ממן 12

מגיש: בן חג'ג'

תז:311452254

שאלה 1:

1. נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול :

אם כל הצלעות בP (בין s לv) שימושיות אז P מסלול מזערי.

הוכחה:

בסיס האינדוקציה

כאשר n=0 כאשר n הוא אורך המסלול אז s=v ומדובר במסלול מזערי כי הגודל המינימלי של מסלול הוא 0 וזה מתקיים כאשר המסלול הוא לצומת עצמו.

(נתון שהמשקלים חיוביים, אם המשקלים היו יכולים להיות שליליים לא היינו יכולים להוכיח זאת כך).

נניח כי הטענה מתקיימת עבור n-1 נראה כי היא מתקיימת גם עבור n.

צעד האינדוקציה

בהינתן מסלול P מs לv באורך n , אנחנו יודעים כי לא קיים מעגל במסלול זה. אם קיים מעגל ניתן להסיר "בקלות" את הקשתות בעלות המשקל הגבוה ביותר מהמסלול ולקבל מסלול פשוט ללא מעגלים.

נסיר את הקשת הנכנסת לv , בגלל שאין מעגלים ומדובר במסלול, יש רק קשת אחת שנכנסת לv.

הקשת שנכנסת לv יוצאת מצומת k.

המסלול מs לk הוא בעל n-1 קשתות (כי כדי לקבל אותו הסרנו קשת אחת כאשר היינו במסלול בעל n קשתות), נקרא למסלול זה P’.

כל הצלעות שהיו שימושיות במסלול P שימושיות גם במסלול המקוצר P’ ועל כן המסלול המקוצר מs לk מכיל רק צלעות שימושיות ועל כן לפי הנחת האינדוקציה הוא מזערי.

נוסיף למסלול המקוצר המזערי שבנינוP’ קשת e שמישה, נקרא למסלול זה Q’ . נניח בשלילה כי מסלול זה אינו מזערי. מסלול זה באורך n.

אז קיים מסלול Q אחר מזערי כך ש: w(Q’)>w(Q) .

נסיר משני המסלולים האלו את e ונקבל w(P’)>w(q’) (q מסלול כלשהו שהגענו אליו מהסרה של e מQ). הגענו למצב בו אורך P’ גדול מאורך של מסלול אחר בין אותן קשתות (כי כדי לקבל את שתי המסלולים הורדנו את אותה קשת בדיוק וקשת מחברת בין שני צמתים בלבד).

אבל P’ זה מסלול מזערי שבנינו בעצמנו , והגענו לסתירה.

לכן , אם כל הקשתות שימושיות אז המסלול הוא מזערי.

1. נניח בשלילה כי קיים מסלול מזערי עם צלע אחת לא שימושית . הצלע e היא צלע נכנסת(גרף מכוון) לצומת v1 כלשהיא. לפי הגדרת צלע שימושית , היא תקרא כך אם היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי לעבר אותו צומת. כיוון שe אינה צלע שימושית אז בהכרח יש צלע כניסה אחרת לv1 שהיא שימושית , כלומר צלע השייכת למסלול מזערי הנכנס(המגיע) לצומת v1. אך אם יש מסלול מזערי אחר המגיע לצומת v1 אז ניתן לבחור בו ואז "להמשיך" במסלול המקורי מv1 לעבר צומת v(כלומר להשתמש במסלול המזערי החדש מs לv1 שלא עוברת דרך e שהיא צלע לא שימושית) והמסלול החדש הזה יהיה מזערי וקטן (משקל הקשתות) יותר מהמסלול P המקורי, אך זה בסתירה לכך שP הוא מסלול מזערי לפי ההגדרה ועל כן הגענו לסתירה.

מכך – אם יש צלע לא שימושית אחת בP אז המסלול הוא לא מזערי.

(בעצם הרעיון הוא שאם יש צלע לא שימושית לעבר צומת מסוים אז ניתן לשפר את המסלול עד אליו,לפחות).

1. נראה כי אם P הוא מסלול כמעט מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה.

מהגדרת מסלול כמעט מזערי מדובר על המסלול הקטן ביותר מבין כל המסלולים הלא מזעריים. לפי הוכחה ב' וא' > בהכרח יש צלע לא שימושית אחת או יותר במסלול זה. אחרת אם לא היו צלעות לא שימושיות אז לפי א' המסלול היה מזערי.

עכשיו נוכיח כי במסלול הכמעט מזערי יש בדיוק צלע לא שימושית אחת ויחידה.

