אלגוריתמים - ממן 12

# שאלה 1

מסלולים כמעט מזעריים

## סעיף א'

### א. טענה:

אם כל הצלעות ב Ps,v שימושיות אז המסלול הינו מזערי

### ב. הוכחה

נוכיח בעזרת אינדוקציה על אורכו של המסלול

#### בסיס האינדוקציה:

כאשר אורך המסלול n=0 אז גודל המסלול הינו שווה לאפס. בגלל שהמסלול מתחיל מs ונגמר ב v אזי s=v ולכן, w(Ps,v)=0. ובנוסף, נתון שלכל הקשתות בגרף יש משקלים חיובים ולכן כל מסלול אחר P’s,v יתקיים בוודאות המשוואה הבאה:

ולכן, לפי ההגדרה שניתנה בשאלה המסלול Ps,v הינו מסלול מזערי כנדרש.

#### צעד האינדוקציה:

נרצה להוכיח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח שהטענה נכונה גם עבור n+1 :

יהי מסלול מזערי כך ש וכל קשת בו היא שימושית, נסתכל על מסלול באורך n בו אותו נסמן כך ש .  
על פי הנחה של האינדוקציה כל קשת במסלול שמישה וע"פ ההגדרה כל צלע בו מסיימת מסלול מזערי כלשהו המתחיל בs ומסתיים ב u. תהי e קשת כזו ונסמן את המסלול המזערי ב .  
אם נניח בשלילה ש כאשר נוריד את הקשת e מ-2 המסלולים נקבל ש:   
אבל, מסלול הוא מסלול מזערי (כך יצרנו אותו), ועל כן אנחנו מקבלים כאן סתירה ולכן לכן מסלול מזערי כנדרש בשאלה.

## סעיף ב'

### א. טענה:

אם יש צלע לא שימושית ב (אחת או יותר) – אז אינו מסלול מזערי.

### ב. הוכחה

יהי מסלול בו קיימת קשת לא שימושית, נסמנה אותה קשת ב e.  
ע"פ ההגדרה לא קיים מסלול s-v בו הקשת e הינה הקשת האחרונה במסלול (לפי סעיף א' – מסלול זה גם אינו מזערי), נסמן את אותו מסלול ב , ואת הוריאציה המזערית שלו ב כך ש: .  
  
במידה ונגדיר מסלול חדש בין ל באמצעות הקשת נקבל מסלול s-v המקיים את המשוואה:

והרי שהראנו לפי המשוואה מעלה כי אינה מזערית.

## סעיף ג'

### א. טענה:

מסלול כמעט מזערי – אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה!

### ב. הוכחה

קודם כל, במסלול יש לפחות קשת לא שימושית אחת לפי סעיף א' (אחרת היינו מניחים בשלילה שאין לו ומקבלים שהוא מסלול מזערי בסתירה לנתון). נרצה להוכיח שקיימת בדיוק קשת אחת כזו.  
לכן, נניח בשלילה שהמסלול הינו כמעט מזערי וקיימות 2 קשתות לא שימושיות השונות זו מזו אותן נסמנן: .

*נניח בלי הגבלת הכלליות ש נמצאת לפני במסלול .* כך שמתקיים המסלול הבא:

:

המסלול מכיל את הקשת ולכן, לפי סעיף ב' הוא אינו מסלול מזערי, נסמן את המסלול המזערי מx2-v באמצעות: כך שמתקיים .

בנוסף, נגדיר מסלול חדש שיהיה המזערי שיעבור בין הצמתים s-x1-x2-v :

אמנם קיבלנו מסלול מזערי, אבל אותו מסלול מכיל את הקשת

ועל כן לפי סעיף ב' אינו מזערי ועל כן - אינו כמעט מזערי (שכן קיימים לפחות 2) מסלולים שמשקלן קטן יותר ממנו ולכן יש סתירה.

## סעיף ד'

### א. טענה:

אם הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי אזי הרישא של אותה נסמן ב וגם הסיפא של של אותה נסמן ב הינן מסלולים מזעריים.

### ב. הוכחה

נסתכל על כל הקשתות באותו מסלול אותן נסמן גם בE , הרי ש הקשתות האחרות שמרכיבות את המסלולים , הן קשתות **שימושיות**, ולכן מסלולים אלו הן מסלולים מזעריים לפי סעיף א' בשאלה.

