ממ"ן 12 – לאה בן צבי

שאלה 1:

1. נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול.

טענה: אם כל הצלעות ב- שימושיות, אז מסלול מזערי.

בסיס: יהי מסלול באורך 1, אז במסלול זה תהיה קשת אחת ונתון כי היא קשת שימושית. אז, קיים מסלול מזערי מ- ל- שהיא הקשת האחרונה בו. כל מסלול אחר שמכיל קשתות בנוסף לקשת זו, או שלא יכיל את קשת זו בכלל, יקיים . על כן הוא המסלול המזערי.

*צעד: נניח שהטענה נכון עבור מסלול באורך . נוכיח את נכונותה עבור מסלול באורך .*

*יהי מסלול באורך ונתון כי כל הקשתות בו הן שימושיות. לפי ההנחה, קיים תת-מסלול באורך שכל הקשתות בו הן שימושיות והוא מסלול מזערי, כלומר . מכיוון שכל הקשתות ב- הן שימושיות, הקשת האחרונה היא גם קשת שימושית ועל כן קיים מסלול מזערי שהיא הקשת האחרונה בו. נניח, על דרך השלילה כי קיים מסלול אחר שהוא המסלול המזערי והקשת האחרונה בו היא . אם נסיר את נקבל ש- הוא מסלול מזערי, וזאת בסתירה לכך ש-. לכן, הוא המסלול המזערי.*

*על כן, כל מסלול באורך שכל הצלעות בו הן צלעות שימושיות הוא מסלול מזערי.*

1. *יהי מסלול שכל צלעותיו שימושיות פרט לקשת אחת עבור הקודקודים . אזי, במסלול , כל הצלעות הן שימושיות ולפי סעיף א' הוא מסלול מזערי. היות ו- אינה קשת שימושית, היא אינה חלק ממסלול מזערי. אז קיים מסלול שונה שהוא מסלול מזערי כך ש- אינה האחרונה בו. ניתן להוסיף למסלול את המסלול , שכל צלעותיו הן גם שימושיות ולכן הוא מסלול מזערי.*

*המסלול שיצרנו יקיים ולכן אינו מסלול מזערי.*

*ובאופן כללי, עבור כל מסלול שיש בו צלעות לא שימושיות, לכל צלע לא שימושית ניתן יהיה למצוא מסלול מזערי ולהחליף את בו. כך, לאחר החלפות נקבל מסלול חדש שכל צלעותיו הן שימושיות והוא מזערי.*

1. *לפי סעיף א', במסלול כמעט מזערי, חייבת להיות לפחות צלע שימושית אחת (אם כל הצלעות יהיו שימושיות היא תהיה מסלול מזערי).*

*יהי מסלול בעל צלעות לא שימושיות. נניח כי הוא מסלול כמעט מזערי. אזי קיים מסלול שהוא מסלול מזערי ומתקיים עבור כל מסלול בקבוצה של שאר המסלולים:*

*תהי צומת לא שימושית ב-. בדומה לסעיף ב', ניתן למצוא מסלול שכל צלעותיו שימושיות והוא מקיים:*

*נניח כי , אז קיבלנו מסלול חדש שכל צלעותיו הן שימושיות ולפי סעיף א' הוא מזערי ומתקיים:*

*במקרה זה, הוא בהחלט מסלול כמעט מזערי.*

*אחרת, , נקבל מסלול שיש לו צלעות שימושיות ולכן הוא אינו מזערי ומתקיים:*

*קיבלנו ש- הוא המסלול הכמעט מזערי ולא ,, בסתירה לטענתנו. לכן עבור צלעות לא שימושיות המסלול אינו מסלול כמעט מזערי.*

1. *תהי הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי . לפי הנתון פרט לקשת זו כל הקשתות שימושיות, בפרט הקשתות לפניה, המסלול שהוא ראשה, ואחריה, המסלול שהוא סיפא. לפי סעיף א', היות ובשני המסלולים כל הקשתות שימושיות, הם מסלולים מזעריים.*
2. ***רעיון האלגוריתם:***

*נשתמש באלגוריתם דייקסטרה כדי למצוא את המסלול המזערי ואז נהפוך את כיוון הצלעות של הגרף. עבור כל קשת במסלול שמצאנו נסיר את היפוכה מהגרף ונריץ את אלגוריתם דייקסטרה מ- ל-. הראשה של הגרף הכמעט מזערי תהיה וסיפתו תהיה שהוא המסלול הצר יותר במצאנו מ- ל- לאחר היפוך כיוון הצלעות.*

