i-1,w-w_i) \cup \{i\}$
  return $S(n,W)$

חסרונו של הפתרון שקיבלנו לעיל הוא הגדלת הזיכרון וזמן הריצה ל־$O(n^2W)$ (שימו לב שפעולת העתקה של קבוצות עלולה לקחת $O(n)$). אפשר לשפר זאת על ידי שמירה על התת־קבוצות S בצורה עקיפה, כדלקמן: לכל כניסה (i,w) בטבלה M, נחזיק גם את הכניסה $(i-1,w')$ שנעזרנו בה לעדכון הכניסה (i,w). כלומר $w'=w$ כאשר i אינו חלק מהפתרון, ו־$w'=w-w_i$ כאשר i הוא חלק מהפתרון. נוכל לשפר במקצת את הפתרון הזה אם נשים לב שבזוג $(i-1,w')$ הערך של $i-1$ ידוע מההקשר, ולכן מספיק לזכור את w'. נבנה טבלה $P(i,w)$ שתשמור את הערכים האלה. התוצאה היא אלגוריתם 6.8, שסיבוכיות גודל הזיכרון וזמן הריצה שלו הם $O(nW)$.

פתרון תרגיל 6.4 (מעמוד 94)

לפני שניגש לפתרון התרגיל הנתון, נניח לרגע שהחסם $w_i \le 10n^3$ נתון על w_i במקום על v_i. במקרה זה אנו טוענים שהאלגוריתם המממש את (6.1) הוא פולינומיאלי. ואמנם, עבור $W \ge 10n^4$ הבעיה היא קלה מאוד, כי אז $W \ge \sum_i w_i$ וניתן לקחת את כל הפריטים. לכן אנו יכולים להניח ש־$W \le 10n^4$, ואז זמן הריצה הוא $O(nW)=O(10n^5)$. הנקודה החשובה פה היא שעל הערכים v_i אנו מבצעים חישובים (כגון חיבור ומקסימום) שהינם פולינומיאליים במספר הסיביות.

כעת נחזור לתרגיל המקורי. כדי לכתוב אלגוריתם עם סיבוכיות זמן פולינומיאלית עבור חסם פולינומיאלי על v_i, עלינו לכתוב תכנון דינמי שיחשב את $\text{Weight OPT}(i,v)$ המוגדר כך:

$$\text{Weight OPT}(i,v) = \min\left\{\sum_{j\in S} w_j \;:\; S\subseteq\{1,\dots,i\},\quad \sum_{j\in S} v_j = v\right\}.$$

כלומר $\text{Weight OPT}_{\mathcal{W}}(i,v)$ הוא המשקל המינימלי של תת־קבוצה $S\subseteq\{1,\dots,i\}$ שעֶרכּה הוא v. לשם הנוחות נניח שערך זה הוא ∞ אם אין תת־קבוצה כזאת, כלומר $\min\emptyset=\infty$. שימו

Algorithm 6.8 Compute the knapsack ver. II

Require: weights $(w_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, and values $(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$.
```
Initialize M(0, w) ← 0;
for i ← 1, ..., n do
  for w ← 0, ..., W do
    if w_i > w then
      M(i, w) ← M(i − 1, w); P(i, w) ← w.
    else
      if M(i − 1, w) ≤ v_i + M(i − 1, w − w_i) then
        M(i, w) ← M(i − 1, w); P(i, w) ← w.
      else
        M(i, w) ← v_i + M(i − 1, w − w_i); P(i, w) ← w − w_i.
S ← ∅
w ← W
for i ← n downto 1 do
  if P(i, w) < w then
    S ← S ∪ {i}
  w ← P(i, w)
return S
```

לב, בהינתן $\text{Weight OPT}(n,v)$ לכל $v \le 10n^4$, אנו יכולים לפתור את בעיית התרמיל על ידי החזרת הערך v הגדול ביותר עבור $\text{Weight OPT}(n,v) \le W$.

נציג כעת נוסחה רקורסיבית לחישוב $\text{Weight OPT}(i,v)$ שתוביל לאלגוריתם תכנון דינמי.

$$\text{Weight OPT}(i,v) = \begin{cases} 0 & i=v=0 \\ \infty & v>i=0 \\ \text{Weight OPT}(i-1,v) & v_i > v. \end{cases}$$

When $i > 0$ and $v_i \le v$,

$$\text{Weight OPT}(i,v) = \min\{\text{Weight OPT}(i-1,v), w_i + \text{Weight OPT}(i-1,v-v_i)\}. \tag{6.5}$$

הוכחת (6.5) דומה מאוד להוכחת הנכונות של נוסחה (6.1), ולכן נתארה פה בקיצור. זו הוכחה באינדוקציה על i. תהי $S \subseteq \{1,\ldots,i\}$ עם ערך v, ומשקל $\text{Weight OPT}(i,v)$.

- כאשר $i=0$, הערך היחיד שתת־קבוצה של $\emptyset$ יכולה להשיג הוא 0 (במשקל 0).
- כאשר $0<i$, ו־$v<v_i$, אזי ברור ש־$S \not\ni i$ ולכן $S \subseteq \{1,\ldots,i-1\}$, ולכן משקל S הוא $\text{Weight OPT}(i-1,v)$.
- כאשר $0<i$ וגם $v \ge v_i$ יש שתי אפשרויות:
  - $i \notin S$, ואז כמו בסעיף הקודם, משקלה של S הוא $\text{Weight OPT}(i-1v)$.
  - $i \in S$. במקרה זה, ערכה של $S \setminus \{i\}$ הוא $v-v_i$, ול־$S \setminus \{i\}$ משקל מינימלי מבין התת־קבוצות של $\{1,\ldots,i-1\}$ שערכן $v-v_i$, ולכן משקלה של S הוא $w_i + \text{Weight OPT}(i-1,v-v_i)$.

  כיוון שאנו מחפשים משקל מינימלי, המשקל המתקבל הוא המינימום בין שתי האפשרויות לעיל.

נוסחה (6.5) בתוספת ההבחנה שהערך המרבי בבעיה הנתונה אינו יכול לעבור את $10n^4$, מובילה ישירות לאלגוריתם תכנון דינמי לבעיית התרמיל, המתואר כאלגוריתם 6.9. זמן הריצה שלו הוא

בבירור $O(n^5)$.

Algorithm 6.9 Alternative Knapsack$(n, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n, W)$

Require: $v_i \leq 10n^3$
  $M(0,0) \leftarrow 0.$
  $M(0,v) \leftarrow \infty$ for every $i \in \{1, \ldots, 10n^4\}$.
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ do
    for $v \in 0, 1 \ldots, 10n^4$ do
      if $v_i > v$ then
        $M(i,v) \leftarrow M(i-1,v)$
      else
        $M(i,v) \leftarrow \min\{M(i-1,v), w_i + M(i-1, v-v_i)\}$
  return $\max\{v : \; M(n,v) \leq W\}$

פתרון תרגיל 6.5 (מעמוד 94)

הבעיה בסעיף הראשון שקולה לבעיית התרמיל, עם תרמיל אחד שיכול לשאת משקל $W_1 + W_2$.

הבעיה בסעיף השני מעניינת יותר. יהי $\mathrm{OPT}(i,w,x)$ הערך המרבי של פריטים מתוך $\{1, \ldots, i\}$ שאפשר לסחוב בשני התרמילים, כך שבתרמיל הראשון המשקל לא יעלה על w ובתרמיל השני המשקל לא יעלה על x. אזי מתקיימת הנוסחה הרקורסיבית הזו:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{OPT}(0,w,x) = 0 && \forall\, w,x \\
&\mathrm{OPT}(i,w,x) = \mathrm{OPT}(i-1,w,x) && \text{if } w_i > \max\{w,x\} \\
&\mathrm{OPT}(i,w,x) = \max\left\{\begin{matrix} \mathrm{OPT}(i-1,w,x), \\ v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w-w_i,x) \end{matrix}\right\} && \text{if } w \geq w_i > x \\
&\mathrm{OPT}(i,w,x) = \max\left\{\begin{matrix} \mathrm{OPT}(i-1,w,x), \\ v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w,x-w_i) \end{matrix}\right\} && \text{if } x \geq w_i > w \\
&\mathrm{OPT}(i,w,x) = \max\left\{\begin{matrix} \mathrm{OPT}(i-1,w,x), \\ v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w-w_i,x), \\ v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w,x-w_i) \end{matrix}\right\} && \text{if } \min\{x,w\} \geq w_i
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

הוכחת (6.6) דומה להוכחת (6.1), ולכן נסקור אותה בקצרה. כרגיל ההוכחה תהיה באינדוקציה על i. יהיו $S_1, S_2 \subseteq \{1, \ldots, i\}$ שתי תת־קבוצות זרות שממקסמות את הערך המשותף, תחת האילוץ שמשקל S_1 הוא לכל היותר w, ומשקל S_2 הוא לכל היותר x. כלומר הערך המתקבל הוא $\mathrm{OPT}(i,w,x)$. אנו נבדוק רק מקרה אחד שבו $w_i \leq \min\{w,x\}$. במצב הזה ייתכנו שלוש אפשרויות:

- $i \notin S_1 \cup S_2$. במצב הזה קל לראות שהערך הוא $\mathrm{OPT}(i-1,w,x)$.
- $i \in S_1$. במצב הזה קל לראות שהערך הוא $v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w-w_i,x)$.
- $i \in S_2$. במצב הזה קל לראות שהערך הוא $v_i + \mathrm{OPT}(i-1,w,x-w_i)$.

לכן ברור שהערך של $\mathrm{OPT}(i,w,x)$ הוא המקסימום בין שלוש האפשרויות.

פתרון תרגיל 6.6 (מעמוד 95)

1. אלו מכם שלמדו את הקורס "אוטומטים ושפות פורמליות" יכולים לראות ששפת המחרוזות המאוזנות היא שפה חסרת הקשר, המתקבלת על ידי הדקדוק

$$S \to (S) \mid [S] \mid \{S\} \mid SS \mid \varepsilon.$$

אפשר לזהות שפות חסרות הקשר על ידי אוטומטי מחסנית (לא־דטרמיניסטיים). עבור שפת המחרוזות המאוזנות קיים אוטומט מחסנית דטרמיניסטי פשוט המזהה אותה, ומשמעות הדבר היא שקיים אלגוריתם זיהוי עם סיבוכיות זמן לינארית.

2. נפנה כעת לפיתוח אלגוריתם למציאת התאמה חוקית עם מספר מינימלי של סוגריים לא מותאמים. בדומה לבעיית המבנה השניוני של אר־אן־איי שהוצגה בספר (בסעיף 6.5) אנו נפתח אלגוריתם לתכנון דינמי על מקטעי המחרוזת X. מספר הסוגריים ללא בן זוג בהתאמה חוקית $\mathcal{M}$ של מחרוזת הוא $n-2|\mathcal{M}|$. לכן מספיק למקסם את גודל ההתאמה החוקית. נסמן ב־$\mathrm{OPT}(i,k)$ את גודל ההתאמה החוקית המרבית של התת־מחרוזת $x_i x_{i+1}\dots x_{i+k-1}$.

טענה 6.4. $\mathrm{OPT}(i,k)$ מקיים את הנוסחה הרקורסיבית

$$\begin{aligned}
&\mathrm{OPT}(i,0)=0\\
&\mathrm{OPT}(i,1)=0\\
&\qquad\qquad \text{When } k\ge 2, \text{ and } (x_i,x_{i+k-1}) \text{ don't match,}\\
&\mathrm{OPT}(i,k)=\max_{0<t<k}\left(\mathrm{OPT}(i,t)+\mathrm{OPT}(i+t,k-t)\right)\\
&\qquad\qquad \text{When } k\ge 2, \text{ and } (x_i,x_{i+k-1}) \text{ match,}\\
&\mathrm{OPT}(i,k)=\max\bigl\{\mathrm{OPT}(i+1,k-2)+1,\\
&\qquad\qquad \max_{0<t<k}\left(\mathrm{OPT}(i,t)+\mathrm{OPT}(i+t,k-t)\right)\bigr\}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

הוכחה. נוכיח כעת את טענה 6.4. עבור $k\in\{0,1\}$, ברור ש־$\mathrm{OPT}(i,k)=0$. נניח כעת כי $k\ge 2$. תחילה נשים לב שאמנם

$$\mathrm{OPT}(i,k)\ge \max_{0<t<k}\left\{\mathrm{OPT}(i,t)+\mathrm{OPT}(i+t,k-t)\right\},$$

כי לכל $0<t<k$, וגם לכל התאמה חוקית $\mathcal{M}_1$ של $x_i\dots x_{i+t-1}$, ולכל התאמה חוקית $\mathcal{M}_2$ של $x_{i+t}\dots x_{i+k-1}$, מתקיים כי $\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2$ היא התאמה חוקית של $x_i\dots x_{i+k-1}$. כמו כן, אם x_{i+k-1} תואם ל־x_i אז

$$\mathrm{OPT}(i,k)\ge \mathrm{OPT}(i+1,k-2)+1,$$

כיוון שלכל $\mathcal{M}_1$ התאמה חוקית של $x_{i+1}\dots x_{i+k-2}$, מתקיים כי $\mathcal{M}_1\cup\{(i,i+k-1)\}$ היא התאמה חוקית של $x_i\dots x_{i+k-1}$.

כדי להוכיח את האי־שוויונות בכיוון ההפוך, נקבע התאמה חוקית אופטימלית $\mathcal{M}$ עבור $x_i\dots x_{i+k-1}$, כלומר $\mathrm{OPT}(i,k)=|\mathcal{M}|$. ייתכנו שתי אפשרויות:

- אם $(i,i+k-1)\in\mathcal{M}$, אז $\mathcal{M}\setminus\{(x_i,x_{i+k-1})\}$ היא התאמה חוקית של $x_{i+1}\dots x_{i+k-2}$, ולכן

$$\mathrm{OPT}(i+1,k-2)+1\ge|\mathcal{M}|=\mathrm{OPT}(i,k).$$

- אם $(i, i+k-1) \notin \mathcal{M}$ אז אחד מן השניים:
  - ל־x_i אין בן זוג ב־$\mathcal{M}$. במקרה זה ברור ש־$\mathcal{M}$ היא התאמה חוקית של $x_{i+1} \ldots x_{i+k-1}$, ולכן

$$\mathrm{OPT}(i,1)+\mathrm{OPT}(i+1,k-1) = \mathrm{OPT}(i+1,k-1) \geq |\mathcal{M}| = \mathrm{OPT}(i,k).$$

  - ישנו $0 < t < k$ כך ש־$(i, i+t-1) \in \mathcal{M}$. במקרה זה אפשר להסיק מתנאי הלמינריות כי לא קיים זוג $(i', j') \in \mathcal{M}$ כך ש־$i \leq i' < i+t \leq j'$. משמעות הדבר היא שאפשר לכתוב $\mathcal{M}$ כאיחוד של $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ כך ש־$\mathcal{M}_1$ תהיה התאמה חוקית של $x_i \ldots x_{i+t-1}$ ו־$\mathcal{M}_2$ תהיה התאמה חוקית של $x_{i+t} \ldots x_{i+k-1}$ ולכן

$$\mathrm{OPT}(i,t) + \mathrm{OPT}(i+t, k-t) \geq |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| = \mathrm{OPT}(i,k).$$

■

טענה 6.4 מאפשרת לכתוב אלגוריתם לתכנון דינמי שימלא את הטבלה $M(i,k)$ כך שיתקיים $M(i,k) = \mathrm{OPT}(i,k)$ כדלקמן:

Initialize $M(i,0) \leftarrow M(i,1) \leftarrow 0$ for every $i \in \{1, \ldots, n\}$
for $k \leftarrow 2, \ldots, n$ **do**
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n-k+1$ **do**
    Calculate $M(i,k)$ according to (6.7)
return $M(1,n)$

לצורך חישוב ההתאמה עצמה, נתחיל כרגיל מהתשובה הסופית $M(1,n)$ ו"נעקוב לאחור" אחר התת־בעיות שעבורן מתקבל המקסימום; בכל פעם שהמקסימום מתקבל בביטוי $\mathrm{OPT}(i+1, k-1)+1$, נוכל לאסוף את הזוג $(i, i+k-1)$. אוסף הזוגות שנאספו הוא ההתאמה האופטימלית.

פתרון תרגיל 6.7 (מעמוד 96)

נסתכל על האלגוריתם לתכנון דינמי המוצע בספר עבור בעיה זו.

Algorithm 6.10 Alignment(X, Y)

Array $A(0 \ldots m, 0 \ldots n)$
Initialize $A(i,0) \leftarrow i\delta$ for each i
Initialize $A(0,j) \leftarrow j\delta$ for each j
for $j \leftarrow 1, \ldots, n$ do
  for $i \leftarrow 1, \ldots, m$ do
    Use the recurrence formula (6.2) to compute $A(i,j)$
return $A(m,n)$

בחישוב האיברים בטור j בטבלה A, האלגוריתם מתייחס רק לאיברים בטור j ובטור $j-1$, לכן מספיק לשמור, בכל רגע נתון, את הטור "הנוכחי" ואת הטור "הקודם". מתקבל האלגוריתם הזה.

Algorithm 6.11 Space efficient Alignment(X, Y)

```
Array CurColA(0....m), PrevColA(0...m)
Initialize CurrColA(i) ← iδ for each i
for j ← 1,...,n do
    PrevColA ← CurColA
    Initialize CurrColA(0) ← jδ
    for i ← 1,...,m do
        Use the recurrence formula (6.2) to compute CurColA(t), replacing
        "A(t,j)" with "CurColA(t)," and "A(t,j − 1)" with "PrevColA(t)"
        in (6.2).
return CurrColA(m)
```

פתרון תרגיל 6.8 (מעמוד 97)

מספיק להראות כי אם אפשר לקבל את Y מ־X על ידי k פעולות מחיקה והוספה, אזי אפשר לקבל גם את X מ־Y על ידי אותו מספר k של פעולות מחיקה והוספה. נניח כי Y מתקבל מ־X על ידי k פעולות מחיקה והוספה. אז קיימת סדרת מחרוזות $X = X_1, X_2, \ldots, X_k = Y$ כך שלכל $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ המחרוזת X_{i+1} מתקבלת מהמחרוזת X_i על ידי פעולה אחת של מחיקה או הוספה. כעת נשים לב כי פעולות המחיקה וההוספה הן פעולות הפוכות, כלומר אם מחרוזת אחת מתקבלת מהשנייה על ידי פעולת הוספה [מחיקה], אזי המחרוזת השנייה מתקבלת מהראשונה על ידי פעולת מחיקה [הוספה]. ולכן, בסדרה ההפוכה $X_k = Y, X_{k-1}, \ldots, X_1 = X$ כל מחרוזת עוקבת מתקבלת מהמחרוזת הקודמת על ידי פעולה אחת של מחיקה או הוספה. ובכך הוכחנו שאפשר לקבל את X מ־Y על ידי k פעולות מחיקה והוספה, כנדרש.

פתרון תרגיל 6.9 (מעמוד 97)

בעיית מרחק העריכה מזכירה את בעיית יישור הסדרות, ולכן סביר לפתח עבורה אלגוריתם תכנון דינמי הדומה לאלגוריתם עבור יישור סדרות. לאמיתו של דבר, מחשבה מעמיקה יותר על הבעיה של חישוב מרחק עריכה מביאה למסקנה שהיא מקרה פרטי של בעיית יישור הסדרות. נציג זאת כטענה פורמלית.

טענה 6.5. מרחק העריכה בין זוג מחרוזות X ו־Y הוא בדיוק עלות היישור המינימלית של שתי המחרוזות כאשר $\delta = 1$; עלות היישור לכל תו a היא $\alpha(a,a) = 0$ ולכל זוג תווים $a \neq b$ עלות היישור היא $\alpha(a,b) = \infty$.

