**אלגוריתמים**

**ממ"ן 12 - תשובות**

מספר קורס: 20417

מנחה: אורן רות

שם הסטודנטית: ברית בן-דוד

ת"ז: 204879365

**שאלה 1:**

**מסלולים כמעט מזעריים.**

1. **טענה:** אם כל הצלעות ב- שימושיות, אז מסלול מזערי.

**הוכחה:** נוכיח באמצעות אינדוקציה שתופעל על כמות הצלעות במסלול .

**בסיס האינדוקציה:** יהי גרף . עבור (קיימת צלע אחת ב-G), ו- (כל הצלעות ב-), . ברור כי e היא צלע שימושית במסלול המזערי מכיוון ש- ולכן (המסלול יחיד). הראנו שכל הצלעות ב- שימושיות וכמובן ש- הוא מסלול מזערי.

**צעד האינדוקציה:**

**הנחת האינדוקציה:** נניח שהטענה נכונה עבור , כאשר (כל הצלעות ב-), כולן שימושיות ולכן מסלול מזערי.

**נוכיח** את הטענה עבור , כאשר (כל הצלעות ב-) וכולן צלעות שימושיות ונראה ש הוא מסלול מזערי.

לפי הנחת האינדוקציה, n הצלעות הראשונות ששייכות ל- הן שימושיות ולכן המסלול הוא מסלול מזערי. כעת נסתכל על הצלע ידוע כי צלע זו היא צלע שימושית. לכן, מהגדרת צלע שימושית, ברור כי זו צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהו. אם זו הצלע האחרונה במסלול מזערי כלשהו שבסופו גם נדרש למצוא את המסלול המזערי ביותר מ-v ל-v+1, אז ברור ש- זה המסלול המזערי שנמצא. ולכן, לפי הגישה החמדנית, בהוספת הצלע הבודדת שהיא צלע שימושית למסלול המזערי שקיים לנו נגיע למסלול מזערי . **כנדרש.**

הראנו כי האינדוקציה מתקיימת ולכן ברור שהטענה מתקיימת, כנדרש.

1. **טענה:** אם יש צלע לא שימושית ב- (אחת או יותר), אז איננו מסלול מזערי.

**הוכחה:** נוכיח טענה זו על דרך השלילה.

**נניח בשלילה** כי הוא מסלול מזערי. לכן, לפי הגישה החמדנית, אם נחזור אחורה צלע אחר צלע נקבל כי הינו מסלול מזערי, הינו מסלול מזערי וכן הלאה עד שנגיע ל- ולבסוף לקודוד s. ולכן, בהתאם לכך, עבור כל מסלול מזערי שכזה מתקיים היא צלע שימושית, היא צלע שימושית, היא צלע שימושית.... וכן הלאה עד היא צלע שימושית. במקרה כזה ניתן לראות שכל הצלעות במסלול הן צלעות שימושיות. קיבלנו סתירה לנתון. ולכן נסיק כי הטענה מתקיימת, כנדרש.

1. **טענה:** אם מסלול כמעט מזערי, אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה.

**הוכחה:** נחלק את ההוכחה ל-2 מקרים:

1. אם מסלול כמעט מזערי, אז מופיעה בו לכל היותר צלע אחת לא שימושית.
2. אם מסלול כמעט מזערי, אז מופיעה בו לפחות צלע אחת לא שימושית.

**הוכחת מקרה 1:** נוכיח טענה זו על דרך השלילה.

**נניח בשלילה** כי לא קיימת ב- צלע שהיא לא שימושית (ההיפך מלכל היותר צלע אחת), ז"א כל הצלעות ב- שימושיות, לכן לפי ההוכחה בסעיף א' אז הוא מסלול מזערי. קיבלנו סתירה. ולכן הטענה מתקיימת.

**הוכחת מקרה 2:** נוכיח טענה זו על דרך השלילה.

**נניח בשלילה** כי כל הצלעות ב- הן לא שימושית, לכן לפי ההוכחה בסעיף ב' אז איננו מסלול מזערי. נראה כי בפרט הצלע היא צלע לא שימושית.

במקרה שציינו ברור שכל תתי המסלולים של גם הם אינם מזעריים ובפרט המסלול איננו מזערי גם הוא.

נזכיר כי על-מנת לקבל מסלול כמעט מזערי עלינו לקבל מסלול שמשקלו הוא כמעט המשקל הקטן ביותר, ז"א בהינתן מסלול מזערי, מספיק שהצלע האחרונה בו תהיה צלע שמשקלה הוא אינו המשקל הקטן ביותר וכך נקבל מסלול כמעט מזערי.