***תיאור האלגוריתם:***

1. *נריץ את אלגוריתם דייקסטרה (עמוד 149) בספר הלימוד על גרף מ- ונעצור את האלגוריתם כאשר יתקיים . נקבל את הגרף המזערי .*
2. *נהפוך את כיוון הקשתות של הגרף ונקבל את .*
3. *עבור כל קשת נמחק את ההיפוך שלה מהגרף ונריץ על את אלגוריתם דייקסטרה מ-. נעצור את האלגוריתם כאשר . לבסוף, נחזיר את הקשת שהסרנו ל-.*
4. *נהפוך את כיוון הקשתות של המסלול שהעלות שלו היא המינימלית ונשמור אותו במשתנה .*
5. *המסלול הכמעט מזערי הוא המסלול המורכב ב- ומ-, נקרא לו .*

***נכונות האלגוריתם:***

*עבור כל בהרצת אלגוריתם דייקסטרה מ- ל-, לכל קשת שאותה הוא בודק, הוא מוצא את המסלול המזערי מ- ל- כך שהקשת שאותה הוא בוחר להוסיף היא קשת שימושית. לכן, כל קשת שנמצאת במסלול שהוא יוצר, היא קשת שימושית במסלול מזערי כלשהו. וכן גם רישאתו כל הקשתות הן שימושיות. לכן, לפי סעיף א' היא מסלול מזערי.*

*יהי קשת הנמצאת ב-. הקשת אינה קשת צלע שימושית כי היא אינה קשת אחרונה במסלול שהוא מסלול מזערי (אם גם וגם יהיו ב- אז הוא לא היה עץ).*

***נוכיח שכל הצלעות במסלול הן שימושיות:*** *אלגוריתם דייקסטרה מחזיר את המסלול המזערי מ- ל- ב- ובפרט נקבל את המסלול המזערי מ- ל- שהוא תת-מסלול שלו. כפי שהראנו, כל הצלעות במסלול שהוא מחזיר הן צלעות שימושיות במסלול מ- ל- ב-. בהכרח מתקיים כי אם נהפוך את כיוון הקשתות במסלול שקיבלנו, נקבל את שכל צלעותיו שימושיות ב-.*

*נניח על דרך השלילה כי קיים שהוא המסלול הכמעט מזערי ולכן הוא מקיים:*

ושני התנאים הבאים:

1. לפי סעיף א', המסלול הכמעט מזערי צריך להכיל צלע לא שימושית אחת.
2. לפי סעיף ד', ראשיתו שלא כוללת את הצלע השימושית היא מסלול מזערי. וכך גם סיפאתו שאינו כוללת את הצלע הלא שימושית.

*אך זו סתירה, מכיוון שבין כל המסלולים שעונים לשני קריטריונים אלה, בחרנו את המסלול המינימלי ולכן כזה לא קיים. על כן הוא המסלול המזערי.*

***ניתוח סיבוכיות האלגוריתם:***

*סיבוכיות של הרצת אלגוריתם דייקסטרה היא לפי משפט 4.15.*

*היפוך הכיוון של צלעות הגרף לוקח כמספר הצלעות בגרף (בפעם הראשונה ובפעם השנייה).*

*המסלול מכיל מספר קבוע של קשתות. מחיקה והחזרת קשת בכל איטרציה היא קבועה ולכן בסיבוכיות . והרצת אלגוריתם דייקסטרה בכל איטרציה כאמור קורה בזמן . השוואה בין מסלול למסלול קוראת בזמן .*

*לכן סיבוכיותו של האלגוריתם כולו היא:*

*שאלה 2:*

***רעיון האלגוריתם:***

*הסרת הצלע מ- גרמה ליצירתם של שני רכיבי קשירות ב-, נסמן אותם ו-. כדי לתקן את הגרף, נמצא קשת המחברת בין שני רכיבי הקשירות שעלותה מינימלית. נריץ אלגוריתם (עם מימוש בעזרת רשימת סמיכויות כפי שמופיע בספר). מצומת כלשהו , ובכל קשת שהגרף יסרוק נבדוק שמתקיים התנאי הבא: הצומת שייך ל- והצומת שייכת ל-. אם תנאי זה מתקיים נבחר מבין כל קשתות אלו את הקשת שעלותה מינימלית ונוסיף אותה ל-.*

***תיאור האלגוריתם:***

1. *נריץ את אלגוריתם מקשת אקראית ב- וסמן את רכיב השקילות שנמצאנו ב-.*
2. *נבחר צומת אקראי שלא נמצאת ב- ונריץ את אלגוריתם BFS ממנו. נסמן את הרכיב קשירות במצאנו ב-.*
3. *נבחר צומת ב- ונריץ אלגוריתם ממנה על גרף באופן הבא:*
   1. *עבור כל קשת שהגרף יסרוק:*
      1. *אם ו-*
         1. *אם זול יותר מ-*
4. *נוסיף את לגרף ונקבל את*