הוכחה. תחילה נוכיח שאפשר למצוא לכל זוג מחרוזות X ו־Y יישור שעלותו תהיה לכל היותר $d_{\text{ED}}(X,Y)$. טענה זה מוכחת באינדוקציה על מרחק העריכה בין X ל־Y. אם $d_{\text{ED}}(X,Y) = 0$ אז $Y = X$ ולכן היישור $X' = X$ ו־$Y' = Y$ הוא יישור חוקי שעלותו 0. כעת נניח כי $d_{\text{ED}}(X,Y) > 0$. קיימת פעולת הוספה או מחיקה אשר מקטינה את המרחק; ללא הגבלת הכלליות הפעולה הזאת מתבצעת על X ויוצרת מחרוזת $\widehat{X}$, כך ש־$d_{\text{ED}}(\widehat{X},Y) = d_{\text{ED}}(X,Y) - 1$. מהנחת האינדוקציה נובע שקיים יישור Y' של Y ויישור $\widehat{X}'$ של $\widehat{X}$ שעלותו $d_{\text{ED}}(\widehat{X},Y)$. נבחן כעת את הפעולה שיצרה את $\widehat{X}$ מן המחרוזת $X = x_1 \ldots x_n$.

- נניח תחילה שזו פעולת הוספה ולכן $\widehat{X} = x_1 \ldots x_i z x_{i+1} \ldots x_n$.
  - אם ביישור של הזוג $(\widehat{X}, Y)$ התו z ב־X מותאם לתו זהה במחרוזת היישור של Y, אזי אפשר להגדיר מחרוזת יישור של X הזהה למחרוזת היישור של $\widehat{X}$ פרט להחלפת

התו z בתו '–'. מתקבל יישור של X מול Y שעלותו גדולה בדיוק באחת מעלות היישור של $\widehat{X}$ ו־Y. ובזה מוכחת הנחת האינדוקציה.

– אם ביישור של הזוג $(\widehat{X}, Y)$ התו z ב־X מותאם לתו '–' במחרוזת היישור של Y, אזי נוכל להגדיר מחרוזות יישור של X ו־Y כך שתהיה זהות למחרוזות היישור של $\widehat{X}$ ו־Y, למעט העובדה שהתו z ביישור של $\widehat{X}$ והתו '–' המקביל לו ביישור של Y נמחקים. אנו מקבלים יישור של X ו־Y שעלותו קטנה באחת מעלות היישור של $\widehat{X}$ ו־Y.

- כעת נניח שזו פעולת מחיקה ולכן $\widehat{X} = x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n$. ניקח את היישור של $\widehat{X}$ ו־Y ונבנה ממנו יישור ל־X ו־Y על ידי הוספת התו x_i במקום המתאים ביישור של $\widehat{X}$ ומולו הוספת התו '–' ביישור של Y. מתקבל יישור שעלותו גדולה באחת מעלות היישור של $\widehat{X}$ ו־Y.

כעת נוכיח, בכיוון ההפוך, שהעלות של כל יישור של X ו־Y, היא לפחות $d_{\text{ED}}(X,Y)$. ההוכחה תהיה באינדוקציה על עלות היישור, השווה בדיוק למספר תווי '–' הנמצאים ביישור. אם עלות היישור היא 0, אז $X = Y$ וגם $d_{\text{ED}}(X,Y) = 0$. אחרת, נבחר תו '–', בלי הגבלת הכלליות מהיישור של Y. מול התו הזה עומד ביישור של X התו z אשר הופיע במקור גם ב־X. נייצר את $\widehat{X}$ מ־X על ידי מחיקת התו z מ־X. כמו כן נבנה יישור של $\widehat{X}$ ו־Y על ידי מחיקת התו z ומולו נמחק גם את התו '–' ביישור של X ו־Y. עלות היישור של $\widehat{X}$ ו־Y קטנה באחת מעלות היישור של X ו־Y, ולפי הנחת האינדוקציה היא לפחות $d_{\text{ED}}(\widehat{X},Y)$. כיוון ש־$d_{\text{ED}}(X,Y) \leq d_{\text{ED}}(\widehat{X},Y) + 1$, סיימנו בזה גם את הוכחת הכיוון השני. ■

טענה 6.5 מובילה ישירות לאלגוריתם לתכנון דינמי המחשב את מרחק העריכה בסיבוכיות הזמן $O(n^2)$ – זהו האלגוריתם ליישור סדרות שכולל את העלויות המיוחדות שצוינו בטענה. עלויות אלה מפשטות במקצת את האלגוריתם; הפירוט רשום באלגוריתם 6.12.

Algorithm 6.12 Edit Distance($X = x_1 \ldots x_n, Y = y_1 \ldots y_m$)

```
Array A(0...m, 0...n)
Initialize A(i,0) ← i for each i
Initialize A(0,j) ← j for each j
for j ← 1,...,n do
    for i ← 1,...,m do
        A(i,j) ← 1 + min{A(i,j−1), A(i−1,j)}
        if x_i = y_j then
            A(i,j) ← min{A(i,j), A(i−1,j−1)}
return A(m,n)
```

הערת אגב: טענה 6.5 מוכיחה גם את הטענה שהוצגה בתרגיל 6.8, כיוון שעלות יישור הסדרות היא בבירור סימטרית.

פתרון תרגיל 6.10 (מעמוד 99)

כדי לחשב את המרחקים מצומת נתון s בגרף G לשאר הצמתים בגרף, אנו יכולים לייצר בשלב הראשון, בזמן לינארי, גרף G^{rev} שבו הקשתות הפוכות לקשתות G, אך יש להן אותו משקל. כעת נפעיל על G^{rev} את אלגוריתם 6.1 ונמצא את המרחקים מכל הצמתים בגרף G^{rev} אל s, שהם המרחקים מ־s לכל הצמתים בגרף G.

פתרון תרגיל 6.11 (מעמוד 99)
נסמן ב־$M_\ell(v)$ את הערך של $M(v)$ באלגוריתם 6.2 בסוף ביצוע הלולאה $i=\ell$. ההוכחה דומה להוכחת הנכונות של אלגוריתם 6.1 (בלמן־פורד הסטנדרטי) אך מעט גמישה יותר. אם עבור אלגוריתם 6.1 הוכחנו כי $M(\ell,v)=\mathrm{OPT}(\ell,v)$, עבור אלגוריתם 6.2 נטען רק ש־$M_\ell(v)\le \mathrm{OPT}(\ell,v)$ ושהערך $M_\ell(v)$ מייצג מרחק של איזשהו מסלול מ־v ל־t (לאו דווקא מסלול שיש בו ℓ קשתות לכל היותר). הוכחת שתי הטענות הללו מתבצעת באינדוקציה על ℓ, בדומה להוכחת הטענה על $M(\ell,v)$.

שימו לב שבניגוד למצב באלגוריתם 6.1, הערכים ב־$M_\ell(v)$ תלויים בסדר בו נסרקים הצמתים, אבל בסיום האלגוריתם התוצאה איננה תלויה בסדר סריקת הצמתים (תמיד מתקבלים המרחקים המינימליים בגרף).

פתרון תרגיל 6.12 (מעמוד 99)
בכל איטרציה עבור $\ell\ge 1$ המערך M מתעדכן רק על סמך הערכים ב־M, לכן אם בלולאה על v לא השתנה אף ערך ב־M, גם אחר כך לא ישתנה אף ערך ב־M ולכן $M_{n-1}(v)=M_\ell(v)$, לכל $v\in V$.

פתרון תרגיל 6.13 (מעמוד 103)
כרגיל במקרים כאלה, האינדקס k בטבלה M מיותר למעשה, ולכן אפשר פשוט להשמיט.

Algorithm **6.13** Space efficient Floyd–Warshall

Require: Weighted graph $G=(\{1,\dots,n\},E,c)$ without negative cycles.
  Initialize $M(i,j)\leftarrow c(v_i,v_j)$ if $(v_i,v_j)\in E$
  Initialize $M(i,j)\leftarrow\infty$ if $(v_i,v_j)\notin E$
  Initialize $M(i,i)\leftarrow 0$
  for $k\leftarrow 1,\dots n$ do
    for $i,j\leftarrow 1,\dots n$ do
      $M(i,j)\leftarrow \min\{M(i,j),M(i,k)+M(k,j)\}$.
  return $M(i,j)$ for every $i,j\in\{1,\dots,n\}$.

פתרון תרגיל 6.14 (מעמוד 103)

.1 כפי שכבר ראינו (בדיון על מסלולים קצרים ביותר) באלגוריתם בלמן־פורד החוסך־מקום, לכל זוג צמתים $u,v\in V$ מספיק לשמור במערך $S(u,v)$ את הצומת העוקב ל־u במסלול קצר ביותר מ־u ל־v. כמו באלגוריתם בלמן־פורד ניתן גם לייצג את המסלולים הקצרים ביותר כ־n עצי מסלולים קצרים ביותר, עץ T_v עבור צומת $v\in V$. העץ T_v מוגדר כדלקמן:

$$T_v=\{(u,S(u,v))\mid u\in V\setminus\{v\}\}.$$

.2 נוסיף את ניהול S לתרגיל 6.13.

Algorithm 6.14 Space efficient Floyd–Warshall with shortest paths

Require: Wegihted graph $G = (\{1,\ldots,n\}, E, c)$ without negative cycles.
  Initialize $M(i,j) \leftarrow c(v_i, v_j)$, if $(v_i, v_j) \in E$
  Initialize $M(i,j) \leftarrow \infty$, if $(v_i, v_j) \notin E$
  Initialize $M(i,i) \leftarrow 0$
  Initialize $S(i,j) \leftarrow j$, if $(v_i, v_j) \in E$
  Initialize $S(i,j) \leftarrow$nil, if $(v_i, v_j) \notin E$
  for $k \leftarrow 1,\ldots n$ **do**
    for $i, j \leftarrow 1,\ldots n$ **do**
      if $M(i,j) > M(i,k) + M(k,j)$ **then**
        $M(i,j) \leftarrow M(i,k) + M(k,j)$
        $S(i,j) \leftarrow S(i,k)$
  return $M(i,j)$ and $S(i,j)$ for every $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.

אנו כבר יודעים (מפתרון תרגיל 6.13) שבסיום ריצת האלגוריתם, המערך $M(u,v)$ יכיל את אורך המסלול הקצר ביותר מ-u ל-v. לכן מספיק להראות (בדומה לטענה 6.1) שבכל שלב של ריצת האלגוריתם, אם $M(u,v) < \infty$ אז התא $S(u,v)$ מכיל את העוקב ל-u במסלול מ-u ל-v שאורכו $M(u,v)$. הוכחת טענה זו מתבצעת באינדוקציה על מספר הפעולות שהאלגוריתם ביצע. בשלב האתחול הנכונות ברורה. בהמשך, $S(u,v)$ מתעדכן אם ורק אם $M(u,v)$ מתעדכן, והעדכון של $S(u,v)$ שומר על התכונה שלעיל.

פתרון תרגיל 6.15 (מעמוד 104)

1. הטענה הבאה מראה כיצד לחשב את d_G מתוך $d_{\overline{G}}$ ו-h.

טענה 6.6. לכל $u, v \in V$ מתקיים $d_G(u,v) = d_{\overline{G}}(u,v) + h(v) - h(u)$

הוכחה. יהי $u = u_0, u_1, \ldots, u_t = v$ המסלול הקצר ביותר ב-G, אזי

$$d_{\overline{G}}(u,v) \le \sum_{i=1}^{t} \overline{c}(u_{i-1}, u_i) = \sum_{i=1}^{t} \left(c(u_{i-1}, u_i) + h(u_{i-1}) - h(u_i)\right)$$
$$= h(u) - h(v) + \sum_{i=1}^{t} c(u_{i-1}, u_i) = d_G(u,v) + h(u) - h(v)$$

באופן דומה, יהי $u = u_0, u_1, \ldots, u_t = v$ המסלול הקצר ביותר ב-$\overline{G}$, אזי

$$d_{\overline{G}}(u,v) = \sum_{i=1}^{t} \overline{c}(u_{i-1}, u_i) = \sum_{i=1}^{t} \left(c(u_{i-1}, u_i) + h(u_{i-1}) - h(u_i)\right)$$
$$= h(u) - h(v) + \sum_{i=1}^{t} c(u_{i-1}, u_i) \ge d_G(u,v) + h(u) - h(v).$$

■

2. תהי $(u,v)\in E$. אחד המסלולים בגרף המורחב, מ־q ל־v, הוא המסלול הקצר ביותר ל־u בתוספת הקשת (u,v). אורכו $h(u)+c(u,v)$. מכאן ש־$h(v)\leq h(u)+c(u,v)$, ומשמעות הדבר היא:

$$\overline{c}(u,v)=c(u,v)+h(u)-h(v)\geq 0$$

3. נסמן ב־G' את הגרף המתקבל מ־G אחרי הוספת הצומת q ונסמן את הקשתות במשקל 0 לכל הצמתים ב־G. תחילה נבחין הבחנה פשוטה: אם אין ב־G מעגלים שליליים, אז גם ב־G' אין מעגלים שליליים. הסיבה לכך פשוטה: כל הקשתות שנוספו אינן נמצאות על מעגלים, שהרי כולן יוצאות מ־q, ואף קשת אינה נכנסת אל q. משום כך נקבל את האלגוריתם הבא לחישוב המרחקים בין כל הזוגות בגרף $G=(V,E,c)$ ללא מעגלים שליליים:

א. נבנה את הגרף G'.

ב. נריץ את אלגוריתם בלמן־פורד על G' החל מצומת מקור q ונקבל פונקציית גובה על V המוגדרת $h(v)=d_{G'}(q,v)$.

ג. נגדיר $\overline{c}(u,v)=c(u,v)+h(u)-h(v)$ ונסמן את הגרף עם המשקלות $\overline{c}$ כ־$\overline{G}=(V,E,\overline{c})$.

ד. ב־$\overline{G}$ אין קשתות שליליות, לכן נוכל לחשב את המרחקים הקצרים ביותר $d_{\overline{G}}(u,v)$ בין כל זוגות הצמתים $u,v\in V$ על ידי הפעלת האלגוריתם של דייקסטרה על כל צומת.

ה. נפלוט $d_G(u,v)=d_{\overline{G}}(u,v)-h(u)+h(v)$

נכונות האלגוריתם הוכחה בסעיפים הקודמים. הזמן הדרוש לביצוע אלגוריתם זה נשלט על ידי הרצת האלגוריתם של דייקסטרה n פעמים, ולכן הוא $O(mn\log n)$.

פרק 7
זרימה ברשתות

7.1 בעיית הזרימה המקסימלית ואלגוריתם פורד־פולקרסון

קראו בספר את סעיף 7.1

נחזור בקצרה על המושגים המרכזיים בסעיף שקראתם.

הגדרה 7.1. רשת זרימה היא רביעייה (G, c, s, t), המקיימת:
- $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון;
- $c : E \to [0, \infty]$ היא **פונקציית קיבול** על הקשתות המקיימת $c_e \geq 0$ לכל $e \in E$ (אפשר גם $c_e = \infty$);
- $s, t \in V$. הצומת s נקרא **צומת מקור**, ו־t נקרא **צומת בור**. ל־s לא נכנסות קשתות, ומ־t לא יוצאות קשתות.

הגדרה 7.2. זרימה (ממקור s לבור t) ברשת זרימה היא פונקציה $f : E \to [0, \infty)$ המתאימה מספר אי־שלילי לכל קשת, כך שמתקיים:

(1) $\forall e \in E \qquad 0 \leq f(e) \leq c_e$ (אילוצי הקיבול)

(2) $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \qquad f^{\text{in}}(v) = f^{\text{out}}(v)$ (חוק שימור הזרימה)

כאשר:
$f^{\text{in}}(v) = \sum_{e \text{ enters } v} f(e)$ היא **הזרימה הנכנסת** ל־v;
$f^{\text{out}}(v) = \sum_{e \text{ leaves } v} f(e)$ היא **הזרימה היוצאת** מ־v.

ערך/גודל הזרימה הוא

$$\nu(f) = f^{\text{out}} = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s).$$

זרימה בעלת ערך מקסימלי תיקרא זרימה מקסימלית.

הבעיה שבה אנו דנים בפרק הנוכחי היא:

בעיה אלגוריתמית: זרימה מקסימלית.
הקלט: רשת זרימה (G,c,s,t) עם מקור s ובור t.
הפלט: זרימה חוקית f ברשת הזרימה.
המטרה: למקסם את ערך הזרימה $\nu(f)$.

אנו נראה שיטה אינקרמנטלית לפתרון בעיית הזרימה המקסימלית. בשיטה זאת משפרים את הזרימה החוקית על ידי התקדמות בצעדים – בכל צעד מגדילים את ערך הזרימה. בהינתן זרימה f ברשת זרימה (G,c,s,t) עם מקור s ובור t, אנו נדרשים לענות על השאלות האלה: האם קיימת דרך לקבוע ש־f היא הזרימה המקסימלית? ואם f אינה הזרימה המקסימלית – האם יש דרך למצוא בעזרת f זרימה בעלת ערך גדול יותר?

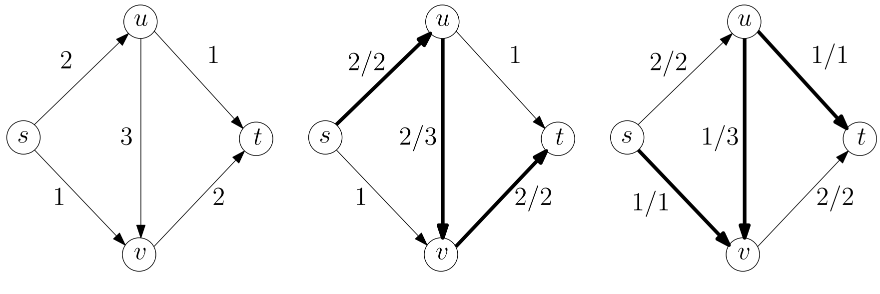
הגיוני יהיה להציע את הדרך הבאה: נמצא מסלול מכוון P מ־s ל־t בגרף G, כך שלכל קשת $e \in P$ יתקיים $c_e - f(e) > 0$, כלומר

$$\varepsilon = \varepsilon(P,f) = \min_{e \in P}(c_e - f(e)) > 0. \tag{7.1}$$

בתנאים אלה נוכל להגדיל את הזרימה ב־ε לאורך P כך:

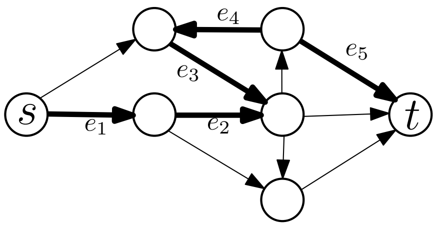
$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon & e \in P \\ f(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

קל לראות כי f' היא זרימה (כאשר f היא זרימה), וערכה גדול בדיוק ב־ε מהערך של f, כלומר $\nu(f') = \nu(f) + \varepsilon$. אבל לא יהיה נכון לומר כי אי קיום מסלול P כזה משמעותו ש־f היא זרימה מקסימלית. הסתכלו בדוגמה המוצגת באיור 7.1 (הדומה לאיור 7.3 בספר) האיור במרכז מציג את הזרימה $f(s,u) = f(u,v) = f(v,t) = 2$. במצב זה לא ניתן להגדיל את הזרימה בעזרת מסלול מהצורה האמורה לעיל. למרות זאת, הזרימה איננה זרימה מקסימלית. באיור 7.1 מצד ימין מוצגת זרימה גדולה יותר. הסיבה לכך היא: כדי להגדיל את ערך הזרימה, ייתכן שנצטרך להקטין את הזרימה דרך קשתות מסוימות כך שנוכל להגדילה במידה ניכרת דרך הקשתות האחרות. בדוגמה באיור 7.1 הקטנו את הזרימה בקשת האנכית כדי להגיע לזרימה מצד ימין.



איור 7.1: דוגמה לרשת זרימה (מצד שמאל) וזרימת מסלול "חוסמת" באמצע $s \to u \to v \to t$ בערך 2. מצד ימין מוצגת זרימה גדולה יותר. ניתן לראות אותה כתוספת של זרימת המסלול $s \to v \to u \to t$ בערך 1 מעבר לזרימה הקודמת.

נזכיר כי גרף התשתית של G הוא הגרף הלא־מכוון המתקבל מ־G על ידי התעלמות מכיווני הקשתות. ננתח רעיון זה מזווית שונה במקצת מזו שבספר. תהי $Q = (s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t)$ סדרת צמתים שמתאימה למסלול פשוט מ־s ל־t בגרף **התשתית**



איור 7.2: גרף מכוון ו־$P = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ הוא מסלול מ־s ל־t בגרף התשתית. במסלול זה, הקשתות e_1, e_2, e_5 הן קשתות קדימה, בעוד שהקשתות e_3, e_4 הן קשתות אחורה.