עבור המסלול ראינו כי הוא אינו מסלול מזערי, ובנוסף הצלע איננה צלע שימושית, לכן ברור כי הוא אינו מסלול כמעט מזערי.

קיבלנו סתירה. ולכן הטענה מתקיימת.

**לסיכום,** הראנו כי אם מסלול כמעט מזערי, אז מופיעה בו לכל היותר צלע אחת לא שימושית וגם מופיעה בו לפחות צלע אחת לא שימושית, לכן מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה. והטענה מתקיימת, כנדרש.

1. **טענה:** תהי הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי . הוכיחו ש:
2. הרישא של מ-s ל- מהווה מסלול מזערי.
3. וגם הסיפא של מ- ל-v מהווה מסלול מזערי.

**הוכחת סעיף 1:** נוכיח טענה זו על דרך השלילה.

**נניח בשלילה** כי הרישא של מ-s ל- איננה מהווה מסלול מזערי, ז"א שלא כל הצלעות ברישא הן צלעות שימושיות, ז"א קיימת צלע אחת או יותר שאיננה צלע שימושית. ולכן נקבל שקיימות במסלול לפחות 2 צלעות שאינן שימושיות. קיבלנו סתירה, ולכן הטענה מתקיימת.

**הוכחת סעיף 2:** נוכיח טענה זו על דרך השלילה.

**נניח בשלילה** כי הסיפא של מ- ל-v איננה מהווה מסלול מזערי, ז"א שלא כל הצלעות בסיפא הן צלעות שימושיות, ז"א קיימת צלע אחת או יותר שאיננה צלע שימושית. ולכן נקבל שקיימות במסלול לפחות 2 צלעות שאינן שימושיות. קיבלנו סתירה, ולכן הטענה מתקיימת.

הוכחנו את סעיפים 1 ו-2 ולכן כל הטענה מתקיימת, כנדרש.

1. אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקודקוד v למקור s בזמן :

**תיאור האלגוריתם:**

נבנה אלגוריתם שמבוסס על האלגוריתם של דייקסטרה, כאשר השינוי היחידי שבו הוא שברגע שנקבל קודקוד שיש לו יותר משכן אחד, ז"א יותר מקשת אחת שיוצאת ממנו (זה יכול להיות הקודקוד ממנו מתחילים s ויכול להיות כל קודקוד אחר אחריו) – אז נבחר בהכרח לצרף למסלול שלנו את הקשת שהיא לא הקשת הקצרה ביותר. במידה והקשתות שוות נמשיך עד לקודקוד הבא ממנו יש פיצול ושם נבחר את הקשת שאינה הקשת הקצרה ביותר.

לאחר שנבחר בקשת זו נמשיך במימוש אלגוריתם דייקסטרה עד שנגיע ל-v (הקודקוד האחרון של המסלול).

אלגוריתם זה מבוסס על סעיף ד' - בו קיימת צלע שהיא צלע אחת יחידה שאינה שימושית (ז"א אינה הקצרה ביותר), כאשר הרישא של מ-s ל- מהווה מסלול מזערי וגם הסיפא של מ- ל-v מהווה מסלול מזערי, והמסלול שנוצר הוא מסלול כמעט מזערי .

**הוכחת נכונות:**

ההוכחה מבוססת על הוכחת סעיף ד', כאשר מלבד החלק בו מוצאים את הקשת שאינה שימושית מפעילים את אלגוריתם דייקסטרה, פעם אחת מ-s ל- ופעם שניה מ- ל-v. הוכחת אלגוריתם דייקסטרה מוכחת בספר.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

מימוש אלגוריתם דייקסטרה מתבצע באמצעות תור קדימויות על גרף בן V קודקודים ו-E קשתות, כך שזמן הריצה יהיה , כיוון שעוברים על כל הצלעות (לבדיקת המשקל שלהם), בתוספת הזמן הנדרש ל-V פעולות ExtractMin ול-E פעולות ChangeKey.

לכן, זמן הריצה הכולל הוא: . כנדרש.

**שאלה 2:**

**תיקון עץ פורש שהושמטה ממנו צלע**.

**תיאור האלגוריתם:**

1. נעבור על כל קשת ששייכת לעץ הפורש המזערי הנתון T () החל מהקודקוד s ועד שנסיים לעבור על כל הקשתות ששייכות לו, בתצורת מעבר של סריקה לעומק (DFS), עבור כל קשת אליה נגיע נבדוק:
   1. אם הגענו לקשת , כאשר 🡨 לא נמשיך את ההתקדמות לקודקוד ולא נוסיף את e לעץ T'.
   2. אחרת () 🡨 נוסיף את e לעץ T'.
   3. נמשיך בסריקה של שאר הקשתות והצמתים ששייכים ל-T.

