**ממן 12: אלגוריתמים שם המגיש: משה מושקטל**

**שאלה 1:**

נתון גרף מכוון G=(V,E) , עם משקלים חיוביים w(e)>0 לכל אחת מהצלעות , וקודקוד מקור s.

לכל קודקוד קיים מסלול מ-s ל-v בגרף מסלול .

. מסלול הוא מזערי אם עבור כל מסלול אחר .

צלע תיקרא שימושית אם היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי.

1. נוכיח באינדוקציה על גודל המסלול שאם כל הצלעות ב- שימושיות, אז הוא מסלול מזערי:

א.1 עבור n=0 גודל המסלול הוא 0,

כלומר קודקוד s=v. משקל המסלול הוא כסכום משקלי הצלעות – לכן 0,

ומכיוון שנתון שלכל אחת מצלעות הגרף משקל חיובי אז ברור שכל מסלול אחר יקיים,

ולכן המסלול הוא המסלול המזערי.

א.2 נניח שהטענה נכונה עבור n

ונוכיח שהטענה נכונה עבור n+1:

על פי הנחת האינדוקציה, כל n+1 הצלעות במסלול שימושיות. נגדיר מסלול בעל n צלעות ונסמנו . על פי ההנחה – זהו מסלול מזערי.

נסמן קשת x ששייכת למסלול זה. לפי ההגדרה – צלע זו היא הצלע האחרונה במסלול מזערי כלשהו נניח בשלילה ש-. הצלע x מוכלת בשני המסלולים (כי כך הגדרנו) ומשקלה חיובי ולכן אם נוריד אותה משני הצדדים אי השיוויון לא ישתנה – וזאת סתירה להגדרת המסלול כמסלול המזערי. לכן מתקים

1. נתון שלפחות אחת מהצלעות במסלול אינה שימושית. נסמנה x.  
    x אינה שימושית   
   ולכן היא לא צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהו .   
   כלומר קיים מסלול המקיים . נחבר את המסלולים ,עם (i,v) ונקבל: כלומר אינו מזערי. מש"ל.
2. נתון ש- כמעט מזערי,   
   לכן על פי הסעיפים הקודמים – קיימת במסלול זה לפחות קשת לא שימושית אחת.   
   נראה שקיימת במסלול זה רק קשת לא שימושית אחת.   
   נניח בשלילה שקיימות בו 2 קשתות לא שימושיות – ונסמנן , כך ש- נמצאת לפני במסלול (בה"כ). נסתכל על המסלול החלקי: – מסלול זה מכיל את הקשת ולכן אינו מזערי (מכיוון שקשת זו לא שימושית לפי ההנחה –   
   והוכחנו בסעיף ב שמסלול שמכיל קשת שאינה שימושית הוא אינו מזערי). כלומר – קיים מסלול אחר שהוא מזערי ומקיים: . נסתכל על המסלול החדש שמורכב מחיבור המסלולים ו- . מתקיים:

- כלומר . אך הגדרנו שגם הקשת היא אינה שימושית והיא מוכלת במסלול - ולכן מסלול זה לא מזערי (סעיף ב) – וזו סתירה לכך ש- הוא כמעט מזערי (לפי ההגדרה). לכן למסלול צלע לא שימושית אחת בלבד.

1. נתון הצלע הלא שימושית היחידה במסלול . לכן – כל השאר הצלעות במסלול הן שימושיות. נסתכל על המסלול החלקי . מסלול זה מורכב מצלעות שימושית בלבד מכיוון ש-e היא הצלע הלא שימושית היחידה (ומהווה את הצלע הראשונה למסלול ) – ולכן על פי סעיף א מסלול זה הוא מסלול מזערי.   
   באותו האופן – נסתכל על המסלול החלקי – שמהווה את הצלע האחרונה למסלול – גם מסלול זה מורכב מקשתות שימושיות בלבד   
   ולכן על פי סעיף א גם הוא מסלול מזערי.
2. נציג בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקודקוד נתון s לקודקוד יעד נתון t:

1.נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים מינימליים מ-s, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.

2.נהפוך את הצמתים בגרף (כדי שנוכל למצוא את המסלולים המינימליים של t)

3.נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת מסלולים מינמליים מ-t, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.

4.נהפוך את הצמתים בגרף בחזרה.

5.נעבור על צלעות הגרף.

6.אם הצלע הנוכחית היא לא שימושית

נסמנה e=(x,v). נבדוק האם זה המרחק המינימלי שנמצא עד כה. אם כן- נשמור את המסלול (מכיל מסלול מינימלי מ-s לx, ומ v לt – ואת e צלע לא שימושית אחת).

1. בסוף הריצה נקבל את המסלול המינימלי המכיל יש צלע לא שימושית אחת בלבד.

נבצע חישוב של זמן הריצה:

האלגוריתם של דייקסטרה רץ פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . היפוך הצמתים בגרף מתבצע פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . מעבר על הגרף וביצוע לכל צלע מספר סופי של פעולות – זמן הריצה של שלב זה הוא .

לכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא: כנדרש.

**שאלה 2:**

נתון עץ פורש מזערי T של גרף לא מכוון קשיר עם משקלים אי שליליים לכל אחת מהצלעות. G’ גרף המתקבל מ-G לאחר השמטת צלע e מתוך צלעות E של G.  
 G’ קשיר. נציג אלגוריתם שמתקן את T, כך שיתקבל ממנו עץ פורש מזערי T’ עבור G’:

רעיון האלגוריתם: נמצא את רכיבי הקשירות של T לאחר שהסרנו את הקשת e\*, נחפש את הקשת בעלת המשקל המינימלי שמחברת בין רכיבי הקשירות הללו – וכך T יהפוך שוב לעץ פורש מינימלי.