של G. תהי $P = (e_1, e_2, \ldots, e_t)$ סדרת קשתות ב־G, כך שלכל $i \in \{1, \ldots, k\}$ מתקיים $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ או $e_i = (v_i, v_{i-1})$. אם $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ אז e_i תיקרא **קשת קדימה** [forward edge] (ב־P). אחרת, e_i תיקרא **קשת אחורה** [backward edge] (ביחס ל־P). לדוגמה, ראו איור 7.2.

הגדרה 7.3. הקיבולת השיורית של קשת e_i במסלול P מהסוג שלעיל ביחס לזרימה f מוגדרת כ:

$$\varepsilon_{e_i}(P, f) = \begin{cases} c_{e_i} - f(e_i) & \text{if } e_i \text{ is forward edge} \\ f(e_i) & \text{if } e_i \text{ is backward edge.} \end{cases}$$

צוואר הבקבוק [bottleneck] של P הוא:

$$\varepsilon(P, f) = \min_{i \in \{1, \ldots, k\}} \varepsilon_{e_i}(P, f). \tag{7.2}$$

מסלול P של קשתות בגרף התשתית ייקרא **מסלול שיפור** [augmenting path] ביחס לזרימה f אם $\varepsilon(P, f) > 0$.

דוגמה 7.1. נתבונן שוב באיור 7.1 בזרימה המוצגת במרכז. נתבונן בסדרת הקשתות $P = \big((s,v), (u,v), (u,t)\big)$. במקרה זה,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(s,v)}(P, f) &= c_{(s,v)} - f((s,v)) = 1 - 0 = 1; \\ \varepsilon_{(u,v)}(P, f) &= f((u,v)) = 2; \\ \varepsilon_{(v,t)}(P, f) &= c_{(v,t)} - f((v,t)) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

ולכן $\varepsilon(P, f) = \min\{1, 2, 1\} = 1$.

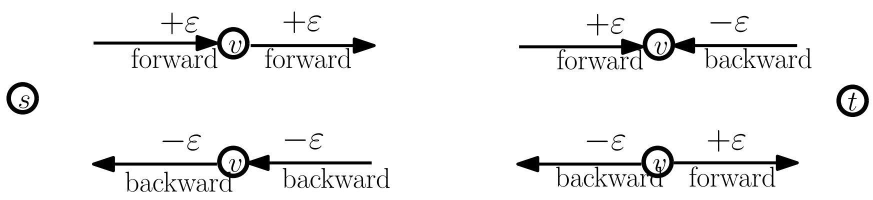
נשים לב שההבדל מההגדרה הנאיבית של צוואר הבקבוק ומסלול השיפור כפי שהיא מבוטאת ב־(7.1), הוא שבהגדרה הנוכחית (7.2) אנו מאפשרים להשתמש גם בקשתות אחורה, בתנאי שעוברת בהן זרימה. הטענה הבאה מראה שהגדרה (7.2) מוצדקת – ניתן להשתמש בה כדי להגדיל את הזרימה ברשת.

טענה 7.1. יהי P מסלול שיפור ביחס לזרימה f, ונסמן $\varepsilon = \varepsilon(P, f)$. הפונקציה $f' : E \to [0, \infty)$ המוגדרת על ידי

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon & e \text{ is a forward edge in } P \\ f(e) - \varepsilon & e \text{ is a backward edge in } P \\ f(e) & \text{otherwise} \end{cases}$$

מייצגת זרימה חוקית מ־s ל־t והערך שלה גבוה מן הערך של f ב־ε.

הוכחה. מהגדרת ε נובע כי $0 \le f'(e) \le c_e$ לכל $e \in E$. נותר להראות כי f' מקיימת את חוק שימור הזרימה: $\sum_{e \text{ enters } v} f'(e) = \sum_{e \text{ leaves } v} f'(e)$ לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$. ברור לנו שחוק שימור הזרימה ממשיך להתקיים בכל צומת v שאינו שייך למסלול P וזאת על סמך העובדה ש־f היא זרימה. נתבונן כעת בצומת $v \in P \setminus \{s,t\}$ ובשתי הקשתות הרצופות של P ש־v נמצא ביניהן. ישנם ארבעה מקרים:



איור 7.3: ארבעה מקרים של צומת השייך למסלול שיפור.

בכל אחד מהמקרים (באיור 7.3) חוק שימור הזרימה ממשיך להתקיים. שתי הזרימות (הנכנסת ל־v והיוצאת ממנו) עשויות לגדול או לקטון ב־ε, אך ייתכן גם שהן לא תשתנינה. במקרה המוצג למעלה, בצד שמאל – שתיהן גדלות; במקרה המוצג בצד שמאל למטה – שתיהן קטנות ב־ε, ובשני המקרים המוצגים בצד ימין של האיור – לא חל בשתיהן כל שינוי. ■

דוגמה 7.2. נחזור שוב לדוגמת הזרימה שבמרכז איור 7.1 ונתבונן במסלול השיפור $P = \big((s,v),(u,v),(u,t)\big)$. כפי שחישבנו לעיל, $\varepsilon = \varepsilon(P,f) = 1$, והזרימה f' לאחר הוספת הזרימה לאורך P הינה

$$\begin{aligned} f'((s,v)) &= f(s,v) + 1 = 1, \\ f'((u,v)) &= f((u,v)) - 1 = 2 - 1 = 1, \\ f'((u,t)) &= f((u,t)) + 1 = 1, \end{aligned}$$

ובשאר הקשתות $f' = f$. הזרימה f' המתקבלת מוצגת בזרימה שמצד ימין באיור 7.1.

אבל כיצד נמצא את מסלול השיפור שתיארנו לעיל? הדרך הקלה והיעילה לעשות זאת היא לחפש מסלול מכוון מ־s ל־t ב־**הרשת השיורית** [residual network]. נזכיר כי הרשת השיורית G_f של זרימה f ברשת זרימה G מוגדרת כך: לכל קשת $e = (u,v)$ ברשת המקורית, תימצאנה ברשת השיורית הקשתות הבאות:

- אם $c_e - f(e) > 0$, תהיה ברשת השיורית קשת (u,v) עם קיבול שיורי $c_e - f(e)$;
- אם $f(e) > 0$, תהיה ברשת השיורית קשת "הפוכה" (v,u) עם קיבול שיורי $f(e)$.

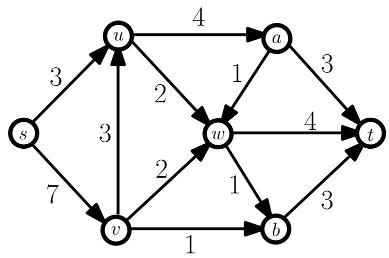
לחלופין, אפשר לבנות את הרשת השיורית גם בדרך זו: לכל קשת $e = (u,v)$ בגרף המקורי, רושמים שתי קשתות ברשת השיורית: קשת (u,v) עם קיבול שיורי $c_e - f(e)$, וקשת הפוכה (v,u) עם קיבול שיורי $f(e)$. לאחר מכן מוחקים את כל הקשתות שהקיבול השיורי שלהן הוא אפס.

כל זה מוביל לאלגוריתם הבא לחישוב זרימה מקסימלית על ידי מציאת מסלולי שיפור עוקבים:

Algorithm 7.1 Ford-Fulkerson(flow network G, c, s, t)

Initialize $f \leftarrow$ feasible flow (can be $f \equiv 0$)
while there exists an augmenting path P with respect to f do
  Increase f by $\varepsilon(P,f)$ along P.
return f

אם מניחים שכל הקיבולים הם מספרים שלמים, ערך הזרימה גדל לפחות ב־1 בכל שלב של הלולאה. לכן מספר הפעמים שהלולאה מתבצעת יהיה לכל היותר ν פעמים, כאשר ν הוא הערך המקסימלי של זרימה ברשת. בפרט, אם C הוא חסם כלשהו על ν (לדוגמה, C יכול להיות הסכום של קיבולי כל הקשתות) אזי הלולאה תתבצע C פעמים לכל היותר (טענה (7.4) בספר). בכל שלב של הלולאה בונים את הרשת השיורית, מוצאים בה מסלול מ־s ל־t (אם קיים מסלול כזה), ומשפרים את הזרימה לאורך המסלול. אפשר לעשות זאת בזמן $O(m)$. לכן הסיבוכיות הכוללת של האלגוריתם היא $O(\nu m) = O(Cm)$ (טענה (7.5) בספר). בשלב זה עדיין לא ברור אם אלגוריתם פורד־פולקרסון מחשב זרימה אופטימלית; מיד נעסוק בכך, בסעיף 7.2.



איור 7.4: רשת זרימה

◄ **תרגיל 7.1**
הריצו את אלגוריתם פורד־פולקרסון על הרשת המוצגת באיור 7.4. מהו ערך הזרימה שמייצר האלגוריתם?
פתרון בעמ' 141 ►

7.2 זרימות מקסימליות וחתכים מינימליים ברשת

קראו בספר את סעיף 7.2

הגדרה 7.4. חתך s-t ברשת זרימה $(G = (V, E), c, s, t)$ הוא תת־קבוצה A של צומתי הגרף, המקיימת $s \in A$, $t \in V \setminus A$. נאמר כי הקשת $e = (u, v) \in E$ **"יוצאת מ־A"** אם $u \in A$ ו־$v \notin A$. **קיבול החתך** הוא

$$c(A) = \sum_{e \text{ leaves } A} c_e.$$

חתך s-t בעל קיבול מינימלי נקרא חתך s-t מינימלי, או פשוט חתך מינימלי אם s, t ברורים מההקשר.

הערה 7.1. הזוג $(A, V \setminus A)$ נקרא בספר חתך, אבל ברור שדי בקבוצה A בלבד כדי לאפיין את החתך.

בסעיף 2.7 בספר מוכיחים את שני המשפטים החשובים האלה:

משפט 7.2. הזרימה f היא זרימה מקסימלית אם ורק אם אין מסלול שיפור ביחס ל־f.

ממשפט 7.2 משתמע כי אלגוריתם פורד־פולקרסון אכן מחשב זרימה אופטימלית (טענה (7.10) בספר).

נעבור עתה למסקנה חשובה (טענה (7.13) בספר) שנובעת מהניתוח של אלגוריתם פורד־פולקרסון.

משפט 7.3 (זרימה מקסימלית וחתך מינימלי [Max-Flow Min-Cut])**.** בכל רשת זרימה, ערך הזרימה המקסימלי שווה לקיבול החתך המינימלי.

נתחיל בהוכחת החסם $\nu(f) \leq c(A)$ לכל זרימה f ולכל חתך A. לצורך זה משתמשים בטענה הבאה – טענה (7.6) בספר:

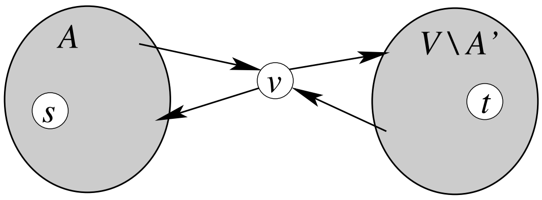
טענה 7.4. תהי f זרימה מ־s ל־t ויהי A חתך s-t כלשהו. אזי ערך הזרימה $\nu(f)$ מקיים:

$$\nu(f) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \; .$$

הוכחה. ניתן הוכחה "ציורית" יותר מזו שבספר. נוכיח כי אם A חתך $s - t$ כלשהו, אזי העברת צומת $v \in V \setminus A$ $(v \neq t)$ ל־A לא משנה את "סך הזרימה" $f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$ דרך A. כלומר, אם $A' = A \cup \{v\}$ אזי

$$f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) = f^{\text{out}}(A') - f^{\text{in}}(A') \; .$$

כיוון שניתן לקבל כל חתך $s - t$ A מהחתך $\{s\}$ על ידי סדרה של "העברות" כאלה, נקבל $\nu(f) = f^{\text{out}}(\{s\}) - f^{\text{in}}(\{s\}) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$, כנדרש.



איור 7.5: המחשה להוכחת טענה 7.4.

עבור $X, Y \subseteq V$ נסמן ב־$f(X,Y)$ את הזרימה בקשתות ההולכות מ־X ל־Y. שימו לב כי $f^{\text{out}}(v) = f(v, V \setminus A') + f(v, A)$, $f^{\text{in}}(v) = f(A, v) + f(V \setminus A', v)$, ראו איור 7.5. ולכן על פי חוק שימור הזרימה:

$$(f(v, V \setminus A') + f(v, A)) - (f(A, v) + f(V \setminus A', v)) = f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v) = 0 \; .$$

כמו כן, קל לראות כי (ראו איור 7.5):

$$\begin{aligned} f^{\text{out}}(A') &= f^{\text{out}}(A) + f(v, V \setminus A') - f(A, v) \\ f^{\text{in}}(A') &= f^{\text{in}}(A) + f(V \setminus A', v) - f(v, A) \end{aligned}$$

על ידי חיסור השוויון השני מהראשון נקבל:

$$f^{\text{out}}(A') - f^{\text{in}}(A') = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) + [f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v)] = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$$

כפי שרצינו להוכיח. ■

עתה קל לחסום מלמעלה את הזרימה המקסימלית בעזרת קיבולי חתכי s-t:

טענה 7.5 (טענה (7.8) בספר)**.** $\nu(f) \leq c(A)$ לכל זרימה f מ־s ל־t ולכל חתך s-t A.

הוכחה.

$$\nu(f) = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \leq f^{\text{out}}(A) \leq c(A).$$

השוויון הראשון נובע כמובן מטענה 7.4. האי־שוויון האחרון הוא מיידי מההגדרות: הזרימה היוצאת מ־A הינה סכום הזרימות בקשתות היוצאות מ־A. זרימה בקשת היא לכל היותר קיבול הקשת, ולכן הזרימה היוצאת מ־A היא לכל היותר סכום קיבולי הקשתות היוצאות מ־A, כלומר קיבול החתך A. ■

מסקנה 7.6. תהי f זרימה. אם ב־G יש חתך s-t, נניח A, שקיבולו $\nu(f)$, אזי f היא זרימה מקסימלית, ו־A הוא חתך s-t מינימלי.

משפט 7.7. תהי f זרימה מ־s ל־t ברשת זרימה (G, c, s, t). שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. f היא זרימה מקסימלית.
2. לא קיים מסלול שיפור ביחס ל־f.
3. ב־G יש חתך s-t שקיבולו $\nu(f)$.

הוכחה. נוכיח 1. ⇐ 2. ⇐ 3. ⇐ 1..

1. ⇐ 2. זה ברור, אחרת נוכל להגדיל את הזרימה.

2. ⇐ 3. תהי A קבוצת כל הצמתים $v \in V$ שעבורם קיים מסלול מ־s ל־v **ברשת השיורית** G_f. כיוון שאין מסלול ברשת השיורית מ־s ל־t, אזי $s \in A$, $t \notin A$. לכל קשת $e = (u, v)$ היוצאת מ־A (כלומר $u \in A$, $v \notin A$) מתקיים $f(e) = c_e$, אחרת e הייתה גם קשת ברשת השיורית G_f והיינו יכולים "להאריך" ברשת השיורית את המסלול מ־s ל־u, עד ל־v, נובע מכך ש־ $v \in A$, וזה סותר את הגדרת e. בדומה לכך, לכל קשת הנכנסת ל־A מתקיים $f(e) = 0$. מכאן:

$$\nu(f) = \sum_{e \text{ leaves } A} f(e) - \sum_{e \text{ enters } A} f(e) = \sum_{e \text{ leaves } A} c_e - 0 = c(A).$$

כלומר, A הוא חתך s-t בקיבול $\nu(f)$.

3. ⇐ 1. זוהי בדיוק מסקנה 7.6.

■

נשים לב שהשקילות 2. ⇔ 1. הינה תוכן משפט 7.2 כמו כן, בהוכחת 2. ⇐ 3. קיבלנו אלגוריתם לחישוב חתך מינימלי. למעשה, באופן דומה נוכל להסיק את הטענה הבאה:

טענה 7.8. תהי f זרימה מקסימלית כלשהי מ־s ל־t. ויהי A חתך s–t. אזי A חתך s–t מינימלי אם ורק אם אין קשת היוצאת מ־A ברשת השיורית G_f.

◄ **תרגיל 7.2**

1. הוכיחו את טענה 7.8.
2. מצאו שני חתכי מינימום ברשת שבאיור 7.4.

פתרון בעמ' 141 ►

נחזור עתה על הוכחת משפט 7.3. הוכחת המשפט מורכבת משני צעדים: הצעד הראשון הוא להראות שבכל רשת זרימה, ערך כל זרימה הוא לכל היותר קיבול החתך המינימלי – זהו תוכן טענה 7.5.

הצעד השני הוא להראות שקיימת זרימה שערכה שווה לחתך המינמלי. את זה הראינו (עבור רשתות זרימה עם קיבולים שלמים), בהבחנה שהאלגוריתם של פורד־פולקרסון חייב לעצור, ועל פי תנאי העצירה לא קיים מסלול שיפור ברשת השיורית, מכאן שעל פי משפט 7.7 התקבלה זרימה שערכה שווה לקיבול החתך.

הערה 7.2. נשים לב שבניסוח משפט 7.3 לא הגבלנו את הרשת להיות בעלת קיבולים שלמים, ולכן המשפט נכון עבור כל קיבולים ממשיים אי־שליליים. הכללה זאת איננה חשובה לצרכי הקורס הנוכחי, אבל למשפט 7.3 ישנם גם שימושים לא אלגוריתמיים, בהם הצורה הכללית יותר הינה שימושית. ההוכחה שהוצגה לעיל מסתמכת על ההנחה שהקיבולים הם מספרים שלמים. בפרט, הטענה שהאלגוריתם של פורד־פלקרסון עוצר בזמן סופי איננה בהכרח נכונה כאשר הקיבולים הם מספרים ממשיים. בסעיף הבא נראה גרסה של האלגוריתם של פורד־פלקרסון שעוצר לאחר מספר סופי של צעדים שאיננו תלוי בקיבולים, ובזאת יוכח גם משפט 7.3 בניסוחו הכללי.

◄ **תרגיל 7.3**

1. הפונקציה $g : 2^V \to \mathbb{R}$ אשר מקנה לכל תת־קבוצה $X \subseteq V$ ערך ממשי $g(X) \in \mathbb{R}$ נקראת **תת־מודולרית** [submodular] אם לכל $X, Y \subseteq V$ מתקיים:

$$g(X) + g(Y) \geq g(X \cap Y) + g(X \cup Y)$$

הוכיחו כי פונקציית הקיבול $g(A) = c(A)$ היא תת־מודולרית.

2. הוכיחו כי אם X, Y הם חתכי s-t מינימליים, אז גם $X \cup Y$ ו־$X \cap Y$ הם חתכי s-t מינימליים.

פתרון בעמ' 143 ►

◄ **תרגיל 7.4**

נתונה רשת להעברת מידע, המיוצגת על ידי גרף מכוון $G = (V, E)$; לכל קשת e ברשת יש קיבול c_e של כמות המידע שאפשר להעביר דרכו ביחידת זמן. יש להעביר את המידע בו זמנית ממקור s לקבוצת יעדים T; לכל יעד $t \in T$ נתונה כמות הזרימה $b(t)$ שצריכה להגיע אליו ביחידת זמן. הציעו אלגוריתם פולינומיאלי שיחשב את זרימת המידע שיכולה לענות על הדרישות, או שיקבע שזה בלתי אפשרי.

