# שאלה 1

## סעיף א

נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול :

בסיס: עבור מסלול באורך 1 (קשת בודדת), כלומר . אנחנו יודעים לפי ההנחה כי צלע שימושית, כלומר היא חלק ממסלול מזערי כלשהו. ובגלל שכל תת מסלול של מסלול מזערי הוא תת מסלול מזערי בפני עצמו אז קיבלנו שהקשת היא המסלול המזערי, כלומר מזערי.

צעד: נניח שהטענה מתקיימת עבור אורך נוכיח שהיא מתקיימת עבור .

על פי הנחת השאלה, כל ה- צלעות ב- שימושיות. נסמן את הצלע האחרונה שלו ב-. צלע זו היא שימושית ולכן היא צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהו, שנסמן אותו ב-. נניח בשלילה כי . בגלל שהצלע האחרונה שלהם משותפת (לפי הגדרת הצלע השימושית) ומשקלה חיובי, אז נקבל שאם נסמן ב- וב- את תתי המסלול ללא הצלע אז , כלומר קיבלנו . אורך המסלול הוא (כי הורדנו צלע בודדת), כל הצלעות בו שימושיות לפי ההנחה, ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיבלנו כי הוא מזערי. ולכן יש לנו סתירה כי מצאנו מסלול עם משקל קטן יותר. ולכן קיבלנו כי צעד האינדוקציה מתקיים.

ובכך הוכחנו כי אם כל הצלעות ב- שימושיות אז מזערי.

מש"ל

## סעיף ב

אם יש צלע לא שימושית ב-, נסמן אותה ב-. נסמן ב- את תת המסלול של המוביל בין ל-. בגלל שהצלע היא לא שימושית, קיימת צלע אחרת הנכנסת ל- שהיא צלע שימושית, ולכן קיים מסלול מזערי המקיים . ניקח את תת המסלול מתוך המוביל בין ל-. נבנה מסלול חדש שהוא שרשור של ו-. ובכך נקבל כי , כלומר , ולכן לא מזערי.

מש"ל

## סעיף ג

לפי סעיף א, אם אין צלעות לא שימושיות, כלומר כל הצלעות שימושיות ואז בהכרח המסלול הוא מזערי, ולא כמעט מזערי. ולכן מספר הצלעות הלא שימושיות הוא לפחות אחד. נוכיח כעט כי הוא לכל היותר אחד.

נניח בשלילה כי המספר אינו לכל היותר אחד, כלומר יש לפחות 2 קשתות לא שימושיות במסלול . נסמן שתי הקשתות הלא השימושיות השונות (כי יש לפחות 2 לפי הנחת השלילה) כ-. בלי הגבלת הכלליות נבחר ש- מופיעה קודם במסלול ("קרובה" יותר ל-).

נסתכל על תת המסלול (מתוך מסלול ). מכיוון ויש בו צלע לא שימושית לפי הטענה מסעיף ב המסלול איננו מסלול מזערי, ולכן קיים מסלול מזערי אחר המקיים . נגדיר כעט מסלול חדש בשם שהוא שרשור המסלולים ו- (שזה תת המסלול ב- בין לבין ).

נשים לב שלפי ההנחה ש- מופיעה אחרי , מקבלים שהצלע נמצאת בנוסף גם ב- ולכן גם נמצאת ב-. מכיוון והצלע הזאת לא שימושית לפי הסימון, המסלול איננו מסלול מזערי (לפי הטענה מסעיף ב), ולכן קיים מסלול המקיים . אבל אם נציב משקלים נקבל (נזכור שמשקל שרשור מסלולים הוא למעשה סכום המשקלים):

*ובכך קיבלנו שקיימים שני מסלולים בין*  ל- *בעלי משקל קטן יותר ממסלול , שזה סותר את הגדרת מסלול כמעט מזערי. ולכן מספר הצלעות הלא שימושיות במסלול כמעט מזערי הוא לכל היותר אחד.*

*סה"כ קיבלנו כי מספר הצלעות הלא שימושיות הוא לפחות אחד ולכל היותר אחד ולכן חייב להיות בדיוק אחד.*

*מש"ל*

## סעיף ד

יהי מסלול מסלול כמעט מזערי בין ל-. נסמן ב- את הצלע הלא שימושית היחידה (לפי סעיף ג אכן יודעים שהיא יחידה וקיימת) במסלול . ולכן כל שאר הצלעות במסלול הן צלעות שימושיות.