## סעיף ה'

### א. תיאור דרך כללית:

* + נסמן את הגרף הנתון ב G. נשתמש באלגוריתם *דייקסטרה למציאת מסלול מזערי בגרף החל מs, בין היתר העץ שנקבל יבדיל את כל הקשתות השימושיות בG.*
  + *לאחר מכן נבצע תיוג (בדומה להוכחות באוטומטים) ליצירת 2 תתי-גרפים שונים G’, G’’ שיכילו קשתות שימושיות בלבד.*
  + *נבנה גרף חדש H מעל G’, G’’ שיקבל מסלול s-v רק אם הוא עובר דרך קשת לא שימושית אחת בדיוק.*
  + *התוצאה תהיה מסלול כמעט מזערי בגרף G לפי סעיפים ג' ו-ד'.*

#### שלבי בניית האלגוריתם:

* + נסמן את הגרף הנתון ב G=(V,E) (נזכור כי נתונים לנו הקודקודים s,t) ונפעיל עליו *את אלגוריתם דייקסטרה (מופיע עמוד 149 בספר) החל מהצומת s. ולכן, נקבל את עץ המסלולים המזעריים אותו נסמן ב T.*
  + *קיבלנו מספר דברים:*
    - – הקשתות השימושיות ב G.
    - – הקשתות שאינן שימושיות בG
  + נגדיר גם 2 תתי גרפים חדשים:
    - , כאשר E’ מורכבת מכל הקשתות השימושיות שהן חלק מהגרף המקורי, כאשר לכל , .
    - בצורה דומה עבור
  + נגדיר כעת גרף נוסף , המכיל את הקשתות והצמתים של G’ , G’’ ונוסף עליהן את כל הקשתות הלא שימושיות של G, כאשר לכל ,
    - כעת נפעיל שוב את *אלגוריתם דייקסטרה אך הפעם על s’ והמטרה שלנו היא להגיע לt’’.*
    - *במידה ואכן הצלחנו – נחזיר את המסלול שעברנו ללא סימוני התיוגים.*
    - *במידה ולא, נחזיר הודעה שלא קיים מסלול כנדרש.*

### ב. הוכחת נכונות

* + מ*אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s מתקבל עץ מסלולים מזעריים T, ועל כן כל מסלול הוא מסלול מזערי כאשר .*
  + *לפי סעיף ב' (שקילות לוגית ~ אם P מסלול מזערי אז אין צלע לא שימושית) הרי שכל הצלעות בT הן שימושיות, אם הייתה צלע שימושית ב אזי היה מסלול מזערי הכולל אותה. ולכן:*
    - – הקשתות השימושיות ב G.
    - – הקשתות שאינן שימושיות בG
  + בניית הגרפים G’, G’’ מתבצעת באמצעות קשתות שימושיות בלבד, ועל כן כל מסלול בהן למעשה מהווה תת-מסלול ב G (שכן הן בנויות מתוך קשתות שהיו במקור בG), ולפי סעיף ב' – מדובר במסלולים מזעריים בתוך תתי הגרפים הללו.
  + בניית הגרף H מאלצת את המסלול החדש להכיל בדיוק קשת לא שימושית אחת, גם קשתות גרף זה נבנות מעל הקשתות המקוריות בG, ולכל כל מסלול בגרף H קיים בG.
  + באמצעות הרצה נוספת של *אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s’ – אנחנו סורקים את כל האפשרויות השונות למסלול זה.* 
    - אם קיים מסלול כנדרש *ע"י החיוב של קשת לא שימושית אחת בדיוק ב אנחנו מקבלים שמסלול זה הוא כמעט מזערי לפי סעיף ד'.*
    - *אחרת – לא קיים מסלול כמעט מזערי.*

### ג. ניתוח זמן ריצה

* + שימוש ב*אלגוריתם דייקסטרה* לסריקת G =
  + שימוש ב*אלגוריתם דייקסטרה* לסריקת H =
    - ב H מספר הקשתות והצמתים הוא לכל היותר מספר הצמתים שנמצא בG.
  + סה"כ ניתן זמן ריצה הוא =

# שאלה 2

תיקון עץ פורש שהושמטה ממנו צלע

## א. תיאור דרך כללית:

* + נוכיח כי בT’ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות.
  + נבצע סריקת BFS על כל רכיב קשירות בנפרד, ונחבר ביניהם באמצעות קשת הקיימת בE’, מחברת בין 2 רכיבי הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי.
  + התוצאה תהיה עץ פורס מינימלי של G’.