פתרון בעמ' 143 ►

7.3 בחירת מסלולי שיפור טובים

קראו בספר את סעיף 7.3

בהנחה כי הקיבולים הם מספרים שלמים, אלגוריתם פורד־פולקרסון אמנם מחשב פתרון אופטימלי, אך זמן הריצה שלו אינו בהכרח פולינומיאלי, אלא פסאודו־פולינומיאלי בלבד (כלומר זמן

הריצה חסום על ידי פולינום בערכי הקיבולים, במקום במספר הסיביות הנדרשות לייצוג הקיבולים). הדוגמה באיור 7.6 בספר מראה כי מצב זה אכן יכול לקרות. בסעיף הזה נדון בדרכים שונות לבחור מסלול שיפור באלגוריתם כדי לשפר את זמן הריצה שלו. נזכיר כי האלגוריתם הכללי של פורד־פולקרסון הוא:

Algorithm 7.2 Ford Fulkerson

Initialize $f(e) \leftarrow 0$, for all $e \in E$.
while the residual graph G_f contains an $s \to t$ path do
  Augment the flow along such a path P.
return f

התיאור לעיל אינו מפרט איזה מסלול P לבחור. הבחירה הטבעית ביותר (והחמדנית) היא למצוא בכל שלב בלולאה מסלול שיפור "רחב ביותר", כלומר מסלול שצוואר הבקבוק שלו $\varepsilon(P,f)$ הוא הגדול ביותר. קל לתכנן אלגוריתם שבהינתן מספר Δ יבדוק אם יש מסלול שיפור P המקיים $\Delta \geq \varepsilon(P,f)$. כל שעלינו לעשות הוא פשוט לחפש מסלול בגרף $G_f(\Delta)$ המתקבל מהרשת השיורית G_f, על ידי הורדת כל הקשתות עם קיבול שיורי שהוא קטן ממש מ־Δ. אם נמצא מסלול מ־s ל־t ב־$G_f(\Delta)$, אזי צוואר הבקבוק של המסלול הזה יהיה לפחות Δ; אחרת – אין מסלול כזה. מובן שכדי למצוא את הערך המקסימלי של Δ, אפשר לעבור על כל הערכים האפשריים בין 1 ל־C, כאשר C הוא הקיבול הגדול ביותר של קשת ברשת G. אבל זה שוב נותן אלגוריתם פסאודו־פולינומיאלי בלבד.

◄ תרגיל 7.5

בהנחה כי כל הקיבולים הם מספרים שלמים, הראו כי אפשר למצוא מסלול שיפור עם צוואר בקבוק מקסימלי בזמן $O(m \log \min\{m, C\})$, כאשר C הוא הקיבול הגדול ביותר של קשת ברשת, ו־m הוא מספר הקשתות ברשת. **פתרון בעמ' 144 ►**

אם כן, בכל שלב בלולאה של אלגוריתם פורד־פולקרסון, אנו יכולים למצוא מסלול שיפור P עם צוואר בקבוק מקסימלי בזמן $O(m \log m)$. אבל בכך עוד לא הוכחנו כי זה נותן אלגוריתם פולינומיאלי, כי עדיין נראה שייתכן מצב שבו (לדוגמה) $\Delta = 1$ בכל שלב. השאלה היא האם הגרסה המשופרת של אלגוריתם פורד־פולקרסון מאפשרת לחסום את מספר השלבים בלולאה. התשובה היא כן, ואנו נוכיח זאת בתרגיל הבא.

◄ תרגיל 7.6

נתבונן בגרסת "המסלול הרחב ביותר" של אלגוריתם פורד־פולקרסון. כלומר בגרסה שבה האלגוריתם מוצא, בכל שלב בלולאה, את מסלול השיפור שיש לו צוואר בקבוק מקסימלי. נסמן ב־ν_i את ערך הזרימה המקסימלית ברשת השיורית בשלב ה־i, ונסמן ב־ν את ערך הזרימה המקסימלית ברשת (שימו לב כי $\nu_0 = \nu$).

1. הראו כי $\nu_{i+1} \leq \nu_i(1 - 1/m)$.
2. הסיקו מהסעיף הקודם כי לאחר $\lceil m \log \nu \rceil$ שלבים $\nu_i < 1$.
3. הראו כי אם הקיבולים הם מספרים שלמים אזי מספר השלבים בלולאה הוא $O(m \log \nu)$.

פתרון בעמ' 144 ►

מבחינת יעילותה, גרסת האלגוריתם של פורד־פולקרסון המוצגת בספר עולה על גרסת "המסלול הרחב ביותר". הטענה שבה משתמשים כדי לחסום את מספר השלבים היא:

טענה 7.9 (טענה 7.18 בספר)**.** תהי f זרימה מ־s ל־t ברשת זרימה (G, c, s, t). אם צוואר הבקבוק המקסימלי של מסלול השיפור הוא קטן ממש מ־Δ, אזי קיים ב־G חתך s-t A כך שמתקיים

$$\nu(f) \geq c(A) - \left[d^{\text{in}}(A) + d^{\text{out}}(A)\right] \cdot \Delta$$

כאשר $d^{\text{in}}(A)$ הוא מספר הקשתות הנכנסות ל־A ו־$d^{\text{out}}(A)$ הוא מספר הקשתות היוצאות מ־A.
בפרט, ערך הזרימה המקסימלית ברשת הוא לכל היותר $\nu(f) + m\Delta$.

הוכחה. תהי A קבוצת כל הצמתים $v \in V$ שעבורם קיים מסלול מ־s ל־v ב־$G_f(\Delta)$. כיוון שאין ב־$G_f(\Delta)$ מסלול מ־s ל־t, אזי $s \in A,\ t \in V \setminus A$. לכל קשת $e = (u, v)$ היוצאת מ־A מתקיים $c_e - f(e) < \Delta$, אחרת היינו יכולים "להאריך" ברשת השיורית את המסלול מ־s ל־u עד v. בדומה לכך, מתקיים $f(e) < \Delta$ לכל קשת הנכנסת ל־A. לכן:

$$\begin{aligned}\nu(f) &= \sum_{e \text{ leaves } A} f(e) - \sum_{e \text{ enters } A} f(e) > \sum_{e \text{ leaves } A} (c_e - \Delta) - \sum_{e \text{ enters } A} \Delta \\ &= c(A) - \left[d^{\text{in}}(A) + d^{\text{out}}(A)\right] \cdot \Delta.\end{aligned}$$

■

בתרגיל הבא נתאר גרסה נוספת של האלגוריתם שהוצג בספר.

◄ **תרגיל 7.7**
נתבונן באלגוריתם הבא לחישוב הזרימה המקסימלית: נסמן $C = \max_{e \in E} c_e$. מתחילים עם $\Delta = C$ ו־$f = 0$; כל עוד יש מסלול מ־s ל־t ב־$G_f(\Delta)$, מעלים את ערך הזרימה ב־Δ לאורך מסלול זה. ברגע שאין מסלול כזה, אם $\Delta = 1$ מסיימים; אחרת – מעדכנים $\Delta \leftarrow \lceil \Delta/2 \rceil$ וממשיכים באותו אופן.

1. הראו כי האלגוריתם נעצר ומחשב זרימה מקסימלית.
2. הראו כי מספר הערכים ש־Δ מקבל במהלך האלגוריתם הוא $O(\log C)$.
3. הראו כי מספר הפעמים שמחשבים מסלול שיפור, לכל ערך של Δ, הוא לכל היותר $2m$.

פתרון בעמ' 145 ►

האלגוריתם שהובא בספר פועל לפי עיקרון דומה לזה שבתרגיל 7.7, בהבדל אחד: הוא מתחיל עם $\Delta_1 = 2^{\lfloor \log_2 C \rfloor}$, כלומר Δ_1 הוא המספר הגדול ביותר שהינו חזקה של 2 וגם קטן או שווה ל־$\max_{e \in E} c_e$.

7.3.1 אלגוריתם דיניץ/אדמונדס־קרפ

האלגוריתם שהוצג בסעיף הקודם הוא אמנם פולינומיאלי בגודל הקלט, אך הוא אינו בהכרח פולינומיאלי בגודל הרשת (כלומר במספר הצמתים והקשתות ברשת). בסעיף הנוכחי נדון באלגוריתם שזמן ריצתו הוא פולינומיאלי במספר הצמתים והקשתות ברשת. נזכיר כי גם באלגוריתמים שראינו לבעיית העץ הפורש המינימלי ולבעיית המסלולים הקצרים ביותר, היו מחירים/מרחקים על הקשתות, אבל מספר הפעולות הבסיסיות בהם היה תלוי במספר הצמתים והקשתות בלבד. אלגוריתמים כאלה נקראים **אלגוריתמים פולינומיאליים במובן החזק**.

הערה 7.3. טכנית, הזמן הדרוש לחיבור שני מספרים שלכל אחד מהם יש b סיביות, הוא $O(b)$, לכן פעולות חשבון דורשות זמן $O(\log C)$. כיוון שפעולות מסוג זה מופיעות תמיד באלגוריתמים בהם מעורבים מספרים, נהוג לספור רק את מספר **הפעולות הבסיסיות באלגוריתם** (חיבור, כפל, השוואה וכולי) ולהתעלם ממשך הזמן הדרוש לכל פעולת חשבון בסיסית.

אלגוריתם פולינומיאלי במובן החזק לבעיית זרימה מקסימלית מתואר בסעיף 7.4 בספר. האלגוריתם הזה מדגים שיטות חשובות, אך הוא מסובך במקצת וגם שונה מהותית מאלגוריתם פורד־פולקרסון. במקומו, אנו נתאר גרסה של אלגוריתם פורד־פולקרסון המניבה אלגוריתם

פולינומיאלי במובן החזק. נציין כי סיבוכיות האלגוריתם הזה טובה פחות מהאלגוריתם שבסעיף 7.4 בספר.

אם נסתכל שוב על הדוגמאות שבהן אלגוריתם פורד־פולקרסון מניב תוצאות גרועות, נבחין כי "ההתנהגות הרעה" של האלגוריתם נובעת משתי הסיבות הבאות:

- השתמשנו במסלולים שצוואר הבקבוק שלהם קטן (ובכך טיפל כבר האלגוריתם שבספר);
- מסלולי השיפור היו ארוכים מדי (ובכך ננסה לטפל בהמשך).

הרעיון הבא הוצע על ידי פורד ופולקרסון כבר בשנות ה־50 של המאה הקודמת, ונותח באופן בלתי תלוי על ידי שלושה חוקרים שונים. דיניץ [Dinitz] היה הראשון שהציע גרסה (משופרת) של האלגוריתם הרשום להלן; אדמונדס [Edmonds] יחד עם קרפ [Karp] ניתחו את האלגוריתם הזה, מאוחר יותר, באופן בלתי תלוי. הכלל באלגוריתם הזה הוא:

> בכל שלב באלגוריתם פורד־פולקרסון, מוצאים את מסלול השיפור הקצר ביותר ברשת השיורית G_f.

כאן האורך של המסלול הוא **מספר הקשתות שיש בו** (ללא קשר לקיבולים). כדי למצוא מסלול כזה ברשת השיורית אין צורך להשתמש באלגוריתם דייקסטרה, אפשר פשוט לבצע חיפוש לרוחב [BFS]. שימו לב כי האורך של כל מסלול הוא בין 1 ל־$n-1$. יותר מכך, באינטואיציה שלנו אורכי מסלולי השיפור הקצרים ביותר הולכים ונעשים ארוכים יותר במהלך האלגוריתם, שהרי בכל שלב באלגוריתם נעלמת לפחות קשת אחת ממסלול קצר ביותר בגרף השיורי. בהמשך נוכיח את המשפט הבא.

משפט 7.10. אם בכל שלב באלגוריתם פורד־פולקרסון בוחרים מסלול שיפור קצר ביותר, אזי מספר השלבים הוא $O(mn)$, ולכן גרסה זו של האלגוריתם ניתנת ליישום בזמן $O(m^2n)$.

הוכחת משפט 7.10 מסתמכת על שתי טענות שמראות כיצד אורכי מסלולי השיפור הקצרים ביותר גדלים במהלך האלגוריתם. תהי G_i הרשת השיורית בשלב ה־i, כאשר $G_0 = G$. עבור צומת v, יהי $\text{dist}_i(v)$ האורך של המסלול הקצר ביותר מבחינת מספר הקשתות מ־s ל־v ברשת השיורית G_i; כלומר, $\text{dist}_i(v)$ היא הרמה של v בעץ הסריקה לרוחב של G_i המושרש ב־s. ההבחנה הראשונה היא שהמרחקים $\text{dist}_i(v)$ יכולים רק לעלות עם הזמן.

טענה 7.11. $\text{dist}_{i+1}(v) \geq \text{dist}_i(v)$ לכל $v \in V$ ולכל i.

הוכחה. ההוכחה היא באינדוקציה על $\text{dist}_{i+1}(v)$.

בסיס האינדוקציה: אם $\text{dist}_{i+1}(v) = 0$ אז $v = s$ ולכן גם $\text{dist}_i(v) = 0$.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $\text{dist}_{i+1}(v) \leq d-1$ ונוכיח אותה עבור $\text{dist}_{i+1}(v) = d$, $d \geq 1$. יהי $s \to \ldots \to u \to v$ המסלול הקצר ביותר מ־s ל־v ב־G_{i+1} (אם אין מסלול כזה, אז $\text{dist}_{i+1}(v) = \infty$, ובמקרה כזה ברור שהטענה נכונה). כיוון שלקחנו מסלול קצר ביותר, נקבל $\text{dist}_{i+1}(v) = \text{dist}_{i+1}(u) + 1$. כמו כן, על פי הנחת האינדוקציה $\text{dist}_{i+1}(u) \geq \text{dist}_i(u)$.

נתבונן בשני מקרים: מצד אחד, אם (u, v) היא קשת גם ב־G_i, אז

$$\text{dist}_i(v) \leq \text{dist}_i(u) + 1 \leq \text{dist}_{i+1}(u) + 1 = \text{dist}_{i+1}(v),$$

כנדרש. מצד שני, אם אין קשת (u, v) ב־G_i, אזי הייתה קשת (v, u) במסלול השיפור שבו השתמשנו במעבר מ־G_i ל־G_{i+1}, והקיבול השיורי של הקשת (v, u) ב־G_i היה שווה לצוואר הבקבוק של מסלול השיפור. במקרה זה, במעבר מ־G_i ל־G_{i+1} הקשת (v, u) "נעלמה" והקשת

ההפוכה לה (u,v) "הופיעה". בפרט, (v,u) נמצאת על המסלול הקצר ביותר מ־s ל־t ב־G_i. מכאן נקבל

$$\mathrm{dist}_i(v) = \mathrm{dist}_i(u) - 1 < \mathrm{dist}_i(u) + 1 \le \mathrm{dist}_{i+1}(u) + 1 = \mathrm{dist}_{i+1}(v).$$

■

שימו לב כי במקרה השני, שבו הקשת (v,u) נעלמה מ־G_i ובמקומה הופיעה הקשת (u,v) ב־G_{i+1}, יכולנו להוכיח כי $\mathrm{dist}_{i+1}(v) \ge \mathrm{dist}_i(v)+2$. כלומר, במקרה הזה המרחק מ־s ל־v ממש גדל. ההבחנה השנייה היא כי אותה קשת לא יכולה "להיעלם" יותר מדי פעמים מהרשת השיורית במהלך האלגוריתם.

טענה 7.12. במהלך האלגוריתם, כל קשת (u,v) יכולה להיעלם לכל היותר $n/2$ פעמים מהרשת השיורית.

הוכחה. נניח כי עבור האינדקסים $i < j$, הקשת (u,v) נמצאת ברשתות השיוריות G_i, G_{j+1} אבל היא אינה נמצאת באף אחת מרשתות הביניים $G_{i+1},\dots,G_j$. אז בהכרח:

- (u,v) הייתה במסלול השיפור שבו השתמשנו במעבר מ־G_i ל־G_{i+1}. לכן $\mathrm{dist}_i(v) = \mathrm{dist}_i(u) + 1$.
- (v,u) הייתה במסלול השיפור שבו השתמשנו במעבר מ־G_j ל־G_{j+1}. לכן $\mathrm{dist}_j(v) = \mathrm{dist}_j(u) - 1$.

מן מהטענה הקודמת נקבל:

$$\mathrm{dist}_j(u) = \mathrm{dist}_j(v) + 1 \ge \mathrm{dist}_i(v) + 1 = \mathrm{dist}_i(u) + 2.$$

לסיכום, בין ההיעלמות וההופעה של אותה קשת (u,v), המרחק בין s ל־u גדל לפחות ב־2. כיוון שהמרחק בין s לכל צומת רלוונטי u הוא לכל היותר $n-1$, מספר ההיעלמויות יכול להיות לכל היותר $n/2$. ■

כעת אנו יכולים לחסום את מספר השלבים באלגוריתם. כיוון שכל קשת יכולה להיעלם לכל היותר $n/2$ פעמים, מספר ההיעלמויות יגיע לכל היותר ל־$mn/2$. אבל בכל שלב יש לפחות קשת אחת שנעלמת (הבהירו לעצמכם מדוע). לכן מספר השלבים הוא לכל היותר $O(mn)$, כפי שרצינו להוכיח.

7.4 האלגוריתם דחיפת קדם־זרימה למציאת זרימה מקסימלית*

סעיף זה אינו חלק מחומר הלימוד. קראו אותו אם ברצונכם ללמוד אלגוריתם שונה לגמרי לחישוב זרימה מקסימלית.

קראו בספר את סעיף 7.4

אלגוריתם פורד־פולקרסון שייך למשפחה של אלגוריתמים שמתחילים עם פתרון אפשרי ובכל צעד משפרים את "האופטימליות" שלו. לעומת זאת, באלגוריתם שנתאר בסעיף הזה, מתחילים עם "פתרון" בלתי אפשרי שערכו גדול מהאופטימלי, ובכל צעד משפרים את "האפשריות" של הפתרון, על ידי ויתור מסוים בערך שלו.

קדם־זרימה f היא "כמעט" זרימה, פרט לעובדה שחוק שימור הזרימה אינו מתקיים לכל צומת $v \in V \setminus \{s,t\}$; במקום "הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת" מתקיים "הזרימה הנכנסת גדולה

או שווה לזרימה היוצאת". לכל צומת v, ההפרש בין "הזרימה הנכנסת לבין הזרימה היוצאת" הוא העודף [excess] $e_f(v)$ של הזרימה בצומת v. הרשת השיורית של קדם־זרימה $G_f = (V, E_f)$ מוגדרת בדיוק באותו אופן כמו הרשת השיורית של הזרימה. בנוסף לקדם־זרימה f האלגוריתם מתחזק גם תגים/גבהים $h(v)$ של צומתי הגרף. הגבהים h וקדם־זרימה f תואמים אם מתקיימים שני התנאים האלה:

$$(.1)\ \ h\left(t\right)=0, h\left(s\right)=n$$

$$(.2)\ \ h\left(v\right)\leqslant h\left(w\right)+1\ \forall\left(v,w\right)\in E_f$$

הסיבה לשני התנאים האלה מסוכמת בטענה הבאה – שבספר מופיעות כטענות (7.21), ו־(7.22):

טענה 7.13. אם קדם־זרימה f והגבהים h תואמים, אזי אין מסלול מ־s ל־t ברשת השיורית. בפרט אם f היא זרימה, אזי היא הזרימה המקסימלית.

אם כן, ברור כבר מה יעשה האלגוריתם. הוא יתחיל עם הקדם־זרימה והגבהים הטבעיים:

$$f\left(e\right)=\begin{cases} c_e & e \text{ leaves } s\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}.$$

$$h\left(v\right)=\begin{cases} n & v=s\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

קל לוודא כי הזרימה הזו והגבהים האלה תואמים.

כל עוד יש צומת $v \in V \setminus \{s,t\}$ עם עודף $e_f(v) > 0$ חיובי ממש, האלגוריתם מפעיל אחת משתי הפעולות הבאות:

דחיפה [push]. אם יש קשת $(v,w) \in E_f$ עם $h(w) < h(v)$ אז "דוחפים" (קדימה או אחורה) זרימה בקשת המתאימה ב־E :

- אם (v,w) היא קשת קדימה, השינוי הוא העלאת $f(v,w)$ בשיעור $\min\{e_f(v), c_e - f(v,w)\}$.
- אם (v,w) היא קשת אחורה, השינוי הוא הורדת $f(v,w)$ בשיעור $\min\{e_f(v), f(w,v)\}$.

תיוג מחדש [relabel]. אם קיים $v \in V$ שעבורו $h(w) \geq h(v)$ לכל קשת $(v,w) \in E_f$ אז מעדכנים $h(v) \leftarrow h(v) + 1$.

קל לוודא כי f ו־h ממשיכים להיות תואמים במהלך האלגוריתם. כמו כן, כאשר האלגוריתם נעצר, $e_f(v) = 0$ לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$, כלומר f היא זרימה. מכאן נקבל, על סמך הטענה הקודמת, את הטענה הזו – טענה (7.24) בספר:

טענה 7.14. כאשר האלגוריתם נעצר f היא זרימה מקסימלית.