הרישא של מ- ל- הוא תת מסלול של שנסמן אותו כ-. תת מסלול זה מורכב מצלעות שימושיות בלבד (הוכח בפסקה הקודמת) ולכן לפי הטענה מסעיף א הוא מסלול מזערי.

הסיפא של מ- ל- הוא תת מסלול של שנסמן אותו כ-. תת מסלול זה גם כן מורכב מצלעות שימושיות בלבד (הוכח בפסקה הראשונה) ולכן שוב לפי טענה מסעיף א, מסלול מזערי.

מש"ל

## סעיף ה

### רעיון האלגוריתם

אלגוריתם דייקסטרה (Dijkstra) מוצא עבורנו משקלי מסלולים קלים ביותר, כלומר מסלולים מזעריים בשפת השאלה.

נשתמש באלגוריתם כדי למצוא מסלולים מזעריים מ- ל- ומסלולים מזעריים מ- ל- כאשר הוא צלע לא שימושית. ואז נמצא את המסלול בעל המשקל הקטן ביותר מתוך הקבוצה הזאת.

### האלגוריתם

מקבל גרף וקודקודים :

1. נגדיר לכל צלע את המבנה
2. נריץ אלגוריתם דייקסטרה על הגרף מקודקוד , ונקבל מסלולים מזעריים מהקודקוד לשאר הקודקודים בגרף.  
   במהלך הריצה, עבור כל צומת לפי שהוא מוסיף את הצומת לצמתים שביקרנו בהם (אם נסתכל באלגוריתם של דייקסטרה מהספר בעמוד 149), נסמן את הצלע שהיא הצלע במסלול שהובילה ל- הכי מזערי ונסמן צלע זאת .  
   נשמור את מבנה משקלי המסלולים מהאלגוריתם כ-.
3. נבנה גרף חדש שהוא היפוך הקשתות מגרף , כלומר , ולכל צלע אם מתקיים . ערכי המשקלים לא משתנים לכל קשת .
4. נריץ אלגוריתם דייקסטרה על הגרף מקודקוד , ונעדכן את בדומה לסעיף ב, אבל הפעם עבור כל צלע אחרונה במסלול מזערי נסמן (כלומר הפכנו בחזרה לסדר המקורי).  
   נשמור את מבנה משקלי המסלולים מהאלגוריתם כ-.
5. נגדיר , ו-
6. נעבור על כל צלע :
   1. אם , כלומר זוהי צלע שימושית, עבור לצלע הבאה בלולאה.
   2. אחרת, אנחנו יודעים שזו צלע לא שימושית ואם מתקיים , נשמור קשת ונעדכן את לערך החדש .
7. בסוף בעזרת התוצאות מ-דייקסטרה משלב 2 ושלב 4 נבנה מסלול ונחזיר אותו.  
   אם אז לא קיים מסלול כמעט מזערי.

### ניתוח זמן ריצה

בניית היא פעולה בסיבוכיות (היפוך כל צלע). אלגוריתם דייקסטרה (התוספת שלנו היא ביצוע מספר פעולות קבוע ולכן אין זה משנה סיבוכיות) רץ פעמיים וגודל הקבוצות זהה בין שתי הריצות ולכן הסיבוכיות היא . המעבר על הלולאה בשלב 6 הוא ביצוע פעולות עם מחיר קבוע, כלומר אבל סה"כ פעמים (לכל קשת). שחזור המסלול בשלב 7 הוא במחיר מרבי של . ולכן סה"כ קיבלנו:

### הוכחת נכונות

לפי טענת עזר וסופיות אלגוריתם דייקסטרה, שלבים 1-4 הם סופיים. בשלב 6 אנחנו מבצעים מספר פעולות קבוע על קבוצה סופית ולכן האלגוריתם מסיים את עבודתו.