נניח בשלילה כי במסלול כמעט מזערי זה קיים יותר מצלע לא שימושית אחת, נניח בלי הגבלת הכלליות כי יש שתי צלעות לא שימושיות (בעצם ההוכחה למספר X אחר של צלעות לא שימושיות הוא זהה ).

נקרא לצלעות הלא שימושיות e1,e2. נחליף את הצלע הלא שימושית e1 בצלע השימושית שנכנסת לאותו צומת שe1 נכנסת אליו(בהכרח מהגדרת צלע שימושית קיים צלע כזאת). קיבלנו מסלול שלפי הוכחה בסעיף ב' בהכרח מסלול זה קטן יותר ממסלול כיוון שהוא מכיל רכיב אחד(סיכוי שהוא מכיל את כל הצמתים במסלול) ,תת מסלול מצומת v1 לv2 קצר יותר (עלותו נמוכה יותר) מאותו מסלול במסלול המקורי. ועל כן .

במסלול קיים עכשיו צלע לא שימושית אחת פחות כלומר נשארה רק צלע לא שימושית אחת.

נבצע את אותו תהליך נסיר את הצלע ונחליף אותה בצלע שימושית שנכנסת לאותו צומת ונקבל מסלול שהוא קטן מ (כי החלפנו צלע לא שימושית בשימושית) וקיבלנו

ש ובכך הראנו כי המסלול הכמעט מזערי שהגדרנו הוא "רחוק" שני צעדים מלהיות המסלול המזערי בסתירה לכך שמסלול כמעט מזערי צריך להיות המסלול שמשקלו הקטן ביותר מבין המסלולים הלא מזעריים. נניח ש הוא המסלול המזערי , גם אם הוא לא וקיים מסלול קטן ממנו (שהוא המזערי) ההוכחה עדיין תקפה ואפשר להמשיך כך בסוג של אינדוקציה ולהוכיח. אך אמרתי בתחילת ההוכחה כי אני מניח "בלי הגבלת הכלליות" כי למהות ההוכחה אין השפעה על אם יש יותר משתי צלעות לא שימושיות.

1. שתי דרכים להוכיח את הטענה הבאה:

טענה: e=(u1,u2) צלע לא שימושית יחידה במסלול כמעט מזערי . אז הרישא של מs לu1 היא מסלול מזערי וגם הסיפא של מu2 לv היא מסלול מזערי.

הוכחה א: נתון כי מסלול כמעט מזערי יש צלע לא שימושית אחת. נניח בשלילה כי הרישא מs לu1 היא אינה מסלול מזערי. ההוכחה בסעיף א' אומרת שאם כל הצלעות שימושיות אז המסלול הוא מסלול מזערי. לפי זהויות לוגיות אז הטענה בסעיף א' שווה לטענה שאם המסלול לא מזערי אז לא כל הצלעות בו שימושיות .

לכן כיוון שהנחנו כי הרישא היא מסלול לא מזערי אז בהכרח יש בה צלע לא שימושית (אחת או יותר).

אך , במסלול יש כבר צלע לא שימושית אחת e וסה"כ בכל יכולה להיות רק צלע לא שימושית אחת לפי הנתון , אך כעת הגענו ל2 צלעות לא שימושיות ולכן הגענו לסתירה והרישא היא מסלול מזערי.

באותו אופן מראים גם על הסיפא וכך מוכיחים את הטענה.

הוכחה ב: נתון כי המסלול כמעט מזערי ויש בו צלע לא שימושית אחת. לכן ברישא ובסיפא אין צלעות לא שימושיות . כלומר כל הצלעות ברישא וגם בסיפא הן שימושיות. לכן המסלול ברישא ובסיפא הוא מזערי לפי טענה א'.

1. האלגוריתם המוצע ישתמש בהרחבה לאלגוריתם של דייקסטרה:

רעיון האלגוריתם :

במקום לשמור עבר כל צומת את העלות הקטנה ביותר וההורה הרלוונטי שלו(כך לפי דייקסטרה המקורי), נשמור את שתי העלויות הקטנות ביותר עבור כל צומת ואת ההורה הרלוונטי עבור כל אחד מהם.

לכל צומת יהיה אפוא מרחק מינימלי ואת מרחק כמעט מינימלי. לצומת v (האחרונה במסלול) יהיו גם שני מרחקים. נבחר את המרחק הגדול בינהם (הכמעט מינימלי) והוא יהיה המרחק של המסלול הכמעט מינימלי.