אם כן, השאלה היחידה היא כמה צעדי דחיפה ותיוג מחדש מתבצעים עד שהאלגוריתם נעצר. זה תלוי, בין היתר, בבחירת הצומת v שעליו מפעילים את הפעולות האלה. אבל גם במקרה הגרוע, אפשר לחסום זאת בדרך הזו – בספר אלה הטענות (7.26)–(7.29):

טענה 7.15. במהלך האלגוריתם מתבצעות לכל היותר $O(n^2)$ פעולות תיוג מחדש ו־$O(n^2m)$ פעולות דחיפה.

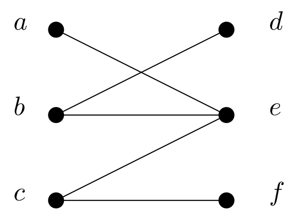
לא נחזור כאן על ההוכחות, שהן פשוטות למדי, אבל שימו לב כי בספר, ב־(7.29) מוכח החסם $4n^2m$ ולא $2n^2m$.

חסמים טובים יותר מתקבלים כאשר בכל צעד בוחרים מבין הצמתים שבהם $e_f(v) > 0$ את הצומת שהגובה שלו מקסימלי. במקרה זה נקבל כי מספר פעולות הדחיפה הוא $O(nm + n^3) = O(n^3)$ (נובע מ־(7.28) ומ־(7.30) בספר).

7.5 יישום ראשון: בעיית הזיווג הדו־צדדי

קראו בספר את סעיף 7.5

גרף דו־צדדי $G = (X \cup Y, E)$, כאשר X ו־Y הן קבוצות זרות, הוא גרף לא־מכוון שבו יש לכל קשת $e \in E$, קצה אחד ב־X וקצה שני ב־Y. זיווג M בגרף לא־מכוון $G = (V, E)$, הוא אוסף של קשתות M, $M \subseteq E$, כך שאין ב־M שתי קשתות בעלות קצה משותף. ראו דוגמה באיור 7.6.



איור 7.6: גרף דו־צדדי שבו $X = \{a, b, c\}$ ו־$Y = \{d, e, f\}$. קבוצת הצמתים $\{\{b, d\}\ ,\ \{b, e\}\}$ אינה זיווג, מפני שהצומת b הוא קצה של שתי קשתות בקבוצה זו. הקבוצה $\{\{b, e\}\ ,\ \{c, f\}\}$ והקבוצה $\{\{a, e\}\ ,\ \{b, d\}\ ,\ \{c, f\}\}$ הן זיווגים.

בעיה אלגוריתמית: בעיית זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי.
הקלט: גרף דו־צדדי G.
הפלט: זיווג M ב־G.
המטרה: למקסם את גודלו של M.

פותרים את בעיית הזיווג המקסימלי בגרף דו־צדדי $G = (X \cup Y, E)$ על ידי רדוקציה פשוטה לבעיית הזרימה המקסימלית ברשת G' עם קיבולי קשתות 1, כך:

אלגוריתם למציאת זיווג מקסימלי בגרפים דו־צדדיים

1. מכוונים את כל הקשתות מ־X ל־Y.
2. מוסיפים: מקור s וקשת מכוונת מ־s לכל צומת ב־X; בור t וקשת מכוונת מכל צומת ב־Y ל־t.
3. ברשת הזרימה המתקבלת G', שבה קיבולי כל הקשתות הם 1, מחשבים את הזרימה המקסימלית f במספרים שלמים (לדוגמה, בעזרת אלגוריתם פורד־פולקרסון).
4. הזיווג המקסימלי הוא $M = \{e \in E : f(e) = 1\}$.

הוכחת הנכונות של האלגוריתם מסתמכת על ההבחנה כי יש התאמה בין זרימות שלמות מ־s ל־t ב־G' לבין זיווגים ב־G. כלומר, לכל זיווג M ב־G יש זרימה שערכה $|M|$ ב־G', וגם לכל זרימה שלמה f מ־s ל־t ב־G' יש זיווג M ב־G בגודל $\nu(f)$. ההוכחה לכך היא פשוטה מאוד ולא נחזור עליה. שימו לב, האלגוריתם הוא עבור גרפים דו־צדדיים בלבד. נעיר כי לבעיית הזיווג המקסימלי יש אלגוריתם פולינומיאלי גם בגרפים כלליים, אבל אלגוריתם זה והוכחתו מסובכים, ולא ננתח אותו כאן.

הגדרה 7.5 (כיסוי־בקשתות [edge-cover]). כיסוי־בקשתות בגרף לא־מכוון G הוא קבוצת קשתות F כך שכל צומת של G הוא קצה של איזושהי קשת ב־F.

הגדרה 7.6 (כיסוי־בצמתים [vertex-cover]). כיסוי־בצמתים בגרף לא־מכוון G הוא קבוצת צמתים U כך שאחד מקצותיה של כל קשת ב־G, נמצא ב־U.

◄ תרגיל 7.8

נסמן ב־$\eta(G)$ את הגודל המקסימלי של זיווג ונסמן ב־$t(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי־בקשתות בגרף G.

1. הוכיחו כי לכל גרף $G = (V, E)$ ללא צמתים מבודדים מתקיים: $t(G) = |V| - \eta(G)$.
2. הציעו אלגוריתם בעל סיבוכיות $O(nm)$ המחשב כיסוי־בקשתות, שיהיה הקטן ביותר בגרף דו־צדדי.

פתרון בעמ' 145 ►

◄ תרגיל 7.9

הוכיחו כי לכל זיווג M ולכל כיסוי־בצמתים U בגרף G כלשהו (לאו דווקא דו־צדדי) מתקיים $|M| \le |U|$.

פתרון בעמ' 146 ►

מטרת התרגיל הבא היא להוכיח את המשפט הזה:

משפט 7.16 (משפט קניג [Konig's Theorem]). בגרף דו־צדדי G, הגודל המקסימלי של זיווג שווה לגודל המינימלי של כיסוי־בצמתים, כלומר:

$$\max\{|M| : M \text{ is a matching in } G\} = \min\{|U| : U \text{ is a vertex-cover in } G\}.$$

◄ תרגיל 7.10

יהי $G = (X \cup Y, E)$ גרף דו־צדדי. ברשת G' שנבנית באלגוריתם למציאת הזיווג המקסימלי, נשנה את הקיבולים של הקשתות ב־E כך שיהיו $m + 1$. כל אחת מן הקשתות היוצאות מ־s ומן הקשתות הנכנסות ל־t היא בעלת קיבול 1, כמו בבנייה המקורית. הראו כי ערך הזרימה המקסימלית ב־G' שווה לגודל הזיווג המקסימלי בגרף הדו־צדדי המקורי G. כעת יהי A חתך s-t מינימלי ב־G'. הוכיחו כי:

1. אין קשת מכוונת מ־$X \cap A$ ל־$Y \setminus A$.
2. קבוצת הצמתים $U = (X \setminus A) \cup (Y \cap A)$ היא כיסוי־בצמתים ב־G.
3. בגרף G', מספר הקשתות שיוצאות מ־A הוא בדיוק $|U|$.
4. הוכיחו את משפט 7.16.

פתרון בעמ' 146 ►

◀ **תרגיל 7.11**
באי טריגמיה מותר לכל גבר להתחתן עם 3 נשים לכל היותר, אבל לכל אישה מותר להתחתן רק עם גבר אחד. נתונה רשימת זוגות E (גבר–אישה) של אנשי האי שמוכנים להתחתן עם זולתם. הציעו אלגוריתם פולינומיאלי הממקסם את מספר הנשים שאפשר לחתן. כלומר, הפלט של האלגוריתם יהיה רשימת זוגות $E' \subseteq E$ שבה כל גבר יהיה רשום ב־3 זוגות לכל היותר ב־E' ואילו כל אישה תירשם בזוג אחד לכל היותר.
פתרון בעמ' 147 ▶

7.6 מסלולים זרים בגרפים מכוונים ובלתי מכוונים

קראו בספר את סעיף 7.6

אחת מטענות המפתח בסעיף זה היא טענה (7.42) בספר: "ברשת זרימה עם קיבולי 1/0 וזרימה במספרים שלמים שערכה ν, קבוצת הקשתות עם זרימה 1 מכילה ν מסלולים זרי־קשתות מ־s ל־t."
אנו נוכיח במדריך את משפט 7.19, המכליל את הטענה שלעיל.

נקבע רשת זרימה (G, c, s, t), וזרימה $f : E \to [0, \infty)$ ברשת. אנו נשאף להראות שכל זרימה ניתנת לפירוק (כלומר לכתיבה כסכום) של זרימות לאורך מסלולי s–t ועוד זרימות לאורך מעגלים, שאינן תורמות לערך הזרימה. באיור 7.7 מודגמת זרימת מסלול וזרימת מעגל. נגדיר עתה פורמלית את סוגי הזרימות הללו.

הגדרה 7.7 (זרימת מסלול)**.** יהי P מסלול פשוט ומכוון ברשת הזרימה מ־s ל־t, ונניח כי $0 < \varepsilon \leq c_e$ לכל $e \in P$. במצב הזה, הזרימה

$$f(e) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } e \in P \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

נקראת **זרימת מסלול** (עם ערך ε). ראו זרימת מסלול לדוגמה באיור 7.7 משמאל.

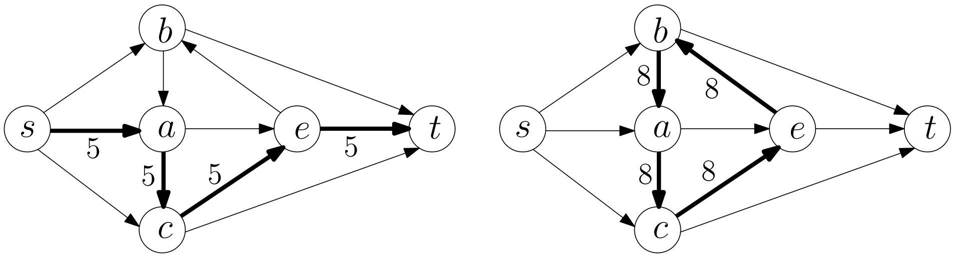
הגדרה 7.8 (זרימת מעגל)**.** יהי C מעגל מכוון ברשת הזרימה, ונניח כי $0 < \varepsilon \leq c_e$ לכל $e \in C$. במצב הזה, הזרימה

$$f(e) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } e \in C \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

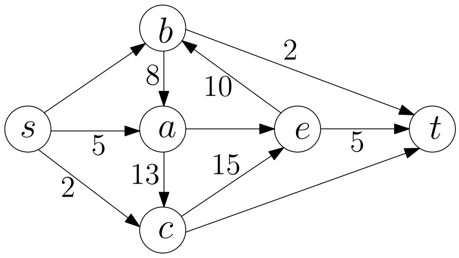
נקראת **זרימת מעגל** (עם ערך ε). ראו זרימת מעגל לדוגמה באיור 7.7 מימין.

הגדרה 7.9 (פירוק זרימה למעגלים ומסלולים)**.** נאמר כי הזרימה f **ניתנת לפירוק לזרימות מסלול ולזרימות מעגל**, אם קיימת משפחה Π של מסלולים פשוטים מ־s ל־t ומעגלים מכוונים, ומשקלות חיוביים ממש $\varepsilon : \Pi \to (0, \infty)$ כך שלכל קשת $e \in E$ מתקיים: סכום משקלי המעגלים והמסלולים העוברים דרך e הוא בדיוק $f(e)$. כלומר: $f(e) = \sum_{P \in \Pi,\, e \in P} \varepsilon_P$. לדוגמה, באיור 7.8 מוצגת זרימה הניתנת לפירוק לזרימות המסלול והמעגל מאיור 7.7 ועוד זרימת מסלול אחת.

טענה 7.17. אם זרימה f ניתנת לפירוק לזרימות מסלול ולזרימות מעגל Π כמו בהגדרה 7.9, אזי ערך הזרימה f הוא בדיוק סכום ערכי המסלולים ב־Π, ואילו תרומת המעגלים לערך הזרימה היא אפס.



איור 7.7: רשת זרימה (הקיבולים אינם מצוינים באיור). משמאל מוצגת זרימת מסלול שערכה 5, ומימין מוצגת זרימת מעגל שערכה 8.



איור 7.8: רשת זרימה (הקיבולים אינם מצוינים באיור) וזרימה שערכה 7 ברשת. זרימה זאת ניתנת לפירוק לזרימת המסלול ולזרימת המעגל המופיעות באיור 7.7; ולזרימת מסלול שערכה 2 במסלול (s, c, e, b, t).

הוכחה. ערך הזרימה מוגדר כדלקמן:

$$\nu(f) = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s) = \sum_{e \text{ leaves } s} f(e) - \sum_{e \text{ enters } s} f(e).$$

מסלול $P \in \Pi$ עם ערך ε_P, הוא מסלול פשוט מ־s ל־t ולכן יש בו בדיוק קשת אחת היוצאת מ־s, ואין בו קשת הנכנסת ל־s. לכן המסלול תורם ε_P לערך הזרימה. במעגל, לעומת זאת, מספר הקשתות הנכנסות ל־s שווה למספר הקשתות היוצאות מ־s ולכן המעגל תורם 0 לערך הזרימה. ■

עבור זרימה f נסמן ב־$E(f) = \{e \in E : \ f(e) > 0\}$ את קבוצת הקשתות עם זרימה חיובית ממש.

טענה 7.18. תהי f זרימה. אם $E(f) \neq \emptyset$ אז בגרף $(V, E(f))$ יש מעגל פשוט או מסלול פשוט מ־s ל־t.

הוכחה. נתבונן בגרף G' המתקבל מהגרף $(V, E(f))$ על ידי הוספת הקשת (t, s). על פי חוק שימור הזרימה, הגרף G' מקיים את התכונה הבאה: לכל $(u, v) \in E(f)$ יש ב־G' קשת הנכנסת ל־u וגם יש קשת היוצאת מ־v. מכך ניתן להסיק (עשו זאת!) כי G' מכיל מעגל פשוט C. אם C מכיל את הקשת (t, s) שהוספנו, אז $C \setminus \{(t, s)\}$ הוא מסלול מ־s ל־t ב־$E(f)$. אחרת, C הוא מעגל ב־$E(f)$. ■

משפט 7.19 (פירוק זרימה [Flow Decomposition])**.** כל זרימה f ניתנת לפירוק ל־$|E(f)|$ זרימות מסלול וזרימות מעגל לכל היותר. בנוסף, אם הזרימה היא במספרים שלמים, אזי קיים פירוק כזה שבו ערכי הזרימות הם מספרים שלמים.

הוכחה. ההוכחה היא באינדוקציה על $|E(f)|$ – מספר הקשתות ב־$E(f)$. אם $E(f) = \emptyset$, אזי מוזרם 0 בכל הקשתות והטענה ברורה. נניח אם כן ש־$E(f) \neq \emptyset$. על פי טענה 7.18 יש בגרף $(V, E(f))$ מעגל או מסלול פשוט מ־s ל־t, שנסמנו ב־P. יהי $\varepsilon_P = \min_{e \in P} f(e)$. תהי f' הזרימה המתקבלת על ידי הקטנת $f(e)$ ב־ε_P לכל $e \in P$, כלומר

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) - \varepsilon_P & \text{if } e \in P \\ f(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

הפונקציה f' הינה זרימה חוקית:

- **אילוצי הקיבול:** לכל $e \in E$, $f'(e) \leq f(e) \leq c_e$. כמו כן, לכל $e \in E \setminus P$, $f'(e) = f(e) \geq 0$, ועבור $e \in P$,

$$f'(e) = f(e) - \min_{e' \in C} f(e') \geq f(e) - f(e) = 0.$$

- **שימור הזרימה:** יהי $v \in V \setminus \{s, t\}$. אם $v \notin P$, אזי $f'(e) = f(e)$ לכל קשת e הנכנסת ל־v או יוצאת מ־v, ולכן הזרימה נשמרת כפי שהיא נשמרת ב־f. אם $v \in P$, אזי הזרימה הנכנסת ל־v והזרימה היוצאת מ־v יורדות שתיהן ב־ε_P. בשני המקרים חוק שימור הזרימה נשמר.

עתה נוכיח ש־$|E(f')| \leq |E(f)| - 1$. כיוון ש־$0 \leq f'(e) \leq f(e)$ לכל $e \in E$, אנו מסיקים ש־$E(f') \subseteq E(f)$. כמו כן קיימת קשת $e_0 \in P$, המקיימת $e_0 = \arg\min_{e \in P} f(e)$, כלומר $f(e_0) = \varepsilon_P$. מכאן ש־$f'(e_0) = f(e_0) - \varepsilon_p = 0$, ולכן $e_0 \in E(f) \setminus E(f')$. אנו מסיקים ש-$|E(f')| \leq |E(f)| - 1$. כמו כן אם f הינה זרימה בשלמים, אז גם ε_P הינו מספר שלם ולכן גם f' הינה זרימה בשלמים.

לפי הנחת האינדוקציה, אפשר לפרק את f' ל־$|E(f')|$ זרימות מסלול וזרימות מעגל לכל היותר. נוסיף את P עם המשקל ε_P ונקבל פירוק של f כנדרש. ■

באיור 7.9 מודגם תהליך הפירוק של זרימה למסלולים ולמעגלים כפי שמתואר בהוכחה שלעיל. נשים לב שההוכחה איננה מגדירה פירוק יחיד – הפירוק תלוי במעגל או במסלול הנבחר בכל רגע. בפרט הפירוק המתקבל באיור 7.9 שונה מהפירוק המתואר באיור 7.8 ואיור 7.7.

◀ **תרגיל 7.12**

הוכיחו את הטענה הבאה: נניח כי מתקיים $c_e = 1$ לכל קשת $e \in E$ ברשת זרימה $(G = (V, E), c, s, t)$. בתנאים אלה קיימת זרימה בגודל k, מ־s ל־t, אם ורק אם יש k מסלולים זרים בקשתות מ־s ל־t. פתרון בעמ' 147 ◀

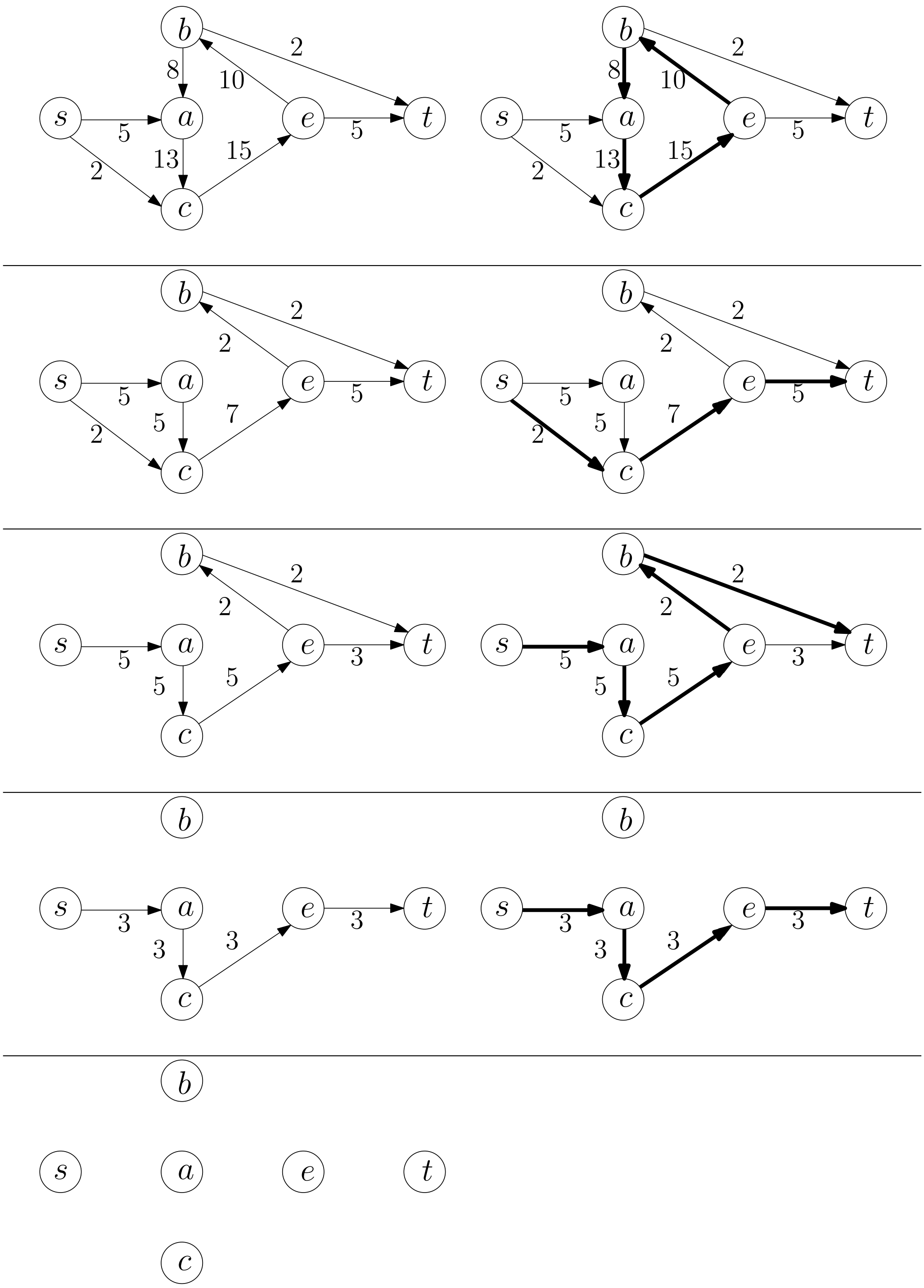
כל הטענות בהמשך הסעיף נובעות כמעט מיידית ממשפט פירוק הזרימה שהוכחנו לעיל. המשפט הכי חשוב שמוכח בסעיף הזה הוא:

משפט 7.20 (משפט מנגר [Menger's Theorem]). (טענה (7.45) בספר) בגרף מכוון, המספר המקסימלי של מסלולים מ־s ל־t, שכל שניים מהם זרים בקשתות, שווה למספר הקשתות המינימלי שלאחר השמטתן מהגרף לא קיים מסלול מ־s ל־t.