***נכונות האלגוריתם:***

***נוכיח כי ב- לאחר הסרת הצלע יש שני רכיבי קשירות:***

*נניח על דרך השלילה כי ב- יש רכיב קשירות אחד. אז ב- קיימים שני צמתים כך שישנן שתי דרכים להגיע מאחד לשני, משמע שב- יש מעגל. וזו סתירה, מכיוון ש- הוא עץ ואין בו מעגלים.*

***נוכיח ש- הוא העץ הפורש המינימלי:***

*הוא גרף קשיר, מכיוון שחיברנו את שני רכיבים הקשירות של והוא מכיל קשתות (היו קשתות והוספנו קשת). לפי משפט 3.2 בספר הלימוד, הוא עץ. מכיל את כל הצמתים ב- וגם הוא קשיר, לכן יש מסלול מכל צומת לצומת ומתקבל שהוא עץ פורש. נותר להוכיח כי הוא העץ הפורש המינימלי.*

*נניח על דרך השלילה כי אינו העץ הפורש המינימלי של . אז קיים עץ פורש מינימלי אחר. בעץ זה יש לפחות קשת אחת שלא מופיעה בעץ שמשקלה יותר נמוך מהקשת שמופיעה במקומה ב- (מכיוון שעץ חייב להכיל קשתות). לפי משפט 4.17, כל עץ פורש מינימלי חייב להכיל את הקשת שהסופנו ובפרט .*

*אם אינה קשת כזו, והיא נמצאת בעץ לאחר שהסרנו את , אז קיימת ב- קשת שמשקלה יותר נמוך מ-. וזו סתירה, כי אז אינו העץ הפורש המינימלי שהרי כך הוא הוגדר.*

*קיבלנו סתירה, ולכן לא קיים עץ פורש מינימלי אחר ואז הוא עץ פורש מינימלי.*

***סיבוכיות האלגוריתם:***

*הסיבוכיות של אלגוריתם BFS היא* *. לכן סיבוכיות מציאת כל אחד משני רכיבי הקשירויות היא .*

*בפעם השלישית שמריצים את האלגוריתם, מצבעים פעולת השוואה והשמה שהן פעולות אלמנטריות שהן מתבצעות בזמן קבוע ולכן גם הסיבוכיות של ההרצה השלישית של BFS היא.*

*הוספת הקשת ל- היא פעולה שמתבצעת בזמן ריצה של .*

*לפי טענה בספר, בגרף קשיר מתקיים כי . ולכן* *היא סיבוכיות האלגוריתם.*

*שאלה 3:*

*נתבונן בנוסחת* 3-CNF *הבאה:*

*האלגוריתם יבדוק 5 מופעים של ליטרים המורכבים מ-, כאשר 3 מהם ורק 2 הם . האלגוריתם יבחר את ההשמה .*

*האלגוריתם יבדוק 5 מופעים של ליטרים המורכבים מ-, כאשר 3 מהם ורק 2 הם . האלגוריתם יבחר את ההשמה .*

*האלגוריתם יבדוק 5 מופעים של ליטרים המורכבים מ-, כאשר 3 מהם ורק 2 הם . האלגוריתם יבחר את ההשמה .*

*לא נותרו פסוקיות נוספות ולכן ריצת האלגוריתם תסתיים והאלגוריתם יחזיר השמה שאינה מספקת מכיוון שערך הפסוקית האחרונה יהיה .*

*לעומת זאת קיימת השמה מספקת לביטוי זה:*

*שאלה 4:*

*יהי עץ בינארי לחלוטין בעל צמתים. לכל עלה נגדיר את השכיחות: .*

*נוכיח בעזרת אינדוקציה את הטענה הבאה: לכל עץ בינארי לחלוטין שעומקו המרבי הוא , אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות הוא .*

*בסיס אינדוקציה: יהי . אזי ב- יש עלה אחד, ובסדרת השכיחויות יש איבר אחד . עץ הופמן של סדרה זו מכיל עלה אחד והוא מתאים לכל שבו גם יש עלה אחד. הטענה נכונה.*

*צעד אינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור כל ונוכיח את נכונותה עבור .*

*יהיה עץ בינארי לחלוטין בעומק . בעץ קיים לפחות עלה אחד והיות וזה עץ בינארי לחלוטין, יש לו אח שנסמן אותו . לכל זוג אחים ברמה נחבר את השכיחויות שלהם ונסמן בעץ כי שכיחות האב שלהם שווה לשכיחות זו:*

*בסוף התהליך נקבל עץ בינארי לחלוטין בעומק שמקיים את פונקציית השכיחויות שהגדרנו וסכום השכיחויות של כל הצמתים ברמה כלשהי הוא 1. לפי הנחת האינדוקציה קיים עץ הופמן לסדרת השכיחויות השווה ל-.*

*הוכחנו את נכונות הטענה עבור . ולכן הטענה נכונה עבור כל . לכל עץ בינארי לחלוטין קיימת הסדרה שהגדרנו כך שאחד מעצי הופמן של סדרה זו הוא .*