תיאור האלגוריתם:

1. עבור כל צומת אנחנו שומרים שני מרחקים ו- מs (בסוף הם יהיו שני המרחקים הקצרים ביותר) ואת שני ההורים שדרכו הוא מגיע לצומת הזו . (התוספת פה מדייקסטרה היא שבמקום לשמור רק מרחק והורה אחד אנחנו שומרים שניים).
2. בתחילה ו- של כל צומת מאותחלים לאינסוף. ו- של s מאותחלים ל0.
3. כל צומת שאנחנו עוברים עליו במהלך האלגוריתם נכנס לקבוצה S.
4. כל עוד V=!S (כל עוד לא עברנו על כל הצמתים):
   1. בחר צומת x שלא בS עם קשת אחת לפחות לS וסמן שביקרנו בו (הכנס לS) ומרחקו מינימלי מS.
   2. עבור כל קודקוד y שכן של x:
      1. Y מעודכן כך: נבדוק את מרחקו של הקשת מx לy ונחבר עם המרחק של x מS.
      2. אם המרחק הנ"ל קטן מכל מרחק אחר של y , נעדכן את d1 להיות הערך הזה וd2 יהיה הערך הקטן ביותר שהיה לy.
      3. אם המרחק הנ"ל קטן מd2 אך לא מd1 נחליף את המרחק במרחק הקיים בd2
      4. אם המרחק גדול מכל מרחק נשאיר את y כשהיה.
5. החזר את d2 של v. זהו המרחק הכמעט מינימלי.

נכונות האלגוריתם

נוכיח באינדוקציה את נכונות אלגוריתם דייקסטרה המורחב שבנינו.

בסיס האינדוקציה : נניח כי בגרף קודקוד אחד , אז d1 וd2 שניהם מאופסים לאפס. אין קשתות יותר בגרף ועל כן באופן טריוויאלי יש מסלול אחד שאורכו 0 . האלגוריתם יחזיר 0 ועל כן ריק האלגוריתם נכון (אמנם באופן ריק).

הנחת האינדוקציה : נניח כי עבור גרף G |V|=n-1 האלגוריתם מחזיר את המסלול השני הקצר ביותר(כמעט מזערי) P2 מs לu או את אורכו d2(לא קריטי להוכחת נכונות האלגוריתם) ואין מסלול אחר ארוך יותר מהמסלול המזערי וקצר יותר מהמסלול P2.

צעד האינדוקציה:

נוסיף לגרף G צומת חדש v ונקרא לגרף G’ . עתה |V|=n . לפי הנחת האינדוקציה המסלול p2 מs לu הוא כמעט מזערי(קיימת פה צלע לא שימושית אחת לפי סעיפים קודמים).

v היא קשת הסופית במסלול מs לv. מסלול יהיה המסלול הכמעט מזערי שנרצה להראות שהוא אכן הכמעט מזערי.

נבחן עתה מסלול אחר מs לv שנכנה P . המטרה להראות שמסלול זה הוא ארוך יותר מהמסלול המזערי אך ארוך לפחות כמו המסלול ולא קצר ממנו(כי אם היה קצר ממנו וארוך מהמזערי הוא היה הכמעט מזערי).

נניח בשלילה כי המסלול P קצר יותר מ אך ארוך יותר מהמסלול המזערי ביותר ועל כן P הוא הכמעט מזערי. אז יש בו צלע אחת לא שימושית. לפי הנחת האינדוקציה הוא מסלול כמעט מזערי. אך הצלע שמחברת את v לגרף G קיימת גם ב וגם בP . אך כאשר מורידים את הצלע הזו נשארים עם מסלול p2 באורך n-1 שהוא בלי צלע לא שימושית כי הנחנו ש הוא מסלול כמעט מזערי אך לפי הנחת האינדוקציה p2 המסלול הכמעט מזערי ויש בו צלע לא שימושית. הגענו לסתירה ועל כן הוכחנו כי האלגוריתם מוצא מסלול כמעט מזערי.

סיבוכיות זמן

אנחנו מפעילים את אלגוריתם דייקסטרה עם תוספת שלא משפיעה על סיבוכיות הזמן ועל כן זמן הריצה הוא O(|E|log|V|).

המימוש שלנו מבוסס על תור קדימויות לפי 4.15.