בשלב 6, לפי טענת עזר, קיבלנו ש- צלע שימושית אם"ם . לפי סעיף ג, במסלול כמעט מזערי קיימת צלע לא שימושית אחת ויחידה. לפי סעיף ד, אנחנו יודעים במסלול כמעט מזערי הרישא והסיפא של הקשת הלא שימושית הבודדת הם מסלולים מזעריים.

עבור כל צלע לא שימושית , מתקיים כי (לפי נכונות דייקסטרה), וגם כי (לפי נכונות דייקסטרה ולפי היפוך גרפים ללא שינוי משקלים). ולכן המסלול הוא מסלול המזערי ביותר בין ל- העובר דרך .   
ואז למעשה בשלב 6 אנחנו בוחרים את הקשת שדרכה המסלול שעובר הוא המזערי ביותר, ובעזרת המבנים המתקבלים מ-דייקסטרה אנחנו יכולים לשחזר את המסלולים ובכך נקבל את המסלול הכמעט מזערי בין ל-.

הערה: נשים לב שבכדי שלא יהיה מסלול כמעט מזערי, אנחנו צריכים שלא יהיה מסלול עם צלע לא שימושית, כלומר או שאין קשתות לא שימושיות (ואז שלב 6 מדולג) או שעבור כל קשת לא שימושית אין מסלול מ- אליו או ממנו ל- (כלומר אחד המסלולים גודלו ), ואז התנאי בשלב לא מתקיים. ולכן בכל המקרים בסוף שלב 6 נקבל .

טענת עזר: כתוצאה מהרצת אלגוריתם דייקסטרה עם התוספות נקבל את כל הצלעות השימושיות.

בכל שלב של הרצת הלולאה באלגוריתם דייקסטרה כל הצלעות השימושיות במסלולים בין קודקוד המקור והקודקודים שטיפלנו בהם כבר סומנו. נוכיח באינדוקציה על מספר הרצות הלולאה של דייקסטרה:

בסיס: לא טיפלנו בשום קודקוד ולכן אין צלעות שלא טיפלנו בהם.

צעד: עבור צומת קיבלנו בזכות דייקסטרה את המסלול המזערי שלו, שהוא מורכב כולו מקודקודים ב- (עמוד 150 בספר) שלפי טענת האינדוקציה כבר מצאנו את כל הצלעות השימושיות הרלוונטיות. ולכן במסלול המזערי שלפי סעיף ב, כל הצלעות שימושיות. כל הצלעות פרט לאחרונה כבר טופלו בריצות הלולאה הקודמות (לפי צעד האינדוקציה) ולכן נשאר לטפל רק באחרונה.

ובכך הוכחנו את טענת העזר.

מש"ל

# שאלה 2

עבור גרף קשיר לא מכוון עם משקלים אי-שליליים לכל הצלעות, נתון עץ פורש מזערי . נגדיר גרף שהוא הגרף עם השמטה של הצלע כאשר עדיין קשיר.

## רעיון האלגוריתם

האלגוריתם לוקח את העץ , מוריד ממנו את הצלע ואז מחלק אותו לשני רכיבי קשירויות, מוצא את הצלע שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר בין שני רכיבי הקשירות ואז .

## האלגוריתם

נסמן הצלע שהשמטנו מ-.

1. נגדיר בתור העץ עם השמטת הצלע .
2. נריץ עץ גרף החל מצומת . נשמור מהאלגוריתם את המבנה המציג לכל צומת  
    האם האלגוריתם ביקר אותו.
3. נגדיר , ו-
4. עבור כל קשת :
   1. אם (כלומר הוא ביקר בשניהם או לא ביקר בשניהם) אז דלג לצלע הבאה בלולאה.
   2. אחרת, כלומר ביקר רק בצומת אחד מבין השניים, אם (כלומר משקל הצלע קטן יותר) אז נשמור את הקשת ונעדכן .
5. נוסיף את הקשת לגרף ונחזיר אותו בתור העץ הפורש המזערי של גרף .