**הוכחת נכונות:**

ראשית, נציין שבכל שלב האלגוריתם ייעצר, קיימות n קשתות ששייכות לעץ הפורש המזערי שנתון לנו – T, ולכן, ברור שבאיזשהו שלב נסיים לעבור על כל קשתות אלו. ברגע שנסיים לעבור על כל הקשתות האלגוריתם יסיים את פעילותו.

כעת, נוכיח את נכונות האלגוריתם באמצעות שימוש באינדוקציה על גודל העץ T.

**בסיס האינדוקציה:**

יהיו שתי צלעות בגרף G נתון. יהי עץ פורש מזערי T, כך שמתקיים , נסמן הצלע אותה נרצה להשמיט מהעץ T.

נעבור, בהתאם לאלגוריתם, על כל הקשתות ששייכות ל-T באמצעות סריקת DFS, נגיע לצלע שמקיימת , ולכן נוסיף את הצלע לעץ T'. נמשיך לצלע ונראה שמתקיים ש-*, זו הצלע אותה נרצה להשמיט, לכן לא נתקדם לעבר הקודקוד הבא ולא נוסיף את e ל-T', נרצה להמשיך להתקדם בסריקה לשאר הקשתות ששייכות ל-T אבל נראה שלא קיימות קשתות כאלו ונסיים את ריצת האלגוריתם.*

*קיבלנו גרף G' שבו עץ פורש מזערי T' שהוא כמובן קשיר.*

*ניתן לראות כי האלגוריתם מבצע את ייעודו ומסיים.*

***צעד האינדוקציה:***

***הנחת האינדוקציה:***

*נניח עבור n+k צלעות ששייכות לגרף G ומקיימות , ועבור נריץ את האלגוריתם ונקבל ש-m צלעות (כאשר m<n וגם קבוצת הקשתות m שייכת לקבוצת הקשתות n) מקיימות , כאשר T' הוא עץ פורש מזערי חדש המקיים*  וגם כל הצלעות שבו (m) מהוות רכיב קשירות אחד.

***הוכחת האינדוקציה:***

*נוכיח עבור n+1+k צלעות ששייכות לגרף G ומקיימות (כאשר מוסיפים את הצלע הנוספת לתחילת העץ, וממנות מתחילים את העץ T), ועבור נריץ את האלגוריתם ונקבל ש-m+1 צלעות (כאשר m+1<n+1 וגם קבוצת הקשתות m+1 שייכת לקבוצת הקשתות n+1) מקיימות , כאשר T' הוא עץ פורש מזערי חדש המקיים*  וגם כל הצלעות שבו (m+1) מהוות רכיב קשירות אחד.

נתחיל את ריצת האלגוריתם על הצלע הראשונה ששייכת ל-T, שזו הצלע שהוספנו, ברור שזו אינה הצלע e' כיוון שזו לא הצלע שהייתה קיימת קודמת לכן בעץ (אותה רצינו להשמיט) לכן, נוסיף אותה ל-T' ונמשיך, כעת נבדוק את שאר הצלעות n ששייכות ל-T. לפי הנחת האינדוקציה, ידוע כי בחיפוש DFS נמצא m קשתות ששייכות ל-T והן אינן e', כשביניהן בשלב כלשהו נגיע לצלע e'. נוסיף את כל m הצלעות לעץ החדש T' ובשלב בו הגענו לצלע e' אותה נרצה להשמיט, לא נמשיך לקודקוד שאחריה ולא נוסיף אותה לעץ T'.

קיבלנו *m+1 צלעות המקיימות , כאשר T' הוא עץ פורש מזערי חדש המקיים*  וגם כל הצלעות שבו (m+1) מהוות רכיב קשירות אחד. כנדרש.

*הראנו כי האינדוקציה מתקיימת עבור n+1 צלעות ומכאן נובע נכונות האלגוריתם.*

הראנו שהאלגוריתם מסתיים ונכון.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

במקרה הגרוע ביותר כל הצלעות מקיימות לעץ הנתון והצלע e' היא הצלע האחרונה שנמצאת בעץ, אליה נגיע כאשר נבצע סריקת DFS.

במקרה זה נצטרך לעבור על כל הקשתות שנמצאות בגרף המקורי ולהחליט עבור כל צלע האם להוסיף אותה ל-T' או לא.