שאלה 2

רעיון האלגוריתם:

1. נתון לנו עץ פורש מזערי T של גרף לא מכוון קשיר G
2. נראה כי לאחר הסרת קשת e נוצרים לנו בגרף שני רכיבים קשירים T1 ו-T2.
3. נוסיף קשת e’ חדשה בעלת משקל מינימלי שמחברת בין שני הרכיבים הקשירים, כלומר e’=(v,u) כך שv בT1 וu בT2 או להפך.

נבצע את החיפוש עבור e’ החדשה בעזרת אלגוריתם BFS( שאלה שלי : במידה והגרף היה מיוצג בעזרת מטריצת סמיכויות לא היינו צריכים לבצע BFS , האם ומתי אפשר להסתמך על זה שיש מטריצת סמיכויות? או שצריך לבנות אותה לפני שמשתמשים בה?).

תיאור האלגוריתם:

1. נסמן < min\_weight = משקל הקשת המינימלית ונאתחל אותה לאינסוף חיובי. . minee= הקשת בעלת המשקל המינימלי מאותחל לNone.
2. בהינתן עץ פורש מזערי T של גרף לא מכוון G נסרוק את העץ עד שנגיע לקשת e.
3. נסיר את הקשת e כך שיתקבל גרף חדש T’ - שני רכיבי קשירות T1 ו T2 יתקבלו(באופן שיוסבר בחלק נכונות האלגוריתם דבר זה מתקיים)
   1. נבחר צומת בגרף T’ ונריץ BFS , נקבל עץ ונקרא לו T1
   2. נבחר צומת אחר בגרף T’ שלא נמצא בT1 ונריץ ממנו BFS , נקרא לעץ שיתקבל T2
4. נעבור על כל קשת e בגרף בG’ נבדוק אם היא מקיימת e=(v,u) כך ש u שייך לT1 ו-v שייך לT2(או להפך):
   1. אם weight(e) < min\_weight
      1. Min\_weight=weight(e)
      2. Minee=e
5. נצרף את הקשת minee לגרף T’ – יתקבל עץ פורש מינימלי לגרף G’

נכונות האלגוריתם

נראה כי :

1. בהכרח לאחר הסרת הקשת e מעץ הפורש המינימלי T מתקבל גרף בעל שני רכיבים קשירים(בלבד).
2. ניתן לחפש עבור קשת שקצה אחד שלה בT1 וקצה אחר בT2 (בהכרח קיימת קשת כזו)
3. ניתן לבנות עץ פורש שלא בהכרח מזערי מתיקון T’ .
4. צירוף של הקשת e לגרף T’ יוצר עץ פורש והוא מינימלי .

הוכחה:

1. T הוא עץ פורש מינימלי ע"פ הנתון כלומר T הוא עץ אשר ניתן להגיע דרכו לכל צומת בגרף והעלות של העץ היא מינימלית.

נניח בשלילה שהסרה של צומת e משאיר את הגרף קשיר (ובעצם לא נוצרים שני רכיבי קשירות שונים) . אז זה אומר שישנה קשת "מיותרת" בגרף המקורי T אך נתון כי הוא עץ פורש מה שאומר שלא יכול להיות בו מעגלים (וקשת מיותרת זו בדיוק ההגדרה).

בנוסף, לא יכולים להיות שלושה רכיבי קשירות. נניח בשלילה כי לאחר הסרת e מT וקבלת T’ נוצרו לנו שלושה רכיבי קשירות.

נוסיף בחזרה קשת e שהסרנו וקיבלנו שני רכיבי קשירות במקום 3 , כי קשת יכולה לחבר שני צמתים לכל היותר ולכן לכל היותר שני רכיבי קשירות. וקיבלנו סתירה לכך שהגרף T קשיר(עץ פורש).

1. מכיוון שנתון כי G’ קשירה בהכרח מתקיים שיש לה עץ פורש מינימלי . ולכן אפשר למצוא קשת שתחבר בין שני רכיבי קשירות T1 וT2. אם לא היה אפשר למצוא קשת כזו אז לא נמצא עץ פורש מינימלי שייצג את הגרף G’ והסרת e גרמה לכך . אם e לא גרמה לפירוק G והשאירה אותה קשירה אז יש "דרך אחרת" להגיע מקצה אחד של e(הלא הוא T1) לקצה השני של e(T2).
2. אז בהמשך לסעיף הקודם , בהכרח לG’ יש עץ פורש. נראה כי בהכרח מתקיים כי אפשר להוסיף לשני רכיבי הקשירות T1 וT2 קשת שתהפוך אותו לעץ פורש.

