ממ"ן 11- אלגוריתמים

נדב אלון 322952631

**שאלה 1**

א.

נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול (כמות הקשתות):

יהי מסלול באורך 1 שמורכב רק מצלעות שימושיות. אז קיימת בו צלע אחת, e, שהיא גם האחרונה בו. לכן היא הקשת האחרונה (והיחידה) במסלול מזערי, כלומר המסלול שמורכב רק ממנה מזערי, מש"ל.

נניח ומסלול שמורכב מצלעות שימושיות בלבד באורך n-1 הוא מזערי.

יהי מסלול באורך n שמורכב מצלעות שימושיות בלבד. אז קיים תת מסלול, , כך שהצלע האחרונה ב היא (u,v).

תת המסלול מורכב רק מצלעות שימושיות ואורכו n-1, לכן מהנחת האינדוקציה מזערי, ולכן לכל מסלול P אחר מs לu מתקיים .

הצלע (u,v) שימושית, כלומר קיים מסלול מזערי מs לv כך שהיא הצלע האחרונה בו. נסמן את המסלול הזה .

משקלו של תת המסלול שמתחיל בs ונגמר בu של (קיים כי הצלע האחרונה ב היא (u,v)) גדול או שווה ל ולכן . אך מסלול מזערי ולכן , כלומר והמסלול מזערי, מש"ל.

ב.

יהי מסלול , ויהי הצלע (a,b) לא שימושית בו.

נשים לב שאם צלע לא שימושית אז לא קיים מסלול מזערי שמכיל אותה כצלע האחרונה בו. כלומר לכל מסלול שמכיל את הצלע, משקלו גדול משל המסלול המזערי אל הצומת שמגיע אליו.

יהי מסלול מזערי מs אל b. משקלו קטן משל תת המסלול ב שמתחיל בs ונגמר בb, מהטענה הקודמת. אם נמשיך מהמסלול הזה עד v בהתאם למסלול נקבל מסלול עם משקל קטן מ שמתחיל בs ונגמר בv. לכן לא מזערי.

ג.

יהי מסלול P עם שני צלעות לא שימושיות לפחות. נראה שניתן למצוא מסלול קצר יותר שהוא לא מזערי.

נניח שהקשת הראשונה היא (a,b) והשנייה היא (c,d). ניקח את המסלול המזערי ומשם נמשיך כמו המסלול P. זהו מסלול קצר יותר, כי תת המסלול ב P שנגמר בb הוא לא מזערי (נגמר בקשת לא שימושית) ולכן משקל המסלול הכולל גדול ממשקל המסלול החלופי.

לכן מסלול כמעט מזערי (אחד שחוץ ממסלולים מזעריים לא קיים מסלול קצר ממנו) לא יכול להכיל יותר מצלע לא שימושית אחת. אך אם הוא לא מכיל צלע לא שימושית אז כל הצלעות שלו שימושיות, ואז הוא מזערי לפי סעיף א', ולכן קיימת לפחות צלע אחת לא שימושית בו.

לכן יש בו בדיוק צלע לא שימושית אחת. מש"ל.

ד.

הוכחה שהרישא מסלול מזערי טריוויאלית לפי א': עד כל הקשתות הן שימושיות, ולכן מא' נובע שהמסלול מזערי.

הוכחה שהסיפא מסלול מזערי:

נניח בשלילה שיש מסלול מ לs שמשקלו קטן ממש ממשקל הסיפא.

הקשת e היא הקשת הלא שימושית היחידה במסלול ולכן שאר הקשתות (בפרט כל הקשתות בסיפא) הן שימושיות.

יהי המסלול המזערי . לפי ב' נובע שאם P מזערי אז אין בP צלעות לא שימושיות, כלומר כל הצלעות בP שימושיות. אז חיבור המסלול והסיפא נותן מסלול בעל קשתות שימושיות בלבד, ומא' נובע שזה מסלול מזערי. נתבונן כעת בחיבור עם המסלול . משקל קטן ממשקל הסיפא, ולכן משקל חיבורו עם קטן ממשקל חיבור הסיפא עם , בסתירה להיות החיבור הזה מסלול מזערי.

לכן אין מסלול שמשקלו קטן ממש ממשקל הסיפא, כלומר הסיפא גם מסלול מזערי.

מש"ל.

ה.

הפעלה של אלגוריתם דייקסטרה נותנת את המסלולים המזעריים מs לכל צומת אחרת בגרף.

נפעיל את האלגוריתם פעמיים, פעם ראשונה על הגרף המקורי מs ופעם שנייה על הגרף עם צלעות הפוכות מt. בכל פעם נסמן צלעות שימושיות ולא שימושיות. צלע שסומנה כשימושית בפעם הראשונה היא חלק ממסלול מזערי מs לצומת כלשי, וצמת שסומנה כשימושית בפעם השנייה היא חלק ממסלול מזערי מצומת כלשהי לt.

בכל פעם נשמור גם את המרחקים לs ולt.

כעת נעבור על כל הצלעות הלא שימושיות כך:

יהי צלע לא שימושית (u,v).

נשווה את אל המינימום השמור (מאותחל כאינסוף), ואם קטן ממנו נשמור את המסלול ואת המשקל שלו כמינימום חדש.