### שלבי בניית האלגוריתם:

* + נגדיר 2 משתני סביבה:
    - – זוכר את משקל הקשת המנימלית בין רכיבי הקשירות השונים, מאותחל לנציב חיובי ()
    - - זוכר את הקשת המנימלית בין רכיבי הקשירות השונים, מאותחל ל NULL.
  + נבחר צומת כלשהיא בעץ T’ , נבצע ממנה סריקת BFS ונסמן את העץ שקיבלנו ב .
  + נבחר צומת בT’ שאיננה שייכת לעץ , נבצע ממנה סריקת BFS ונסמן את העץ שקיבלנו ב .
  + עבור כל קשת e ב T’ כך ש: , (או להפך – שכן הגרף לא מכוון)
    - אם
  + בסוף התהליך, נוסיף את הקשת mine לT’ ובכך נקבל את הגרף הפורס המינימלי.

## ב. הוכחת נכונות

* + בעץ T’ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות שוניםמצד אחד, T הוא עץ ועל כן אין לו מעגלים. אם נסיר קשת כלשהיא מT הרי שנקבל 2 רכיבי קשירות שונים. מצד האחר, במידה ונניח שיש ב'T לפחות 3 רכיבי קשירות – הרי שהוספה של הקשת שהחסרנו לו תחזיר חזרה את T שהוא כאמור גרף קשיר. והרי הוספה של קשת יכולה לחבר 2 צמתים לכל היותר, כך שהעץ T יהיה מורכב מ 2 רכיבי קשירות וזו בסתירה לנתון שהוא קשיר.
  + תיקון הגרף 'T לגרף פורש שאינו בהכרח מזערילאחר שקיבלנו את העצים מהרצת BFS על רכיבי הקשירותו השונים - המטרה שלנו היא לחבר ביניהם כך שלא יווצרו מעגלים. מהיותם עצים ב לא קיים מעגל (משפט 3.2 בספר הלימוד), ועלינו להקפיד שהוספת הקשת ביניהן לא תיצור אחד.  
    כעת, נניח בשלילה שהוספת הקשת (x,y) סוגרת מעגל x-w-z-y הרי ש(w,z) היא קשת בין וזו בסתירה לכך שאילו 2 רכיבי קשירות שונים. ולכן, הוספת קשת בין הופכת את הגרף לגרף פורש של G’. תמיד תהיה קיימת קשת שתאפשר קישוריות בין שכן נתון כי G’ קשירה.
  + תיקון הגרף T’ לגרף פורש מזערימתוך כל הקשתות האפשרויות בין בחרנו את הקשת בעלת המשקל הנמוך ביותר, נסמן אותה ב e’. לפי משפט החתך (4.17 בספר הלימוד) נוכל להסיק כי e’ מוכלת בהכרח בעץ הפורש המינימלי של G’. עם זאת , עדיין עלינו להוכיח שהוספה של e’ לT’ תהפוך אותו לגרף פורש מזערי, נניח שגם לאחר הכנסת e’ ל T’ קיים עץ אחר S שהוא הפורש המזערי של G’, ועל כן: .  
    e’ הוא חתך ולכן נפריד את S ל2 רכיבי קשירות: .

נחליף את הקשת של החתך e’ בקשת e שהייתה הקשת המקורית שהסירו בשאלה מ T

לכאורה, המצב חזר לקדמותו, , אך קיבלנו אי-שיוויון ולכן וזו סתירה, שכן כל גודל שווה לעצמו. לכן, *הוא עץ פורש מזערי של .*

## ג. ניתוח זמן ריצה

* + שימוש ב*אלגוריתם BFS* לסריקת G =
  + מעבר על כל הקשתות של T’ למציאת המינימום
  + G’ הוא גרף קשיר ולכן מתקיים עבורו
    - גם שאר הגרפים בשאלה קשירים או כמעט קשירים (תוספת של קשת אחת, ולכן סדר הגודל של המשוואה נשאר קבוע) ומתקיים גם
  + ניתוח זמן ריצה סה"כ =

# שאלה 3

בעיית הספיקות 3SAT – כישלון החמדנות

*נציג את נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם נכשל:*

*כך ש:*

*ההשמה הינה - מספקת את הנוסחה ולכן הנוסחה ספיקה. נראה כי האלגוריתם נכשל בהחלט:* האלגוריתם החמדן יבחר השמות שT אכןממקסמות את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות.