קיבלנו את T1 ו-T2 לאחר הרצת BFS , מהיותם עצים לא קיימים מעגלים(משפט 3.2) ואנחנו רוצים להראות שהוספת הקשת בינהם לא תיצור מעגל במקרה.

נניח בשלילה כי הוספת הקשת e=(v,u) בין T1 ל T2 יצרה מעגל v,x,y,u אז אנחנו מקבלים ש(x,y) היא קשת בין T1 לT2 בסתירה לכך שהם שני רכיבי קשירות שונים.

הוספת הקשת בין T1 לT2 הופכת את הגרף לפורש (וכמו שאמרנו קודם מס' פעמים , תמיד תהיה קשת כזו שכן G’ קשירה).

1. צירוף של e לפי האלגוריתם לT’ ותיקונו יוצרת עץ פורש מינימלי.

אנחנו מוסיפים את e שקצה אחד שלה בT1 וקצה אחר בT2 כך שעלותה הוא מינימלי (והקשת הזו עדיין לא בגרף) – מדובר בדיוק במסקנה 4.17 בספר ועלפיה הקשת הזו חייבת להיות חלק מעץ פורש מינימלי .

אך לא בטוח שנוצר לנו בכך עץ פורש מינימלי לאחר הוספת הקשת e (המשפט אומר שהקשת הזו חייבת להיות חלק מהעץ הפורש המינימלי ותו לא , היא לא מדברת לפחות לא באופן ישיר על שאר הקשתות).

נניח בשלילה כי לאחר הוספת e לעץ T’ קיים עץ פורש מזערי יותר S .

W(S)=W(S1)+W(S2)+W(e’)<W(T1)+W(T2)+W(e’)=W(T’)

נחליף את הקשת של החתך e’ בקשת המקורית (שיצרה עץ פורש מינמלי לפי נתוני השאלה) ונקבל:

W(S)=W(S1)+W(S2)+W(e)<W(T1)+W(T2)+W(e)=W(T)

המצב חזר לקדומותו במובן שקיבלנו את T המקורית אך יצרנו אי שיוויון במשוואה ועל כן הגענו לסתירה.

לכן , בהכרח צירוף של e’ יוצר עץ פורש מינימלי.

סיבוכיות זמן האלגוריתם

1. ריצה של BFS היא : O(V+E) (מריצים פעמיים אך זה כפל בקבוע ולכן לא נלקח בחשבון)
2. מעבר על כל קשתות הגרף O(E).
3. מכיוון שמדובר בגרף קשיר G’ אז מתקיים : |E|>=|V|-1
   1. שאר הגרפים באלגוריתם גם קשירים ואף עצים וגם שם זה מתקיים.
4. על כן סדר גודל סיבוכיות האלגוריתם הוא O( |E|)

שאלה 3

נציג נוסחת 3-CNF שעליה האלגוריתם החמדן שהוצע נכשל כלומר : הנוסחא ספיקה אבל האלגוריתם יפיק כפלט השמה שאינה ספיקה.

תחילה נציג את הנוסחא שעליה נכשל האלגוריתם:

…

הנוסחא מורכבת מ7 פסוקיות המורכבות מ3 ליטרלים ו5 משתנים. לפי הגדרה בממן 11 מדובר ב3-cnf.

אין שני ליטרלים זהים באותה פסוקית וכמו כן אין שני ליטרלים נגדיים באותה פסוקית.

נסכום את מספר המופעים של כל ליטרל ואת מס' המופעים של שלילתו(נגדי)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | כמות מופעים של ליטרל זה | כמות מופעים של ליטרל נגדי |
|  | 2 | 1 |
|  | 4 | 1 |
|  | 4 | 1 |
|  | 4 | 0 |
|  | 4 | 0 |

ניתן לראות כי לכל מופע יש יותר מופעים בצורתו "החיובית" מאשר בצורתו "השלילית".

בתחילה עוברים על משתנה x1 ומספקים כמה שיותר פסוקיות שהוא נמצא בה, לכן מסופקים 2 פסוקיות ופסוקית אחת לא מסופקת (ניתן לראות בקלות לפי הטבלה). הפסוקיות שסופקו הן שתי הפסוקיות הראשונות(שהן זהות)

לאחר מכן עוברים על כל הפסוקיות שלא סופקו בשלב הקודם ומספקים את מרב הפסוקיות שליטרל x2 נמצא בהם - יש 2 פסוקיות של x2 שסופקו ו3 שלא סופקו , 2 מתוכן הוא ליטרל חיובי ואחד הוא ליטרל נגדי ולכן נספק את 2 הפסוקיות בהן x2 מופיע בצורתו החיובית. הפסוקיות שמסופקות הן .