הוכחה. נייחס לכל קשת קיבול 1. המשפט נובע משתי ההבחנות האלה:

(א) המספר המינימלי של קשתות שלאחר השמטתן מהגרף לא יהיה מסלול מ־s ל־t, שווה למספר הקשתות בחתך המינימום.

(ב) המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ־s ל־t, שווה לגודל הזרימה המקסימלית.



איור 7.9: תהליך פירוק זרימה של הזרימה מאיור 7.8. משמאל מתוארת הזרימה שעוד יש לפרק (רק הקשתות עם זרימה גדולה מ־0), ומימין מודגש המעגל או המסלול הנבחר.

המשפט נובע מיידית מהבחנות (א) ו־(ב) וממשפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי. את הבחנה (ב) כבר הוכחנו בתרגיל 7.12.

נוכיח את הבחנה (א). יהי $G = (V, E)$ הגרף הנתון. תהי F קבוצת קשתות בעלת גודל מינימלי כך שבגרף $(V, E \setminus F)$ לא קיים מסלול מ־s ל־t. נתבונן בגרף $(V, E \setminus F)$ בקבוצת הצמתים A אליהם קיים מסלול מ־s. במקרה כזה $s \in A,\ t \in V \setminus A$, ובגרף $(V, E \setminus F)$ אין קשת היוצאת מ־A. לכן בגרף G מתקיים $c(A) \leq |F|$. בכיוון השני, יהי A חתך s-t מינימלי ב־G, ותהי F קבוצת הקשתות היוצאות מ־A. אזי לפי ההגדרה $c(A) = |F|$. כמו כן, לפי ההגדרה, אין קשת היוצאת מ־A בגרף $(V, E \setminus F)$, ולכן אין מסלול מ־s ל־t בגרף $(V, E \setminus F)$. משום כך, $c(A)$ הוא לפחות מספר הקשתות המינימלי הנדרש, שהסרתן מנתקת את כל המסלולים מ־s ל־t. לכן $c(A) \geq |F|$. ■

המשפט נכון גם לגרפים לא־מכוונים – הטענה המקבילה עבור גרף לא־מכוון נובעת ישירות מהטענה לגרפים מכוונים (משפט 7.20) והבנייה הסטנדרטית של החלפת כל קשת לא מכוונת בשתי קשתות אנטי מקבילות. להלן גרסת "הצמתים" של משפט מנגר:

משפט 7.21 (גרסת הצמתים של משפט מנגר)**.** בגרף מכוון שאין בו קשת מ־s ל־t, המספר המקסימלי של מסלולים מ־s ל־t, שכל שניים מהם זרים בצמתים, שווה למספר המינימלי של צמתים ב־$V \setminus \{s, t\}$ שלאחר השמטתם מהגרף אין מסלול מ־s ל־t (והשמטת צומת גוררת גם השמטת כל הקשתות הסמוכות אליו).

◄ תרגיל 7.13

תארו אלגוריתם פולינומיאלי הפותר את בעיית הזרימה המקסימלית מ־s ל־t עם קיבולים $c : V \setminus \{s, t\} \to (0, \infty)$ על הצמתים (ראו גם תרגיל 7.13 בספר). כאן אילוצי הקיבול הם כי $f^{\text{in}}(v) \leq c_v$ לכל $v \in V \setminus \{s, t\}$.

פתרון בעמ' 147 ►

◄ תרגיל 7.14

הוכיחו את משפט 7.21. (רמז: היעזרו בתרגיל 7.13).

פתרון בעמ' 148 ►

◄ תרגיל 7.15

(ראו גם תרגיל 7.32 בספר) נתון גרף לא־מכוון $G = (V, E)$. עבור $s, t \in V$. נסמן ב־$\lambda(s, t)$ את המספר המקסימלי של מסלולים זרים (בזוגות) בקשתות בין s ל־t.

1. הוכיחו כי לכל שלושה צמתים שונים $u, v, w \in V$ מתקיים האי־שוויון הזה: $\lambda(u, w) \geq \min\{\lambda(u, v), \lambda(v, w)\}$.
2. הראו דוגמה שבה מתקיים אי־שוויון ממש.
3. יהי k מספר טבעי כלשהו; נגדיר את היחס הבא בין צומתי V: $(u, v) \in R$ אם קיימים k מסלולים זרים בקשתות בין u ל־v. הוכיחו כי היחס R הוא טרנזיטיבי.

פתרון בעמ' 148 ►

7.7 הרחבות לבעיית הזרימה המקסימלית

קראו בספר את סעיף 7.7

בעיה אלגוריתמית: בעיית ההפצה [Circulation Problem].
הקלט: רשת זרימה G, c וביקושים (מספרים שלמים, שיכולים להיות שליליים) $d : V \to \mathbb{R}$.
שאלה: האם קיימת פונקציה $f : E \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$0 \le f(e) \le c_e, \quad \forall e \in E \tag{7.3}$$
(אילוצי הקיבול)

$$f^{\text{in}}(v) - f^{\text{out}}(v) = d_v, \quad \forall v \in V \tag{7.4}$$
(תנאי ביקוש)

פונקציה המקיימת את שני התנאים האלה נקראת **הפצה** עבור הביקושים d. שימו לב, הבעיה שלעיל היא בעיית החלטה ולא בעיית אופטימיזציה. קל לראות כי תנאי הכרחי לקיום הפצה אפשרית הוא $\sum_{v\in V} d_v = 0$, אך זה אינו תנאי מספיק.

באמצעות רדוקציה קלה אפשר להמיר את בעיית ההפצה לבעיית הזרימה המקסימלית. נחלק את צומתי הגרף לשלוש קבוצות:

- $S = \{s \in V : \; d_s > 0\}$ הם צומתי הביקוש;
- $T = \{t \in V : \; d_t < 0\}$ הם צומתי ההיצע;
- $V \setminus (S \cup T) = \{v \in V : \; d_v = 0\}$ הם צומתי המעבר.

נוסיף צומת חדש s^* (המקור) וקשת (s^*, s) בקיבול d_s לכל צומת ביקוש $s \in S$; נוסיף צומת חדש t^* (הבור) וקשת (t, t^*) בקיבול $-d_t$ לכל צומת היצע $t \in T$. ברשת הזרימה המתקבלת עם מקור s^* ובור t^* מחשבים את הזרימה המקסימלית. אם ערך הזרימה המקסימלית הוא $\sum_{s\in S} d_s = -\sum_{t\in T} d_t$, אזי יש הפצה אפשרית; אחרת – אין הפצה כזו. ההוכחה והניתוח פשוטים מאד, ולא נחזור עליהם כאן.

◄ **תרגיל 7.16**
הוכיחו כי לבעיית ההפצה יש פתרון אפשרי אם ורק אם $\sum_{s\in S} d_s = -\sum_{t\in T} d_t$, ולכל $A \subseteq V$ מתקיים

$$c(A) \ge \sum_{s\in S\cap A} d_s + \sum_{t\in T\cap A} d_t .$$

פתרון בעמ' 149 ►

"סיבוך" נוסף מתקבל כאשר לכל קשת $e \in E$ יש גם חסם תחתון על הזרימה שצריכה לעבור בה, כלומר תנאי הקיבול הם $\ell_e \le f(e) \le c_e$ לכל $e \in E$. גם למקרה זה יש רדוקציה קלה לבעיית הזרימה המקסימלית שלא נחזור עליה כאן.

7.8 יישומים: תכנון סקרים

קראו בספר את סעיף 7.8

הבעיה והרדוקציה שלה לבעיית הזרימה המקסימלית הן פשוטות מאוד, ולא נחזור עליהן כאן.

7.9 תזמון טיסות

קראו בספר את סעיף 7.9

הבעיה והרדוקציה שלה לבעיית הזרימה המקסימלית הן פשוטות מאוד, ולא נחזור עליהן כאן.

7.10 הקטעת תמונות

קראו בספר את סעיף 7.10

הבעיה שצריך לפתור כאן שונה מהבעיות שהוצגו בסעיפים 7.8 ו־7.9 בספר, כי כאן הרדוקציה היא לבעיה של חתך המינימום. למרות זאת איננו רואים צורך לחזור על תוכן הסעיף.
אך בתרגיל הבא תוכלו לראות יישום חשוב נוסף לבעיית חתך המינימום.

הגדרה 7.10 (צפיפות של גרף)**.** צפיפות של גרף לא־מכוון היא היחס בין מספר הקשתות לבין מספר הצמתים בו, כלומר מחצית הדרגה הממוצעת של הגרף.

מטרת התרגיל הבא היא לפתח אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה הבאה:

בעיה אלגוריתמית: תת־גרף צפוף ביותר [Densest Subgraph].
הקלט: גרף לא־מכוון $G=(V,E)$.
הפלט: תת־גרף של G.
המטרה: למקסם את הצפיפות של תת־הגרף.

עבור $X\subseteq V$ וקבוצת קשתות E על V נסמן ב־$E[X]$ את קבוצת הקשתות ב־E עם שני הקצוות ב־X. בסימונים אלה, הבעיה שלנו היא למצוא $X\subseteq V$ כך שהיחס $|E[X]|/|X|$ יהיה גדול ככל האפשר.

◄ **תרגיל 7.17** (תרגיל רשות ברמת קושי גבוה)

1. נניח כי לכל מספר רציונאלי q אנו יכולים לחשב בזמן פולינומיאלי את הפונקציה

$$h\left(q\right)=\max_{\emptyset\neq X\subseteq V}\left(\left|E\left[X\right]\right|-q\cdot\left|X\right|\right)$$

ואת קבוצת הצמתים עבורה מתקבל המקסימום. הראו כי אז יש גם אלגוריתם פולינומיאלי לבעיית תת־הגרף הצפוף ביותר.

2. יהי $H=(V\cup E,F)$ **גרף הסמיכויות** של הקשתות והצמתים של G, כלומר, H הוא גרף דו־צדדי שקבוצת הצמתים שלו היא $V_H=V\cup E$, ויש קשת בין $v\in V$ ל־$e\in E$ ב־F אם v הוא קצה של e (ב־E). (הדרך הפשוטה לקבל את H מ־G היא פשוט על ידי "השתלה" של צומת בכל קשת של G). תהי J רשת זרימה המתקבלת מ־H כך:
   - מכוונים את כל הקשתות של H מ־V ל־E, ומקצים קיבול 1 לכל קשת.
   - מוסיפים מקור s וקשת (s,v) בקיבול q לכל $v\in V$.
   - מוסיפים בור t וקשת (e,t) בקיבול 1 לכל $e\in E$.

עבור $X\subseteq V$ תהי $A\left(X\right)=\{s\}\cup\left(V\backslash X\right)\cup\left(E-E\left[X\right]\right)$. הראו כי $A(X)$ הוא חתך s-t ב־J שקיבולו $c\left(A\left(X\right)\right)=|E|-\left(\left|E\left[X\right]\right|-q\cdot\left|X\right|\right)$.

3. מבין כל חתכי s-t המינימליים ב־J, יהי A חתך מינימלי ב־J כך ש־$|A|$ הוא הגדול ביותר. הראו כי אם $A\ni v$ עבור $v\in V$, אזי $e\in A$ לכל קשת e הסמוכה ל־v ב־G. כמו כן תארו אלגוריתם פולינומיאלי למציאת A כנ"ל.

4. נסמן $X_q=V\setminus A$. הסיקו מן הסעיף השלישי כי $A=A(X_q)$ ולכן

$$h\left(q\right)=\left|E\left[X_q\right]\right|-q\cdot\left|X_q\right|.$$

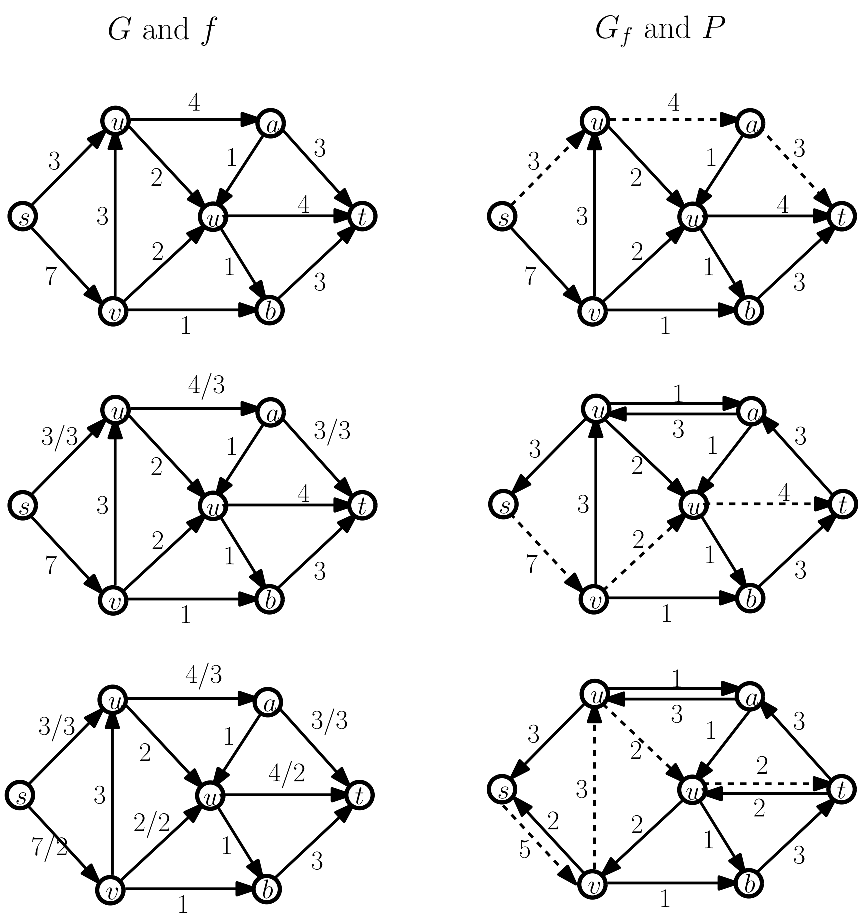
הסיקו מכך כי לכל q אכן ניתן לחשב בזמן פולינומיאלי את

$$h\left(q\right)=\max_{\emptyset\neq X\subseteq V}\left(\left|E\left[X\right]\right|-q\cdot\left|X\right|\right).$$

פתרון בעמ' 150 ◄

7.11 פתרונות לתרגילים

פתרון תרגיל 7.1 (מעמוד 123)



איור 7.10: הרצת פורד־פולקרסון על הרשת שהוצגה באיור 7.4 – חלק א.

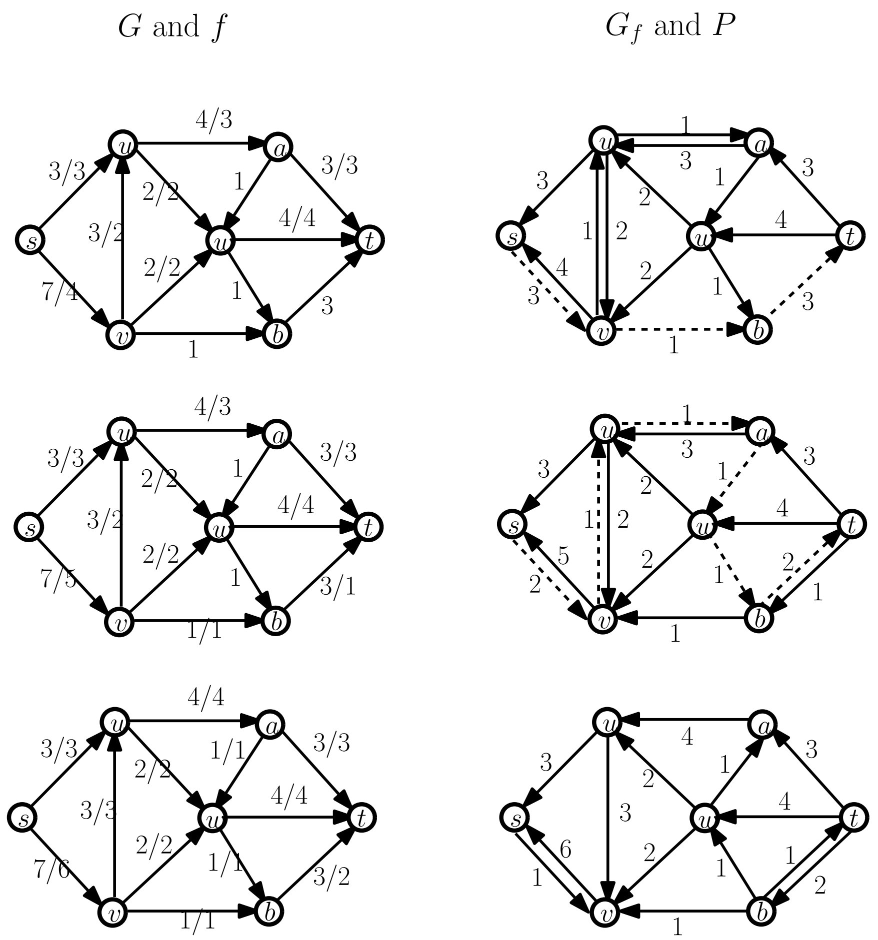
איור 7.10 ואיור 7.11 מדגימים את כל השלבים באלגוריתם. יש כמובן גם אפשרויות אחרות. ערך הזרימה שמייצר האלגוריתם הוא 9. נציין כי בדוגמה זו לא נעשה שימוש בקשתות אחורה.

פתרון תרגיל 7.2 (מעמוד 126)

1. נניח תחילה שב־G_f אין קשת היוצאת מ־A. מכאן שלכל קשת $e = (u, v)$ היוצאת מ־A מתקיים $f(e) = c_e$, בדומה לכך, לכל קשת הנכנסת ל־A מתקיים $f(e) = 0$. מכאן:

$$\nu(f) = \sum_{e \text{ leaves } A} f(e) - \sum_{e \text{ enters } A} f(e) = \sum_{e \text{ leaves } A} c_e - 0 = c(A).$$

כלומר, A הוא חתך s-t בקיבול $\nu(f)$, ומטענה 7.5 הוא חתך מינימלי.



איור 7.11: הרצת פורד־פולקרסון על הרשת שהוצגה באיור 7.4 – חלק ב.