האלגוריתם נכון בגלל שהוא משווה בין מסלולים שמורכבים מצלע אחת לא שימושית ושאר הצמתות שימושיות, אז לפי סעיף ג' מסלול כמעט מזערי חייב להיות מהצורה הזאת, כלומר המסלול הכמעט מזערי הוא המינימום של הקבוצה הזאת, והאלגוריתם הזה מחפש את המינימום של הקבוצה.

זמן הריצה של האלגוריתם הוא:

כי דייקסטרה הוא ומעבר על כל הצלעות הלא שימושיות הוא .

**שאלה 2**

הגרף לא קשיר, כי כמות הקשתות שלו קטנה מ.

נריץ BFS על ה'עץ' המנותק בשביל למצוא את שני רכיבי הקשירות שלו. הורדת קשת אחת לא יכולה לגרום לניתוק של יותר מרכיב קשירות אחד.

[למקרה שזה לא טריוויאלי נוכיח:

נתבונן ברכיב קשירות יחיד. נניח בשלילה שניתוק קשת אחת גרמה להווצרות של יותר משני רכיבי קשירות. הוספת קשת יכולה לחבר שני רכיבי קשירות לכל היותר אם מתחילה ברכיב קשירות אחד ומובילה לאחר. אז חיבור הקשת שהורדנו גורמת לכך שבגרף יש לפחות שני רכיבי קשירות, למרות שהוא זהה לגרף המקורי בעל רכיב קשירות יחיד, סתירה.]

הרצת BFS לוקחת זמן ריצה.

כעת צריך לעבור על כל הקשתות בחתך של רכיבי הקשירות, ולמצוא את הקשת הזולה ביותר. כמות הקשתות בחתך קטן מכמות הקשתות בגרף, כלומר . מציאת מינימום בקבוצה שגודלה N לוקח זמן. לכן מציאת הקשת המינימלית שנמצאת בחתך לוקח זמן.

לאחר שמצאנו את הקשת המינימלית נוסיפה לעץ, וסיימנו.

הוכחת נכונות:

נניח בשלילה שהעץ שמצא האלגוריתם אינו מינימלי.

לפי משפט 4.17 בספר נובע שהצלע שהוספנו לעץ חייבת להופיע בכל עץ פורש מינימלי, אז הצלעות שגורמות לעץ לא להיות מינימלי חייבות להופיע ברכיבי הקשירות. אך הצלעות האלו מופיעות גם בעץ הפורש המינימלי המקורי. על יתר פירוט, רכיבי הקשירות הם תתי עצים של עץ פורש מינימלי ואם לא היו מינימליים בעצמם היה אפשר להחליפם בעצים כן מינימליים, ולכן קיבלנו סתירה על בעייתיות הצלעות שברכיבי הקשירות.

לכן עץ בהכרח מינימלי, מש"ל.

**שאלה 3**

האלגוריתם ישים בx1 T כי רואה שזה מספק אותו ב2 מהפסוקיות ואת -x1 באחד.

כדומה, האלגוריתם ישים בx2 ובx3 T, מה שיגרום לפסיקה הרביעיות לא להיות מסופקת ובכך האלגוריתם נכשל כי כל שמכילה התנאים שהוספו לא יכולה יותר לספק את הפסוק.

כדי להראות שהפסוק ספיק כל שצריך הוא להראות השמה שבה הוא T:

הראשון מסופק כי x1=T, השני מסופק כי x5=T, השלישי מסופק כי x3=T, הרביעי מסופק כי x2=F, החמישי מסופק כי x1=T, השישי מסופק כי x4=T והשביעי מסופק כי x3=T.

מש"ל.

**שאלה 4**

*נתבונן בסדרת השכיחויות .*

*נוכיח באינדוקציה על עומק העץ שעץ הופמן של הסדרה הוא T:*

*אם עומק 0 אז יש עלה יחיד, ואליו כל שכיחות תביא עץ הופמן.*

*נניח שלכל עץ בינארי לחלוטין מעומק קטן או שווה לn-1 הסדרה f מגדירה עץ הופמן שווה אליו.*

*יהי עץ בינארי לחלוטין מעומק n.*

*נקצוץ את העץ כך:*

*לכל עלה מעומק n נמצע את אחיו (קיים בהכרח בגלל שהעץ בינארי לחלוטין). פונקציית השכיחויות מגדירה את השכיחות של שניהם כ.*

*אם נמחק אותם ונגדיר את שכיחות אביהם כ נקבל עץ בינארי לחלוטין מעומק n-1 ששכיחויותיו תואמות את השכיחויות שמגדירה הפונקציה (אכן, עומק אביהם של כל העלים שמחקנו הוא n-1 אז הפונקציה הייתה מגדירה את שכיחותו כ).*

*לכן העץ החדש הוא עץ הופמן. כעת כל שנותר הוא לפרוש חזרה את העלים שחתכנו ונקבל עץ הופמן בגובה n שתואם את T, מוגדר על סדרת השכיחויות f. העץ הזה הוא עץ הופמן מאופן הבנייה של עצי הופמן ברקורסיה- לכל שני עלים הכי פחות שכיחים, מאחדים אותם לעלה משותף ובונים עץ הופמן איתו, ולאחר מכן פורשים את שני העלים החוצה.*

*לכן העץ בעומק n הוא עץ הופמן, כנדרש.*

*מש"ל.*