*ראשית, עבור המשתנה , האלגוריתם יבחר בהשמה של - כי ההשמה זו מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F.*

*באותה צורה , האלגוריתם יבחר עבור המשתנה את ההשמה של - כי השמה הזאתי מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F. בנוסף, גם עבור המשתנה תיבחר ההשמה (שמספקת את הפסוקים לעומת פסוק אחד ). במילים אחרות עד כה האלגוריתם בחר את ההשמות : – כלומר הפסוק לא יסופק לעולם! מה שהמוביל לכך ש- לא יסופק, בגלל ש:*

*נסכם כי ראינו שהאלגוריתם יפיק כפלט השמה לא מספקת עבור הפסוק, בנוסף, ראינו שהפסוק מעלה אכן ספיק – לכן האלגוריתם נכשל.*

# שאלה 4

קידוד הופמן

### א. טענה:

נרצה להוכיח שלכל עץ מושרש בינארי לחלוטין T קיימת סדרת שכחיכיות f ככה שאחד מעצי הופמן של הסדרה הינו T (לפי ההגדרה) לכן נגדיר עץ בינארי לחלוטין עם n צמתים כאשר לכל עלה בעץ נגדיר לו שכחיות בהתאם למשוואה הבאה

### ב. הוכחה

נוכיח בעזרת אינדוקציה על העומק של העץ d (מעלה) שלסדרת השכיחויות שלו יש עץ הופמן שהוא T

#### בסיס האינדוקציה:

כאשר העומק של העץ d=0 הוא שווה לאפס אז בT יש עלה אחד וסדרת השכיחויות הינה כלומר עץ הופמן של סדרה זו הינו גם בעל עלה אחד במילים אחרות הוא הינו זהה לT – הינו T עצמו לכן מתקיים.

#### צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור d ונוכיח שהטענה נכונה עבור d+1 :

יהי עץ בינארי לחלוטין שעומקו המרבי הינו d+1 לכן קיים לפחות צומת אחד u אשר מקיים את המשוואה בגלל שT הוא עץ בינארי לחלוין לu יש אח v שהוא הינו עלה. והוא גם מקיים את

*(לפי תכונות עץ בינארי לחלוטין) נשכפל את T ל T’.*

*כל עוד קיימת צומת u בקבוצת הצמתים של T’ כך ש :*

* *נמצא את אחיו של u v מתוך קבוצת הצמתים של T’ . ונציב באב שלהן את הסכום של השכיחיות של הצמתים שאינו:*

*לאחר מכן נמחק את העלים u וv מהעץ.*

*לאחר מכן נקבל גם שכל האבות של האחים שמצאנו מעלה הינם בעומקd )בגלל שהבנים שלהם הם בעומק d+1 והשכיחות שלהם היא בהתאם לסדרת השכיחות של fi . בנוסף, עומק העץ עכשיו הוא d (הרי איחדנו את כל הצמתים בעומק d+1 לעומק d) כלומר T’ הוא עץ בינארי לחלוטין ובעומק d שמקיים את סדרת השכיחות f. לכן על פי הנחת האינדוקציה קיים עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו T'. נבנה T’ בחזרה את T המקורי על ידי שנבצע את הפעולות ההפוכות שביצענו בהפיכה העץ T' לעץ בעומק d. נקבל בהתאמה עץ הופמן תקין שהוא בעצם גם T ובכך הוכחנו* כנדרש בשאלה.

תוכן העניינים:

[שאלה 1 1](#_Toc27144184)

[סעיף א' 1](#_Toc27144185)

[א. טענה: 1](#_Toc27144186)

[ב. הוכחה 1](#_Toc27144187)

[סעיף ב' 1](#_Toc27144188)

[א. טענה: 1](#_Toc27144189)

[ב. הוכחה 1](#_Toc27144190)

[סעיף ג' 2](#_Toc27144191)

[א. טענה: 2](#_Toc27144192)

[ב. הוכחה 2](#_Toc27144193)

[סעיף ד' 2](#_Toc27144194)

[א. טענה: 2](#_Toc27144195)

[ב. הוכחה 2](#_Toc27144196)

[סעיף ה' 2](#_Toc27144197)

[א. תיאור דרך כללית: 2](#_Toc27144198)

[ב. הוכחת נכונות 3](#_Toc27144199)

[ג. ניתוח זמן ריצה 3](#_Toc27144200)

[שאלה 2 4](#_Toc27144201)

[א. תיאור דרך כללית: 4](#_Toc27144202)

[שלבי בניית האלגוריתם: 4](#_Toc27144203)

[ב. הוכחת נכונות 4](#_Toc27144204)

[ בעץ T’ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות שונים 4](#_Toc27144205)

[ תיקון הגרף 'T לגרף פורש שאינו בהכרח מזערי 4](#_Toc27144206)

[ תיקון הגרף T’ לגרף פורש מזערי 4](#_Toc27144207)

[ג. ניתוח זמן ריצה 5](#_Toc27144208)

[שאלה 3 6](#_Toc27144209)

[שאלה 4 6](#_Toc27144210)

[א. טענה: 6](#_Toc27144211)

[ב. הוכחה 6](#_Toc27144212)