לכן, זמן הריצה יהיה: , כנדרש.

**שאלה 3:**

**בעיית הספיקות (3-SAT) – כשלון החמדנות.**

נבחר בנוסחת 3-SAT הבאה:

נריץ את האלגוריתם ונבדוק את ערכי הליטרלים:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| השמה | סכימת הליטרלים באמצעות האלגוריתם | | ליטרל |
|  |  | נסכום את בפסוקיות שאינן סופקו: |  |
|  |  | הפסוקיות שסופקו, נסכום את בפסוקיות שאינן סופקו: |  |
|  |  | הפסוקיות שסופקו, נסכום את בפסוקיות שאינן סופקו: |  |
|  | | כל הפסוקיות סופקו וגם ההשמה של הנוסחה סופקה בהתאם, לכן לא משנה מה הערכים שיתקבלו עבור הליטרלים שנותרו. |  |
|  | |  |

ראינו כי האלגוריתם מבצע השמה לא מספקת לנוסחה.

נראה כי בכל מקרה הנוסחה הזו ספיקה (קיימת השמה שמספקת אותה):

אם נבחר:

*הראנו שהנוסחה שבחרנו ספיקה, אבל האלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת, כנדרש.*

**שאלה 4:**

**קידוד הופמן**.

**טענה:** לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה באמצעות אינדוקציה על כמות העלים בעץ T.

**בסיס האינדוקציה:**

יהי עץ T ובו n=1, עלה אחד בלבד (נציין שעלה מייצג אות), ברור שהשכיחות של האות הזו - היא השכיחות הכי פחות גבוהה (כי היא היחידה), נפעיל את האלגוריתם של הופמן ונמקם אותה במקום היחיד בעץ. נקבל כמובן שזהו קוד הופמן של הסדרה T.

**צעד האינדוקציה:**

**הנחת האינדוקציה:**

יהי עץ T ובו n עלים, נניח שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

**הוכחת האינדוקציה:**

יהי עץ T’ ובו n+1 עלים, נניח שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T’.

(נגדיר: – האות בעלת השכיחות הגבוהה ביותר, – האות בעלת השכיחות הכי פחות גבוהה, u – העלה שנוסף ל-T).

נחלק ל-3 מקרים:

1. u מייצג את האות בעלת השכיחות הגבוהה ביותר (באלפבית הנתון.

עבור n העלים האחרים בעץ, ומהנחת האינדוקציה ידוע שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של סדרה זו הוא T ומתקיים .

במקרה כזה, לפי הפעלת האלגוריתם של הופמן, נמקם את n העלים ששייכים ל-T בעץ T’ קודם, לפי השכיחויות שלהם, כך שבסוף נגיע ל- u ונמקם אותו באחד מהעלים הנמצאים בעומק הכי קטן ב-T’. ניתן לראות שבתצורה כזו שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T’. כנדרש.

1. u מייצג את האות בעלת השכיחות הכי פחות גבוהה ( (באלפבית הנתון.

עבור n העלים האחרים בעץ, ומהנחת האינדוקציה ידוע שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של סדרה זו הוא T ומתקיים .

במקרה כזה, לפי הפעלת האלגוריתם של הופמן, נמקם תחילה את u באחד מהעלים התחתונים בעץ, נחפש את השכיחות הכי פחות גבוהה אחריה (מבין סדרת השכיחויות ) ונמקם את שתיהן תחת אותו אב. כך נמשיך למקם את n-1 העלים אחרים בעץ T’, עד שנסיים. ניתן לראות שגם בתצורה זו קיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T’. כנדרש.

1. u מייצג את אות בעלת שכיחות כלשהי כך ש- באלפבית הנתון.

עבור n העלים האחרים בעץ, ומהנחת האינדוקציה ידוע שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של סדרה זו הוא T ומתקיים .

במקרה כזה, לפי הפעלת האלגוריתם של הופמן, נתחיל למקם עלים מסוימים השייכים ל-T’ עד שנגיע ל-u ונמקם אותה בעלה המתאים לה (לפי חישובי השכיחות המתאימות) ונמשיך למקם את שאר העלים אחרים בעץ T’, עד שנסיים. ניתן לראות שבתצורת סידור זו אחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T’, כנדרש.

הראנו כי בכל הוספה של עלה מסוים לעץ מושרש בינרי T נקבל עץ מושרש בינרי T’, בעת הפעלת האלגוריתם של הופמן נקבל סדרת שכיחויות שמהווה את אחד מעצי הופמן של הסדרה T’.

ולכן הטענה מתקיימת.