## ניתוח זמן ריצה

בשלב 4, אנחנו מבצעים מספר קבוע של פעולות על כל הצלעות ב- ולכן נקבל כי סיבוכיות כל שלב 4 היא . סיבוכיות זמן הריצה בשלב 2 (ה-BFS) הוא . נשים לב שגרף הוא קשיר, ולכן מתקיים , ולכן סה"כ קיבלנו שסיבוכיות זמן הריצה היא .

## הוכחת נכונות

שלב 2 הוא סופי כי BFS הוא סופי (והוא ללא שינויים), ובשלב 4 אנחנו עוברים על קבוצה סופית עם מספר קבוע של פעולות ולכן סה"כ האלגוריתם הוא סופי.

נסמן ב- את (מספר הצמתים בגרף ). לפי משפט 3.1 (עמוד 84 בספר) מתקיים . אנחנו משמיטים צלע ולכן . מספר הצמתים לא השתנה, ולכן לפי משפט 3.1 הוא לא עץ.

נסמן ב- את קבוצת הקשירות של הצומת , שבזכות נכונות BFS אנחנו מקבלים אותו בשלב 2. מתקיים (לא יכול להיות כי אז זה אומר שקיים מסלול בין ל- בגרף שלא עובר דרך , משמע יש מעגל וזה בסתירה להיותו עץ שלפי הגדרה הוא חסר מעגלים). מכיוון ו-קיימת הקבוצה שהיא רכיב הקשירות השני בגרף . נשים לב כי ולכן , כלומר קיבלנו לא ריקות.

לפי ביטול ההנחה על עלויות קשתות שונות (עמוד 161 בספר) ולפי משפט 4.17 (עמוד 157 בספר), הקשת בעלת המשקל הקטן ביותר שקצה אחד שלה ב- והקצה השני שלה ב-, היא קשת שכל עץ פורש יכלול אותה. נשים לב שבגלל שגרף קשיר (נתון) אז קיימת צלע המחברת את שני רכיבי הקשירות. כמו כן, בגלל שאנחנו בוחרים צלע בודדת המחברת את שני רכיבי הקשירות אז לא ייוצר מעגל ולכן נקבל עץ פורש (עכשיו נוכיח שהוא בהכרח מזערי).

נניח בשלילה שהעץ המתקבל ( זו הצלע המינימלית מהפסקה הקודמת) אינו עץ פורש מזערי של גרף . מכיוון והוכחנו בפסקה הקודמת כי חייבת להיות בעץ פורש מזערי, כלומר קיימים שני צמתים כך שהמסלול לא מזערי בגרף , כלומר קיים מסלול אחר המקיים . אם אז גם (כי אם היה צורך בצלע , סימן שהורדת פגעה במסלול ולכן חובה לחברו דרך ). ולכן אם אז ההבדל בין שני המסלולים הוא ברישא או בסיפא (או בשניהם). ואם במקרה השני אז הוא שוב נמצא באחד מרכיבי הקשירויות. בלי הגבלת הכלליות נבחר שזה קורה ברכיב הקשירות .

כלומר קיימים שני צמתים שקיים מסלול לא מזערי בגרף , כלומר קיים מסלול אחר המקיים . אבל נשים לב כי המסלול מבוסס רק על קשתות בתוך , המקיימות , כלומר התקבל מתוך העץ והוא המסלול המזערי ביותר בגרף , אשר ולכן יש סתירה עם ההנחה.

ולכן הגרף הנבנה על ידי האלגוריתם הוא עץ פורש מזערי של אם הוא קיים, ובזכות כך ש- קשיר אז הוא אכן קיים ולכן האלגוריתם תמיד מחזיר תשובה נכונה.

מש"ל

# שאלה 3

נוסחת ה-3-CNF המפילה את האלגוריתם החמדן היא:

מעל 4 המשתנים . נשים לב כי כל פסוקית שונה זו מזו, ויש לנו סה"כ 9 פסוקיות.