בשלב השלישי , נעבור לx3 ,עבורו סופקו 2 פסוקיות ושלוש פסוקיות לא סופקו ביחס של 2 פסוקיות עם ליטרל חיובי של x3 ואחד עם ליטרל נגדי של x3. לכן נספק את אותן פסוקיות שהוא מופיע בהן בצורתו החיובית :

.

לפני שנעבור לx4 נבדוק מה המצב:

נשארנו עם הפסוקית שלא סופקה וכבר סיפקנו את כל הפסוקיות לפי האלגוריתם שהליטרלים האלה (או נגדיהם) מופיעים בהן.

לכן הגענו למצב שהאלגוריתם יתן כפלט השמה שהיא לא מספקת. בכך הראינו כי האלגוריתם לא עושה את מלאכתו.

נראה כי לנוסחא שהצגנו בתחילה יש השמה מספקת:

X1,x3,x4> T

X2,X5 > F

ונקבל:

בכך הראנו שהאלגוריתם לא מבצע את שהתבקש :

1. הוא רץ על 3cnf
2. הוא נותן כפלט השמה לא מספקת
3. קיימת השמה מספקת לנוסחא

**שאלה 4:**

על פי השאלה > עץ מושרש T נקרא בינארי לחלוטין אם לכל קודקוד שלו שאינו עלה יש שני בנים.

עץ כזה נקרא גם עץ בינארי מלא(אין קודקוד בעץ בעל ילד אחד בדיוק).

נוכיח כי לכל עץ מושרש בינארי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות f1,f2…fn כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא העץ T .

הוכחה:

נראה כי עבור כל עץ T כפי שהוגדר , ניתן לבנות סדרת שכיחויות שתתאים לעץ T הזה. כלומר אם נריץ על סדרת השכיחויות הזו את אלגוריתם הופמן נגיע לעץ הנ"ל.

איך נבנה סדרת שכיחויות עבור עץ T מלא בינארי שכזה?

אם נזכר בטענה 4.29: " אם u וv הם עלים בT והם מקיימים depth(u)<depth(v) והשכיחות שהוצמדה לu היא y והשכיחות שהוצמדה לv היא z אז : fy>=fz שמציינים את היחס בין השכיחויות. "

לכל עלה מוצמדת שכיחות , יש n עלים ולכן n שכיחויות.

נסדר את העלים בעץ T לפי סדר העומקים של העלים . לאחר שמיינו את העלים לפי העומק שלהם, נצמיד לכל אחד מהם שכיחות fi,….,fj כך שעבור u<v שdepth(u)<=depth(v) , נצמיד לעלה עמוק יותר – שכיחות נמוכה יותר.

לכן, לאחר סידור העלים לפי עומק ומתן שכיחות לפי יחס הפוך לעומק שלהם, נקבל סדרת שכיחויות. האם אפוא סדרת שכיחויות זו בהכרח תניב לאחר ריצת אלגוריתם הופמן את העץ T?

התשובה היא כן.

נניח בשלילה שסדרת השכיחויות הזו מניבה עץ מלא אחר Z. נקרא לעץ Z אחר /"שונה" מהעץ T אם עלה שהופיע בעומק מסוים בעץ T מופיע בעומק אחר בעץ Z. (אנחנו מניחים שאם העצים הם איזומורפיזיים אחד לשני אז הם מהווים את אותה סדרת שכיחויות ). העץ Z הוא עץ כזה.

נתבונן בעץ Z , מובטח לנו כי אם נסדר בטור את העלים בעץ הזה נקבל סדרה אחרת של יחסים בין העלים המסודרים לפי עומקם בעץ (כי כך בנינו את Z).

העומק של העלים בעץ Z מהווים את היחס בין השכיחויות : עלה עמוק יותר > שכיחות נמוכה יותר.

אבל זה עומד בסתירה לתהליך בו בנינו את סדרת השכיחויות : מראש קבענו את סדרת השכיחויות ולכן לא יכול להיות שנקבל סדרה של שכיחויות אחרת מזו .

לכן, מובטח לנו שסדרת השכיחויות הזו, אחד מעצי הופמן שלה הוא T.