בכיוון השני, נניח ש־A הוא חתך s–t מינימלי. תהי B קבוצת הצמתים הנגישים מ־s ב־G_f. כפי שראינו בהוכחת 2. $\Leftarrow$ 3. , B הוא חתך מינימלי וקיבולו הוא $c(B) = \nu(f)$, מכאן ש־$c(A) = c(B) = \nu(f)$, כלומר

$$\sum_{e \text{ leaves } A} f(e) - \sum_{e \text{ enters } A} f(e) = \nu(f) = c(A) = \sum_{e \text{ leaves } A} c_e.$$

כיוון ש־$0 \leq f(e) \leq c(e)$ לכל $e \in E$, השוויון לעיל יכול לקרות רק כאשר $f(e) = c(e)$ לכל קשת e היוצאת מ־A, ו־$f(e) = 0$ לכל קשת הנכנסת ל־A. ומכאן שב־G_f אין קשתות היוצאות מ־A.

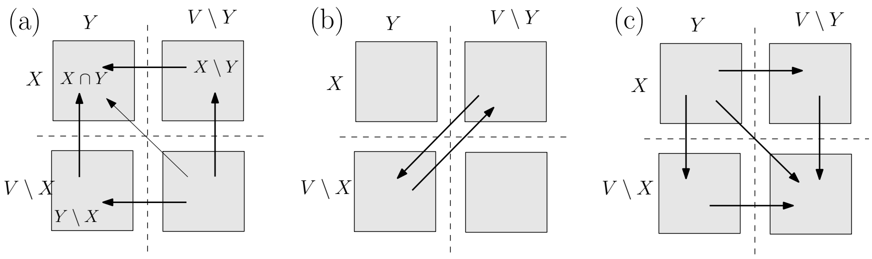
הערה: בחלק השני נמנענו מלהפעיל את משפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי, כיוון שלא הוכחנו את החלק הנדרש ממנו במדריך עד עתה (בעצם, חלק זה הוכח בתרגיל הזה), אך מובן שאין מניעה עקרונית להשתמש במשפט זה ובכך לקצר במקצת את ההוכחה.

2. נתבונן ברשת השיורית האחרונה. קל לוודא כי כל אחד מהחתכים $A_1 = \{s, u, v\}$, $A_2 = \{s, u, v, a\}$, $A_3 = \{s, u, v, a, w\}$ הוא חתך מינימלי ברשת בקיבול 9.

פתרון תרגיל 7.3 (מעמוד 126)
נסמן ב־$c(A,B)$ את הקיבול של הקשתות שהולכות מ־A ל־B. נראה כי:

$$\begin{aligned} c(X)+c(Y) & \\ &= c(X\cap Y)+c(X\cup Y)+c(X\backslash Y, Y\backslash X)+c(Y\backslash X, X\backslash Y) \end{aligned} \tag{7.5}$$

וכיוון שכל הקיבולים הם אי־שליליים, זה גורר כי פונקציית הקיבול היא תת־מודולרית. כדי להראות את (7.5), נתבונן בתרומות של כל סוגי הקשתות האפשריים לשני האגפים של (7.5). אנו טוענים כי התרומה של כל קשת לאגפי (7.5) היא זהה. באיור 7.12 הקשתות מחולקות לשלושה סוגים.



איור 7.12: הקבוצות $X,\ V\setminus X$ הן "השורות" והקבוצות $Y,\ V\setminus Y$ הן "העמודות".

קל לוודא כי תרומת הקשתות בחלק (a) של איור 7.12 לכל אחד מאגפי (7.5) היא 0. נתבונן בתרומת הקשתות בחלק (b) של איור 7.12. הקשתות שהולכות מלמעלה למטה תורמות את קיבולן ל־$c(X)$ באגף שמאל של (7.5), ולאיבר $c(X\setminus Y, Y\setminus X)$ באגף ימין. הקשתות שהולכות מלמטה למעלה תורמות את קיבולן ל־$c(Y)$ באגף שמאל של (7.5), ולאיבר $c(Y\setminus X, X\setminus Y)$ באגף ימין. התרומה של הקשתות האלה לאיבר $c(X\cap Y)+c(X\cup Y)$ היא 0.
לבסוף, נתבונן בתרומת הקשתות בחלק (c) של איור 7.12. תרומת הקשתות שאינן אלכסוניות ל־$c(X)+c(Y)$ זהה לתרומתן ל־$c(X\cap Y)+c(X\cup Y)$, בעוד שתרומתן לשאר האיברים של (7.5) היא 0. לדוגמה, הקשתות שהולכות מ־$X\cap Y$ ל־$Y\setminus X$ תורמות את קיבולן רק ל־$c(X)$ ול־$c(X\cap Y)$. הקשתות האלכסוניות שהולכות מ־$X\cap Y$ ל־$V\setminus(X\cup Y)$ תורמות לשני האגפים של (7.5) תרומה בגודל כפול מן הקיבול שלהן.

סעיף 2 נובע מסעיף 1. יהיו X,Y חתכי s-t מינימליים, ונסמן את קיבולם כך: $\nu=c(X)=c(Y)$. כיוון ש־X,Y הם חתכי s-t, מתקיים $s\in X,\ t\in V\setminus X$ וגם $s\in Y,\ t\in V\setminus Y$. מכאן נובע כי $s\in X\cap Y,\ t\in V\setminus(X\cap Y)$ וגם כי $s\in X\cup Y,\ t\in V\setminus(X\cup Y)$ (הבהירו לעצמכם שאכן זה כך), ולכן גם $X\cap Y$ ו־$X\cup Y$ הם חתכי s-t. בפרט, $c(X\cup Y)\geq\nu$ ו־$c(X\cap Y)\geq\nu$. מכאן שאפשר להשתמש בתת־מודולריות של פונקציית הקיבול כדי לקבל:

$$\nu+\nu=c(X)+c(Y)\geqslant c(X\cap Y)+c(X\cup Y)\geqslant\nu+\nu.$$

ולכן, כל האי־שוויונות מתקיימים כשוויונות, ובפרט $c(X\cap Y)=c(X\cup Y)=\nu$.

פתרון תרגיל 7.4 (מעמוד 126)
נבנה רשת זרימה (G',c',s,t') כך: הגרף G' מתקבל מ־G על ידי הוספת צומת בור חדש t', והוספת קשת (t,t') בקיבול $b(t)$ לכל $t\in T$. קל לראות כי יש זרימה שעונה על הדרישות אם ורק

אם ערך הזרימה המקסימלי ברשת המתקבלת הוא $B = \sum_{t\in T} b(t)$. אם קיימת ב-G' זרימה f' שערכה B, אזי הזרימה המתאימה f ב-G היא הצמצום של f' לקשתות G. סיבוכיות האלגוריתם זהה לסיבוכיות אלגוריתם מציאת הזרימה המקסימלית.

פתרון תרגיל 7.5 (מעמוד 127)

נציג שני אלגוריתמים: אחד עם סיבוכיות $O(m \log C)$ והשני עם סיבוכיות $O(m \log m)$.

אלגוריתם עם סיבוכיות $O(m \log C)$. כאן בא לעזרתנו רעיון פשוט מאוד שאתם בוודאי מכירים בשם "חיפוש בינרי" או בשם "חיפוש האריה במדבר". אין צורך לעבור על כל ערכי Δ – אפשר להפעיל חיפוש בינרי כך: באיטרציה הראשונה בודקים אם קיים מסלול שיפור עם $\varepsilon(P,f) \geq \Delta$ עבור $\Delta = \lceil C/2 \rceil$. אם כן, אנו מסיקים שצריך לחפש את Δ המקסימלית בתחום שבין $\lceil C/2 \rceil$ ל-C; אחרת, תחום החיפוש הוא בין 1 ל-$\lceil C/2 \rceil - 1$. ובאופן דומה ממשיכים בשאר האיטרציות, על ידי חציית תחום החיפוש ובדיקה באיזה תחום נמצא הערך המבוקש. מספר האיטרציות הדרוש כדי למצוא את הערך המבוקש הוא $O(\log C)$, וכל איטרציה ניתנת ליישום בזמן $O(m)$. הסיבוכיות הכוללת היא $O(m \log C)$, כלומר פולינומיאלית בגודל הקלט.

אלגוריתם עם סיבוכיות $O(m \log m)$. גם כאן נחפש בעזרת חיפוש בינרי. תחילה נמיין את הקשתות לפי הקיבול השיורי שלהן. בכל שלב נעדכן את התחום $[\ell, h)$ של ערך קיבול הסף שבכל הקשתות שמעליו יש מסלול מ-s ל-t. בהתחלה $\ell = 0$, $h = C + 1$. נסמן ב-$\#[\ell, h)$ את מספר הקשתות שקיבולן השיורי הוא בטווח $[\ell, h)$. בסעיף הקודם בחרנו לבדוק בכל שלב את הערך $\lceil(\ell + h)/2\rceil$. בסעיף הזה נמצא את הערך p כך ש-$\#[\ell, p)$ ו-$\#[p, h)$ הם (בערך) מחצית $\#[\ell, h)$. זאת ניתן לעשות על ידי מציאת החציון, ולכן בזמן לינארי. כמו בסעיף הקודם, נבדוק בשלב הזה אם יש מסלול מ-s ל-t בקשתות שמשקלן לפחות p. אם כן, נעדכן $\ell \leftarrow p$; אחרת נשים $h \leftarrow p$, ונמשיך כך עד אשר $h - \ell \leq 1$. בצורה זו נזדקק ל-$O(\log m)$ איטרציות. שימו לב, הזמן הדרוש לכל איטרציה הוא רק $O(m)$, ובזאת סיימנו.

פתרון תרגיל 7.6 (מעמוד 127)

1. נתבונן ברשת השיורית G' בשלב i (לפני השיפור), כאשר ערך הזרימה המקסימלית היה עדיין ν_i. נסמן ב-c'_e את קיבול הקשת e ברשת שיורית זו. יהי P מסלול שיפור רחב ביותר שמוצאים בשלב i, כלומר שיפור הזרימה לאורך P מקטין את הזרימה המקסימלית ברשת השיורית מ-ν_i ל-ν_{i+1}. תהי e קשת צוואר הבקבוק ב-P. ההוכחה נובעת משתי ההבחנות האלה:

א. $\nu_{i+1} \leq \nu_i - c'_e$;

ב. $c'_e \geq \nu_i/m$.

כדי להוכיח את א. נתבונן באיזשהו חתך מינימלי A ב-G'. על פי המשפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי, $\nu_i = c'(A)$. כאשר אנו משפרים את הזרימה לאורך P ב-c'_e, אנו מורידים ברשת השיורית G' את קיבולי הקשתות ששייכות ל-P ב-c'_e. עקב כך, קיבול החתך A קטן לפחות ב-c'_e, ועל ידי שימוש חוזר במשפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי נקבל $\nu_{i+1} \leq c'(A) - c'_e = \nu_i - c'_e$, כנדרש.

כדי להוכיח את ב, תהי A קבוצת הצמתים ב-G' שאפשר להגיע אליהם מ-s על גבי קשתות שקיבולן השיורי גדול ממש מ-c'_e. לפיכך $s \in A$, $t \in V \setminus A$ (הבהירו לעצמכם כי אכן זה כך), ולכן A הוא חתך s-t. קיבול כל קשת היוצאת מ-A ברשת השיורית G' הוא לכל היותר c'_e, לכן $c'(A) \leq mc'_e$. כעת נפעיל את המשפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי ונקבל כי $\nu_i \leq c'(A) \leq mc'_e$, כנדרש.

2. על פי סעיף 1, $\nu_i \le \nu(1-1/m)^i$. לכן מספיק להוכיח כי $\nu(1-1/m)^{m\ln\nu} < 1$. לשם כך נשתמש באי־שוויון ידוע $(1-1/m)^m < e^{-1}$ (כאן e אינה קשת, אלא בסיס הלוגריתם הטבעי). לפיכך נקבל

$$\nu\left(1-1/m\right)^{m\ln\nu} = \nu\left((1-1/m)^m\right)^{\ln\nu} < \nu e^{-\ln\nu} = 1.$$

3. על פי סעיף 2, ערך הזרימה המקסימלי ברשת השיורית אחרי $i = \lceil m\ln\nu\rceil$ שלבים, יהיה קטן ממש מ־1, כלומר יהיה 0, שהרי כל הקיבולים הם שלמים. כיוון שערך הזרימה המקסימלית ברשת השיורית הוא 0, הזרימה ברשת המקורית היא מקסימלית.

פתרון תרגיל 7.7 (מעמוד 128)

הסעיפים 1 ו־2 הם מיידים. כיוון שערך הזרימה עולה בכל שלב, האלגוריתם נעצר ומחשב את הזרימה המקסימלית. בקורס מבני נתונים בוודאי הוכחתם כבר כי מספר הערכים ש־Δ מקבל במהלך האלגוריתם הוא $O(\log C)$.

משום כך נוכיח כאן בפירוט רק את סעיף 3. נסמן ב־q את מספר הפעמים שמחשבים עבור Δ את מסלול השיפור באיטרציה. עבור $1 \le i$ נסמן ב־Δ_i את הערך של Δ באיטרציה ה־i. נסמן $\nu_0 = 0$ ונסמן ב־ν_i את ערך הזרימה בסוף השלב ה־i בדיוק לפני שמבצעים את העדכון $\Delta_{i+1} \leftarrow \lceil \Delta_i/2\rceil$ (כלומר כאשר כבר אין מסלול מ־s ל־t ב־$G_f(\Delta)$). נסמן ב־ν את הערך של הזרימה המקסימלית. כיוון ש־$\Delta_{i-1} \le 2\Delta_i$, אנו מקבלים:

- $\nu \ge \nu_i = \nu_{i-1} + q\Delta_i$, כאשר q הוא מספר הפעמים שהעלינו את הזרימה באיטרציה ה־i.
- $\nu \le \nu_{i-1} + m\Delta_{i-1} \le \nu_{i-1} + 2m\Delta_i$, על פי הטענה לעיל.

לכן $\nu_{i-1} + q\Delta_i \leqslant \nu \leqslant \nu_{i-1} + 2m\Delta_i$, ובפרט $q \le 2m$.

פתרון תרגיל 7.8 (מעמוד 133)

1. תחילה נוכיח כי $t\left(G\right) \leqslant |V| - \nu\left(G\right)$. בהינתן זיווג M, נתאר אלגוריתם המחשב כיסוי־בקשתות F בגודל $|F| = |V| - |M|$. מספר הצמתים שאינם קצוות של קשת ב־M הוא $|V| - 2|M|$. עבור כל צומת שאינו קצה של קשת ב־M נוסיף קשת כלשהי שסמוכה אליו, ונקבל כיסוי־בקשתות שגודלו

$$|M| + \left(|V| - 2\left|M\right|\right) = |V| - |M|\ .$$

בפרט, אם M הוא זיווג מקסימלי, נקבל כיסוי־בקשתות F בגודל $|V| - \nu(G)$. לכן $t(G) \le |V| - \nu(G)$.

כעת נוכיח כי $t(G) \ge |V| - \nu(G)$. יהי F כיסוי־בקשתות בעל גודל מינימלי, ויהי M זיווג בעל גודל מקסימלי בגרף (V, F). לפיכך נקבל:

$$t\left(G\right) = |F| = |M| + \left(|V| - 2\left|M\right|\right) = |V| - |M| \geqslant |V| - \nu\left(G\right).$$

2. תיארנו בסעיף 1 של תרגיל זה אלגוריתם שבהינתן זיווג מקסימלי M מחשב כיסוי־בקשתות F בגודל

$$|F| = |V| - |M| = |V| - \nu\left(G\right).$$

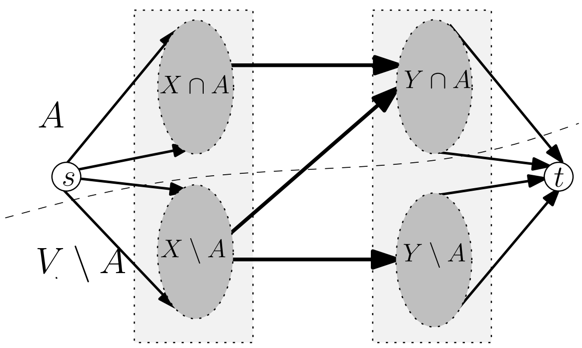
על פי סעיף 1, זהו כיסוי־בקשתות קטן ביותר. קל לראות כי אפשר ליישם את כל שלבי האלגוריתם בזמן $O(m)$. לכן הזמן הדומיננטי מושקע בחישוב הזיווג המקסימלי, חישוב שאפשר לבצע בזמן $O(mn)$.

פתרון תרגיל 7.9 (מעמוד 133)
מהעובדה שדרושים לפחות $|M|$ צמתים כדי "לכסות" את קשתות M בלבד, נובע כי לפחות קצה אחד של כל קשת של M צריך להיות ב־U.

פתרון תרגיל 7.10 (מעמוד 133)
הנה הבחנה פשוטה: גם אם ניתן לקשתות ב־E קיבולים "אינסופיים", זה לא ישנה את ערך הזרימה המקסימלית, כי בכל קשת $(x,y) \in E$ עדיין תוכל לעבור לכל היותר רק יחידת זרימה אחת. בנוסף נציין כי כמות הזרימה שיכולה להיכנס לצומת $x \in X$ או לצאת מצומת $y \in Y$ גם היא לכל היותר 1. הסיבה למגבלה הזו היא: לכל צומת $x \in X$ נכנסת בדיוק קשת אחת (הקשת (s,x)) וקיבולה של קשת זו הוא 1, ומכל צומת $y \in Y$ יוצאת בדיוק קשת אחת (הקשת (y,t)) וקיבולה של קשת זו הוא 1, לכן אם f היא זרימה מקסימלית עם ערכים שלמים ב־G', אזי $M = \{e \in E:\ f(e) = 1\}$ הוא עדיין זיווג מקסימלי בגרף הדו־צדדי המקורי G.

כעת נתבונן בחתך s-t מינימלי, A, ב־G'.

נוכיח את סעיף 1. קיבול החתך A הוא לכל היותר m, כי ב־G' יש חתך שקיבולו m, למשל החתך $\{s\}$ או החתך $V \setminus \{t\}$. כיוון שהקיבול של כל קשת ב־E הוא $m+1$, ואילו הקיבול של A הוא m לכל היותר, אין קשת של E היוצאת מ־A. אבל הקשתות של E שיוצאות מ־A הן בדיוק הקשתות מ־$X \cap A$ ל־$Y \setminus A$, ולכן אין קשתות כאלה – ראו איור 7.13, ושימו לב כי הקשתות מ־$X \setminus A$ ל־$Y \cap A$ נכנסות ל־A, ולא יוצאות מ־A. זה מוכיח את סעיף 1.



איור 7.13: רשת זרימה וחתך המבוססים על גרף דו־צדדי

מכאן נובעת בקלות גם ההוכחה של סעיף 2: כל קשת ב־G סמוכה לצומת בקבוצה $U = (X \setminus A) \cup (Y \cap A)$, כי קצה אחד של כל קשת שאינה סמוכה לצומת ב־U נמצא ב־$X \cap A$ וקצה שני נמצא ב־$Y \setminus A$ – אבל הראינו שאין קשתות כאלה.

נוכיח כעת את סעיף 3. הקשתות שיוצאות מ־A הן בדיוק הקשתות שמובילות מ־s ל־$X \setminus A$, או מ־$Y \cap A$ ל־t (ראו איור 7.13). מספר הקשתות האלה הוא בדיוק $|U| = |Y \cap A| + |X \setminus A|$.

כעת נוכל להסיק את משפט קניג. יהי M זיווג מקסימלי ב־G. על פי תרגיל 7.9, מספיק להראות כי ב־G יש כיסוי־בצמתים בגודל $|M|$. יהי A חתך מינימלי ב־G', ותהי $U = (X \setminus A) \cup (Y \cap A)$. לפי הסעיפים הקודמים, U היא כיסוי־בצמתים ב־G בגודל $|U| = c(A)$. כפי שראינו, $|M|$ שווה לערך הזרימה המקסימלית ב־G', ולכן על פי המשפט זרימה מקסימלית וחתך מינימלי, $|M| = c(A)$. קיבלנו כי ב־G יש כיסוי־בצמתים U שגודלו כגודל הזיווג המקסימלי $|M|$ – כנדרש.