האלגוריתם:

* e\*= (v, x) .1 הצלע אותה נשמיט מתוך T
* 2. נסמן T' כ-T לאחר הסרת הצלע e\*
* 3. נריץ אלגוריתם BFS מקודקוד העץ T’ עד ל-x, על מנת לקבל את רכיבי הקשירות של x .
* 4. נעבור על כל אחת מהצלעות ב-G’ שמקושרות לקודקודים של רכיב הקשירות
  + .4.1 אם הצלע הנוכחית נכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי – נסמנה e’.
* 5. נוסיף את הצלע e’ ל-T’ ובכך T’ יהיה עץ פורש מינימלי.

הוכחת נכונות:

* + 1.נסמן בתור S את קבוצת הקשירות של x בעץ T’ (לאחר הסרת הצלע (v,x)).
  + 2.גודל קבוצת הקשירות S קטן מ-V, מכיוון שאם שתי הקבוצות היו באורך שווה היינו מקבלים לאחר הסרת הצלע e\* גרף קשיר – משמע היה מעגל בעץ T – וזו סתירה להיותו עץ.
  + 3.הקבוצות S ו-(S-V) אינן ריקות – ולכן על פי משפט 4.17 הקשת המינימלית בין 2 הקבוצות הללו חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימלי של G’.
  + 4.נניח בשלילה שהעץ T’ אינו עץ פורש מינימלי. לפי c הצלע e’ היא חלק מכל עץ פורש מינימלי, לכן ייתכן רק שT’ שפורש את S אינו מינימלי או T’ שפורש את V-S אינו מינימלי. אך חלקים אלה מוכלים בעץ הפורש המינימלי הנתון T – כלומר ניתן להחליף אותם בעץ מינימלי – כלומר העץ T אינו עץ פורש מינימלי – וזוהי סתירה לנתון. לכן נסיק כי האלגוריתם נכון והוא מוצא עץ פורש מינימלי.

חישוב זמן ריצה:

זמן הריצה של סריקת העץ ע"י אלגוריתם BFS הוא . זמן הריצה של מעבר על הקשתות הוא – ושאר הפעולות רצות בזמן קבוע. כמו כן – נתון שהגרף קשיר, ולכן על פי ספר הלימוד מתקיים – לכן זמן הריצה הוא כנדרש.

**שאלה 3:**

*נציג נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם נכשל:*

*כך ש:*

*ההשמה - מספקת את הנוסחה ולכן הנוסחה ספיקה. נראה כי האלגוריתם נכשל:*

האלגוריתם החמדן יבחר השמות שממקסמות את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות.

*תחילה, עבור המשתנה , האלגוריתם יבחר בהשמה - כי השמה זו מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F.*

*באותו האופן – האלגוריתם יבחר עבור המשתנה את ההשמה - כי השמה זו מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F. גם עבור המשתנה תיבחר ההשמה (שמספקת את הפסוקים לעומת פסוק אחד ). כלומר – עד כה האלגוריתם בחר את ההשמות : – כלומר הפסוק לא יסופק לעולם! דבר המוביל לכך ש- לא יסופק, מכיוון ש:*

*לסיום – ראינו שהאלגוריתם יפיק כפלט השמה לא מספקת עבור הפסוק, וכמו כן ראינו שהפסוק אכן ספיק – לכן האלגוריתם נכשל.*

***שאלה 4:***

*נוכיח שלכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T קיימת סדרת שכיחויות f, כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.*

*יהי עץ בינרי לחלוטין עם n צמתים. לכל עלה בעץ נגדיר לו שכיחות בהתאם :*

*נראה ע"י אינדוקציה על עומק העץ d שלסדרת השכיחויות יש עץ הופמן שהוא T עצמו:*

*נראה שהטענה נכונה עבור d=0: אם עומק העץ הוא 0 אזי ב-T יש עלה אחד, וסדרת השכיחויות היא {} = {1}. עץ הופמן של סדרה זו הוא גם בעל עלה אחד – כלומר הוא זהה ל-T – הוא T עצמו. מש"ל.*

*נניח שהטענה נכונה עבור T שעומקו הוא d. נראה שהטענה נכונה עבור עץ בעומק d+1:*

יהי T עץ בינרי לחלוטין שעומקו המרבי הוא d+1. לפיכך – קיים לפחות צומת אחד x המקיים d(x) = d+1. מכיוון ש-T הוא עץ בינרי לחלוטין ל x יש אח y שהוא גם עלה, וגם הוא מקיים d(y) = d+1 (על פי תכונות עץ בינרי לחלוטין). נשכפל את T ל-T’.

* 1.כל עוד קיים צומת x בקבוצת הצמתים של T’, כך ש : d(x) = d+1:
  + 1.1 נמצא את אחיו של של x, y מתוך קבוצת הצמתים של T’, ונציב באב שלהן את סכום השכיחויות של הצמתים: . לאחר מכן נמחק את העלים x y מהעץ.

לאחר מכן, נקבל שכל האבות של האחים שמצאנו הם בעומק d (מכיון שבניהם היו בעומק d+1), והשכיחות שלהם היא – בהתאם לסדרת השכיחויות . כמו כן, עומק העץ כעת הוא d (מכיוון שאיחדנו את כל הצמתים בעומק d+1 לעומק d). כלומר T’ הוא ע בינרי לחלוטין בעומק d שמקיים את סדרת השכיחויות f. לכן על פי הנחת האינדוקציה – קיים עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו שהא T’. נבנה מ-T’ בחזרה את T המקורי ע"י כך שנבצע את הפעולות ההפוכות שביצענו בהפיכת העץ T’ לעץ בעומק d – נקבל בהתאם עץ הופמן תקין שהוא בעצם T. מש"ל.