ננתח את ריצת האלגוריתם כדי להציג שהוא לא מוצא השמה מספקת:

1. מתחילים ממשתנה : יש סה"כ 5 בתצוגה (השורה הראשונה) ו-4 בתצוגה (השורה השנייה) ולכן בוחרים להציב . ולכן כל השורה הראשונה מסופקת, ונטפל בשורה השנייה בלבד.
2. ממשיכים עם המשתנה : יש 2 בתצוגה של ו-2 בתצוגה , ולכן הוא יבחר אחד מהאופציות:
   1. אם בחר אז נשארים הפסוקיות שלא ניתן לספק לא משנה מה נציב ב-.
   2. אם בחר אז נשארים הפסוקיות שלא ניתן לספק לא משנה מה נציב ב-.
   3. הערה: למעשה אם נשים לב, כל השורה השנייה לא ניתנת לסיפוק כל עוד .

לעומת זאת, אם נסתכל על ההשמה , ונסמן בירוק כל מה שמסופק:

ניתן לראות שכל פסוקית מסופקת, ולכן כל הנוסחה מסופקת, ולכן קיימת השמה מספקת, למרות שהאלגוריתם החמדן לא ימצא אותה (הטעות שלו היא בהשמה עבור ).

# שאלה 4

יהי עץ מושרש שאת השורש נסמן בצומת , כאשר העץ הוא בינארי לחלוטין, כלומר כל צומת הוא עלה או בעל בדיוק שני בנים. לכל צומת נסמן ב- את עומק הצומת בעץ, כלומר המרחק שלו מ-.

נגדיר את סדרת השכיחויות שלכל עלה ( מספר העלה שמתחיל מ-1 ועד מספר העלים ב- ) כך ש-, כלומר . נוכיח באינדוקציה על שזה עומק כל העץ שעבור הסדרה הנ"ל קיים עץ הופמן הזהה לעץ :

בסיס : אם עומק העץ הוא 0, כלומר שכל הגרף הוא למעשה , כלומר יש עלה בודד, ולכן סדרת השכיחויות היא , ועבור סדרה כזאת עץ הופמן הוא גם בעל עלה בודד, כלומר צומת , כלומר זהה לגרף .

צעד: נניח שהטענה מתקיימת עבור עץ שעומקו . נוכיח שהיא מתקיימת עבור עץ שעומקו .

יהי עץ בינארי לחלוטין שעומקו . כלומר קיים צומת המקיים . האבא של , אינו עלה (יש לו בן אחד) ולכן לפי הגדרת עץ בינארי לחלוטין קיים צומת שהוא אח של , כלומר מקיים .

ניצור עץ חדש שהוא שכפול של , כאשר *לכל צומת המקיים* נמצא את האח שלו (שהוכחנו שהוא קיים) ונסמן אותו ב-. נבחר את האב של שני האחים ונסמן ב- ונקבל שהשכיחות שלו היא סכום השכיחויות, כלומר נקבל . נמחק את מ- ונציב את כשכיחות של צומת האב של האחים, שלאחר שמחקנו את הוא נהיה עלה, ונשים לב שמתקיים לפי הגדרת עומק.

סה"כ קיבלנו עץ בעומק (כי הורדנו כל צומת שעומקו ), כאשר לכל עלה , אם הוא היה עלה ב- הוא נשאר עם אותה שכיחות שהגדרנו בהתחלה, ואחרת הוא כעט עם שכיחות . נשים לב כי בבנייה הורדנו כל פעם 2 צמתים בנים של צומת מסוים, ולכן קיבלנו בסוף עץ בינארי לחלוטין. פונקציות סדרת השכיחות של העלים מתאימה לבנייה ההתחלתית.

ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיים עץ הופמן שזהה ל-. נשחזר מ- בחזרה את המקורי על ידי ביצוע הפעולות ההופכיות למה שביצענו ונקבל עץ הופמן תקין שהוא זהה ל-.

מש"ל