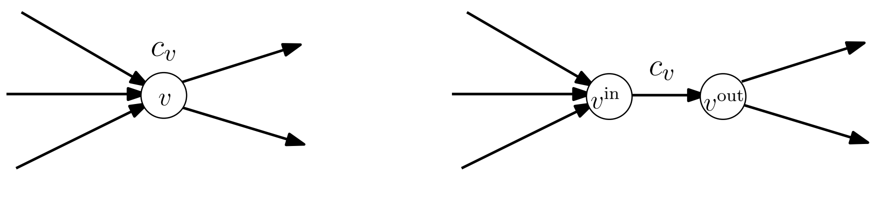
פתרון תרגיל 7.11 (מעמוד 134)
באמצעות רדוקציה של הבעיה שהוצגה בשאלה, נוכל להמירה לבעיית הזיווג המקסימלי בגרף דו־צדדי. תהי X קבוצת הגברים, Y קבוצת הנשים. תחילה נבנה גרף דו־צדדי $G=(X\cup Y,E)$, שבו קבוצת הקשתות של הגרף היא רשימת הזוגות E של (גבר, אישה) מאנשי האי שמוכנים להתחתן עם זולתם. כדי לבטא את העובדה שלכל גבר מותר להתחתן עם 3 נשים לכל היותר, נבנה מהגרף G גרף דו־צדדי $G'=(X'\cup Y,E')$ כך: נחליף כל צומת $x\in X$ ב־3 צמתים x_1,x_2,x_3 וכל קשת (x,y) נחליף ב־3 קשתות $(x_1,y),(x_2,y),(x_3,y)$. כעת נמצא זיווג מקסימלי M בגרף G'. עבור $1\le i\le 3$, הקשת $(x_i,y)\in M$, מייצגת את הזוג (x,y). כיוון שלכל צומת $x\in X$ מתאימים ב־G' 3 צמתים, כל גבר יופיע ב־3 זוגות לכל היותר. מספר הנשים המזווגות הוא מקסימלי, כי M הוא זיווג מקסימלי. סיבוכיות האלגוריתם היא כשל בעיית מציאת זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי.

פתרון תרגיל 7.12 (מעמוד 136)
נוכיח כל כיוון בנפרד.

הכיוון הראשון: יש k מסלולים זרים בקשתות מ־s ל־t ⇐ קיימת זרימה בגודל k מ־s ל־t. נגדיר $f(e)=1$ לכל קשת השייכת לאחד המסלולים, ו־$f(e)=0$ לכל קשת אחרת. ברור שתנאי הקיבול מתקיימים. גם תנאי שימור הזרימה מתקיימים, כי אם P הוא מסלול פשוט מ־s ל־t, ואם לכל צומת $v\in V\setminus\{s,t\}$ יש קשת של P שנכנסת ל־v, אזי יש גם קשת של P שיוצאת מ־v. כמו כן, ערך הזרימה הוא k מפני שהמסלולים הם זרים בקשתות.

הכיוון השני: קיום זרימה בגודל k מ־s ל־t גורר קיומם של k מסלולים זרים בקשתות מ־s ל־t. זוהי מסקנה כמעט מיידית ממשפט פירוק הזרימה. כיוון שכל הקיבולים הם 1, אזי על פי משפט פירוק הזרימה, כל זרימה f ניתנת לפירוק ל־$\nu(f)$ מסלולים במשקל 1 כל אחד, ואולי יש מעגלים נוספים. אם נתעלם מהמעגלים בפירוק, נקבל כי לכל זרימה בגודל k אפשר להתאים k מסלולים זרים בקשתות מ־s ל־t.

פתרון תרגיל 7.13 (מעמוד 138)
הרדוקציה הפשוטה הבאה ממירה קיבולי צמתים לקיבולי קשתות. נניח שנתונה לנו רשת זרימה $G=(V,E),c$ שבה $c:V\setminus\{s,t\}\to[0,\infty)$ הם קיבולי הצמתים. כל צומת $v\in V\setminus\{s,t\}$ מוחלף בשני צמתים v^{in}, v^{out} המחוברים ביניהם בקשת $(v^{\text{in}},v^{\text{out}})$ בקיבול c_v; כמו כן, מחליפים את הראש v של כל קשת (u,v) שנכנסת ל־v בצומת v^{in}, ומחליפים את הזנב u של כל קשת (u,v) שיוצאת מ־u בצומת u^{out} (לקשתות אלה לא יהיו אילוצי קיבול). ראו איור 7.14 להמחשה.



איור 7.14: המרת קיבולי צמתים לקיבולי קשתות

ברשת הזרימה $G'=(V',E'),c'$ המתקבלת (עם קיבולים על הקשתות) מחשבים את הזרימה המקסימלית f'. לכל קשת $e=(u,v)\in E$ מתאימה הקשת $e'=(u^{\text{out}},v^{\text{in}})\in E'$. כלומר יש התאמה חד־ערכית בין קשתות E לקשתות E' שצורתן אינה $(v^{\text{in}},v^{\text{out}})$. לכל צומת v מתאימה הקשת (v^{in},v^{out}) בעלת אותו קיבול כמו v, ולכן אילוצי הקיבול לא מופרים. לכן, הזרימה

המתאימה ברשת G, c (עם קיבולים על הצמתים) לזרימה f' היא $f(u,v) = f'(u^{\text{out}}, v^{\text{in}})$ לכל $e \in E$. אפשר גם לראות את f כמתקבלת מ־f' על ידי כיווץ כל קשת $(v^{\text{in}}, v^{\text{out}})$ של E' לצומת אחד. בדקו כי f מקיימת את חוק שימור הזרימה ואת אילוצי הקיבול.

פתרון תרגיל 7.14 (מעמוד 138)

תחילה נוכיח טענה כללית יותר, ואחר כך נראה כיצד להסיק ממנה את גרסת הצמתים של משפט מנגר. נסמן ב־$\kappa_G(s,t)$ את המספר המקסימלי של מסלולים מ־s ל־t בגרף G, כך שכל שניים מהם זרים בצמתים. הטענה הכללית יותר שנוכיח היא:

טענה 7.22. יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון ויהיו $s,t \in V$, אז $\kappa_G(s,t)$ שווה למספר המינימלי של צמתים ב־$V \setminus \{s,t\}$ ושל קשתות ב־E שלאחר השמטתן מהגרף לא יהיה מסלול מ־s ל־t; כלומר

$$\kappa_G(s,t) = \min\{|F| : F \subseteq (V \setminus \{s,t\}) \cup E,\ G \setminus F \text{ has no } (s,t) - \text{path}\}.$$

שימו לב, ביטלנו כאן את האיסור על חיבור קשת מ־s ל־t, ואנו מרשים להשמיט גם קשתות ולא רק צמתים. הנה הוכחת טענה 7.22. נפעיל את הרדוקציה ששימשה אותנו בתרגיל 7.13 (כאשר קיבולי כל הקשתות ב־G' הם 1). ממשפט מנגר (גרסת הקשתות) נקבל כי ב־G' המספר המקסימלי של מסלולים מ־s ל־t כך שכל שניים מהם זרים בקשתות, שווה לגודל המינימלי של קבוצת קשתות F' כך שבגרף $G' \setminus F'$ אין מסלול מ־s ל־t. איור 7.22 נובעת משתי ההבחנות הפשוטות הבאות:

ההבחנה הראשונה היא שמסלולים זרים בקשתות בגרף G' ממופים למסלולים זרים בצמתים של G. ואכן, לשני מסלולים הזרים בקשתות ב־G' אין קשת משותפת שצורתה $(v^{\text{in}}, v^{\text{out}})$, וזה מבטיח כי אין צומת משותף למסלולים הזרים ולמסלולים המתאימים להם ב־G.

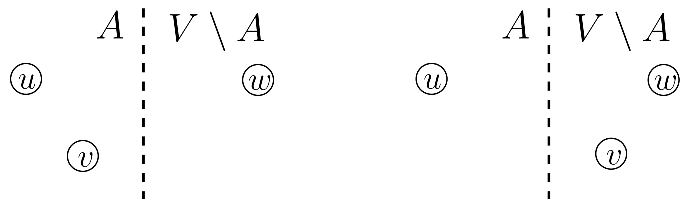
ההבחנה השנייה היא כי כל קבוצת קשתות F' ב־G' ממופה לקבוצה של צמתים וקשתות F ב־G, כאשר לכל קשת שצורתה $(v^{\text{in}}, v^{\text{out}})$ מתאים הצומת $v \in F$, ולכל קשת $(u^{\text{out}}, v^{\text{in}}) \in F'$ מתאימה בטבעיות הקשת $(u,v) \in F$.

כעת נראה כיצד להסיק מהטענה לעיל את גרסת הצמתים של משפט מנגר. תהי $F \subseteq (V \setminus \{s,t\}) \cup E$ בעלת גודל מינימלי, כך שאין מסלול מ־s ל־t בגרף $G \setminus F$. על פי הטענה לעיל $|F| = \kappa_G(s,t)$. לכל קשת $(u,v) \in F$ מתקיים: $u \neq s$ או $v \neq t$, כלומר, לפחות קצה אחד של הקשת הוא לא s ולא t; כאן אנו משתמשים בהנחה כי $(s,t) \notin E$, ולכן גם $(s,t) \notin F$. כעת נחליף כל קשת ב־F בקצה שלה שאינו שייך ל־$\{s,t\}$, ונקבל קבוצת צמתים U שלאחר השמטתם מהגרף לא יהיה מסלול מ־s ל־t. ברור כי $|U| \leq |F|$ וכי $|U| \geq \kappa_G(s,t)$. מכאן נקבל $\kappa_G(s,t) \leq |U| \leq |F| = \kappa_G(s,t)$. לכן $|U| = \kappa_G(s,t)$, כנדרש.

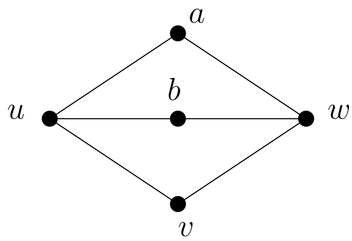
פתרון תרגיל 7.15 (מעמוד 138)

1. על פי משפט מנגר לגרפים לא־מכוונים, $\lambda(s,t)$ שווה למספר המינימלי של קשתות בחתך המפריד בין s ל־t. נסמן $k = \lambda(u,w)$ ויהי A חתך עם k קשתות המפריד בין u ל־w, נניח $u \in A,\ w \in V \setminus A$. כעת יש שני מקרים: $v \in A$ או $v \in V \setminus A$, ראו איור 7.15. אם $v \in A$, אז החתך מפריד בין v ל־w, ולכן $\lambda(v,w) \leq k$. אם $v \in V \setminus A$, אז החתך A מפריד בין u ל־v, ולכן $\lambda(u,v) \leq k$. ובכל מקרה, $\min\{\lambda(u,v), \lambda(v,w)\} \leqslant k = \lambda(u,w)$, כנדרש.

2. נתבונן באיור 7.16. דרגתו של הצומת v היא 2, לכן בינו לבין כל צומת אחר יכולים להיות לכל היותר 2 מסלולים זרים בקשתות. לכן $\lambda(u,v), \lambda(v,w) \leq 2$. לעומת זאת, בין u ל־w קיימים שלושה מסלולים זרים בקשתות. לכן $\lambda(u,w) \geq 3$.



איור 7.15: שני מקרים למיקומו של v: $v \in V \setminus A$ או $v \in A$



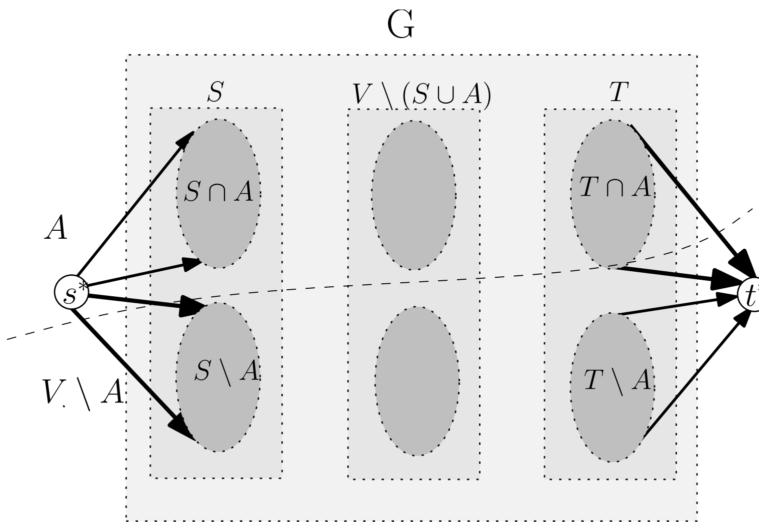
איור 7.16: מספר המסלולים הזרים בקשתות בין v ל־w ובין u ל־v הוא 2, ובין u ל־w הוא 3

3. הטרנזיטיביות נובעת מיידית מסעיף 1. אם $\lambda(u,v) \geq k$, ו־$\lambda(v,w) \geq k$, אז

$$\lambda(u,w) \geq \min\{\lambda(u,v), \lambda(v,w)\} \geq k.$$

פתרון תרגיל 7.16 (מעמוד 139)

נתבונן ברשת G' שנבנית ברדוקציה של בעיית ההפצה לבעיית הזרימה המקסימלית, ראו איור 7.17.



איור 7.17: רדוקציה של בעיית ההפצה לבעיית הזרימה המקסימלית

.

אנו יודעים כי פתרון אפשרי לבעיית ההפצה קיים אם ורק אם יש ב־G' זרימה בערך $\sum_{s\in S} d_s = -\sum_{t\in T} d_t$. בהנחה כי $\sum_{s\in S} d_s = -\sum_{t\in T} d_t = k$ תהיה זרימה בגודל כזה אם ורק אם הקיבול של כל חתך $s^* - t^*$ ברשת G' הוא לפחות k. כלומר לכל $A \subseteq V$ צריך להתקיים $c'(A \cup \{s\}) \geqslant k$ כאשר c' היא פונקציית הקיבול של קשתות G'. באיור 7.17 רואים כי

$$c'(A \cup \{s\} = c(A) + \sum_{s\in S\setminus A} d_s - \sum_{t\in T\cap A} d_t \, .$$

לכן התנאי לקיום פתרון אפשרי לבעיית ההפצה הוא:

$$c(A) + \sum_{s\in S\setminus A} d_s - \sum_{t\in T\cap A} d_t \geq \sum_{s\in S} d_s .$$

על ידי העברת אגפים נקבל:

$$c(A) \geq \sum_{s\in S} d_s - \sum_{s\in S\setminus A} d_s + \sum_{t\in T\cap A} d_t = \sum_{s\in S\cap A} d_s + \sum_{t\in T\cap A} d_t ,$$

כנדרש.

פתרון תרגיל 7.17 (מעמוד 140)

1. נשים לב כי

$$h(q) = \max_{\emptyset\neq X\subseteq V} (|E(X)| - q|X|) = \max_{\emptyset\neq X\subseteq V} |X| (|E(X)| / |X| - q) \, .$$

ברור שהפונקציה $h(q)$ היא מונוטונית יורדת. תהי

$$q^* = \max_{\emptyset\neq X\subseteq V} |E(X)| / |X|$$

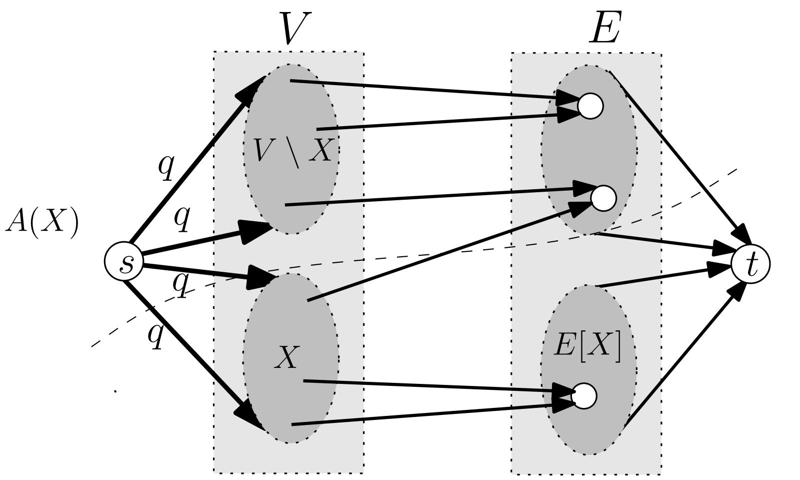
הצפיפות המקסימלית של תת־גרף של G. מתקיים $h(q) = 0$ אם ורק אם $q = q^*$. מכאן נקבל (על סמך היותה של $h(q)$ פונקציה מונוטונית יורדת), שאפשר לחשב את q^*, כמו גם את קבוצת הצמתים המתאימה X^*, בזמן פולינומיאלי באמצעות חיפוש בינרי.

2. $A(X)$ הוא חתך s-t ב־J כי $s \in A(X),\ t \notin A(X)$. כדי לראות מהו קיבולו של החתך $A(X)$ נתבונן באיור 7.18. כאן ההבחנה המרכזית היא כי ברשת J אין קשת מ־$V \setminus X$ ל־$E[X]$, כי בגרף G, לא יכולה להיות ב־$E[X]$ קשת שסמוכה לצומת ב־$V \setminus X$. לכן הקשתות שיוצאות מ־$A(X)$ הן משני סוגים בלבד:

- הקשתות מ־s ל־X: יש $|X|$ קשתות כאלה, ולכל אחת מהן קיבול של q.
- הקשתות מ־$E \setminus E[X]$ ל־t: יש $|E| - |E[X]|$ קשתות כאלה, ולכל אחת מהן קיבול של 1.

לכן קיבול החתך $A(X)$ הוא:

$$c(A(X)) = q \cdot |X| + |E| - |E[X]| = |E| - (|E[X]| - q \cdot |X|)$$



איור 7.18: החתך $A(X)$ ברשת J

3. ברשת J, לכל צומת e (כלומר הצומת שמתאים לקשת e) מתקיים:

- מהצומת יוצאת בדיוק קשת אחת, הקשת (e,t) שקיבולה הוא 1.
- הקשתות שנכנסות לצומת הן (u,e), (v,e); u ו־v הם הקצוות של e ב־G, והקיבול של כל קשת הוא 1.

לכן אם A הוא חתך s-t ב־J, ואם $v \in A$ עבור $v \in V$ אבל $e \notin A$ עבור קשת e הסמוכה ל־v ברשת G, אז $A \cup \{e\}$ הוא חתך s-t ב־J שקיבולו אינו עולה על הקיבול של A. הטענה הזו נובעת מהבחירה של החתך A בשאלה.

אלגוריתם פולינומיאלי למציאת A: לפי תרגיל 7.2, A היא קבוצת הצמתים מהם לא ניתן להגיע ל־t ברשת השיורית האחרונה באלגוריתם דיניץ–אדמונדס־קרפ.

4. לפי הפתרון שהוצג בסעיף 2 נוכל להסיק כי $e \in E \setminus A$ אם ורק אם הזנבות של שתי הקשתות שנכנסות ל־e הם ב־$X_q = V \setminus A$. זה שקול לכך שמתקיים $E \setminus A = E[X_q]$, כלומר: $A = \{s\} \cup (V \setminus X_q) \cup (E - E[X_q])$. כעת נשים לב כי

$$\begin{aligned} h(q) &= \max_{\emptyset \neq X \subseteq V} (|E(X)| - q|X|) \\ &= |E| - \min_{\emptyset \neq X \subseteq V} (|E| - (|E(X)| - q|X|)) = |E| - \min_{\emptyset \neq X \subseteq V} c(A(X)) . \end{aligned}$$

לכן, המקסימום של $h(q) = \max_{\emptyset \neq X \subseteq V} (|E(X)| - q|X|)$ והמינימום של $\min_{\emptyset \neq X \subseteq V} c(A(X))$ מתקבל באותה קבוצת צמתים X. כיוון שהחתך $A = A(X_q)$ הוא חתך מינימלי, המינימום של $\min_{\emptyset \neq X \subseteq V} c(A(X))$ מתקבל עבור $X = X_q$. ולכן $h(q) = |E[X_q]| - q \cdot |X_q|$.