**ממ"ן 12 – אלגוריתמים**

**מגיש:** יוחאי מזוז

**ת"ז:** 324962125

1. א. נוכיח טענה זו בעזרת אינדוקציה על אורך המסלול:

**עבור ,**כל הצלעות שימושיות באופן ריק,נקבל כי , מכאן משום שכל מסלול במעגל בעל קשתות, בהכרח כי ומכאן שהטענה מתקיימת.

**נניח כי הטענה מתקיימת עבור כל מסלול המתחיל בs באורך n נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור מסלול המתחיל בs באורך n+1:**

נניח כי אכן על הצלעות באותו מסלול שימושיות, נקרא לאותו מסלול מתקיים עבורו לפי הנחת האינדוקציה , ובה"כ, עבור .

לפי ההנחה, היא הצלע האחרונה במסלול מזערי כלשהו עבור .

נשים לב כי כאשר זאת הרישא של עדu

וגם , כאשר מוגדר בצורה דומה.

לפי הנחת האינדוקציה מזערי ולכן מתקיים

ומכיוון ש מזערי אז נקבל כי ומכאן ש מסלול מזערי וסיימנו את צעד האינדוקציה ומכאן שהוכחנו את הטענה.

ב. נניח נתון מסלול כך ש זו צלע לא שימושית, נראה כי אינו מזערי.

נסתכל על הרישא של המסלול עד w, בהכרח קיים מסלול כך ש **(\*)** משום שאחרת אז מזערי ומכאן ש צלע שימושית בסתירה להנחה.

אם כך אז נסתכל כאשר זו הסיפא של המתחילה ב, במילים אחרות נחליף את ב את הרישא המסיימת ב במסלול החדש שמצאנו מ לw.

מתקיים כי

משום ש**(\*)**  קיבלנו כי

ומכאן שהוא לא מסלול מזערי וסיימנו.

ג. נשתמש בסעיפים א' וב'.

נניח כי נתון כמעט מזערי.

**נניח בשלילה כי אין צלעות לא שימושיות ב:**

מכאן שכל הצלעות ב שימושיות(ידוע כי ) ולכן לפי סעיף א' המסלול הוא מזערי ולכן לא כמעט-מזערי, בסתירה להנחה ולכן בהכרח ב יש צלעות לא שימושיות.

**נניח בשלילה כי יש 2 צלעות לא שימושיות ב:**

כך ש ו הן צלעות לא שימושיות.

מכאן שלפי סעיף ב' הוא לא מסלול מזערי, מכאן קיים מזערי, נגדיר (החלפה של הרישא הלא מזערית ב ברישא מזערית)

ומכאן ש(כי שאר המסלול זהה).

באותה צורה נקבל כי במסלול ישנה הצלע הלא שימושית ולכן לפי סעיף ב' לא מסלול מזערי, ומכאן קיים מזערי,

נגדיר (החלפה של הרישא הלא מזערית ב ברישא מזערית)

ומכאן ש(כי שאר המסלול זהה).

מכאן נקבל סך הכול ומכאן נקבל ש לא מסלול כמעט מזערי משום שיש מסלול לא מזערי שמשקלו קטן ממנו - ,

בסתירה להנחה ולכן נקבל כי ב יש לכל היותר צלע לא שימושית אחת.

ולסיכום נקבל כי בהינתן מסלול כמעט מזערי , קיבלנו כי ב יש צלע לא שימושית אחת לפחות וגם לכל היותר צלע אחת, ולכן נקבל כי יש בו בדיוק צלע לא שימושית אחת יחידה וסיימנו.

ד. משום ש זו הצלע הלא שימושית היחידה ב אזי ברישא מ ל כל הצלעות שימושיות ולכן לפי סעיף א' היא מסלול מזערי ביותר.

נוכיח עבור הסיפא:

נניח בשלילה שהסיפא מ ל היא לא מסלול מזערי, מכאן שקיים מסלול מ ל שמקיים , נגדיר (הבהרה ) מקשרת ביניהן) מסלול חדש הנוצר מהחלפת הסיפא הלא מזערית בסיפא הקטנה ממנה במשקל.

מכאן ש (משום שבמסלול החדש הסיפא החל מ קטנה יותר במשקל והשאר אותו דבר).

אך צלע לא שימושית, ומכאן לפי סעיף ב לא מסלול מזערי, משמע קיבלנו שקיים מסלול לא מזערי שמשקלו קטן מ בסתירה להנחה ש כמעט מזערי, ולכן ההנחה לא נכונה ומתקיים שהסיפא מ ל היא מסלול מזערי.

ה. **רעיון האלגוריתם:**

נבצע רדוקציה של הבעיה, למציאת המסלול המזערי ביותר בין ל עם דייקסטרה ונערוך את הגרף כך שהמסלול יהיה חייב לעבור בצלע לא שימושיות אחת בדיוק, וכך נקבל את מסלול כמעט מזערי מ ל.

**מבנה האלגוריתם:**

ראשית ניצור שתי קבוצות, אחת של הקשתות השימושיות ואחת של הקשתות הלא שימושיות בגרף הנתון, על ידי הרצת אלגוריתם דייקסטרה, עמוד 149' בספר, על הגרף הנתון מקודקוד s לשאר הצמתים, וקבלת עץ T של המסלולים המזעריים.

נבצע השמה:

– קבוצת הקשתות השימושיות, – קבוצת הקשתות הלא שימושיות.

כעת נגדיר את הגרף החדש – מניפולציה על הגרף הנוכחי לשם הרדוקציה.

נגדיר אותו כך:

* לכל
  + (אם אינם ב)
  + (אם אינן ב)

כעת נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה על כדי למצוא מסלול מזערי מ ל אם קיים מסלול כזה נחזיר אותו ללא סימוני ה1 וה2 על הצמתים, אחרת נחזיר שלא קיים מסלול כמעט-מזערי מ ל.

**הוכחת נכונות:**

טענת עזר:

קיים מסלול כמעט מזערי מ ל אמ"מ קיים מסלול מקביל בו צלע לא שימושית יחידה, וכל הצמתים מסומנים ב1 לפני הצלע הלא שימושיות היחידה במסלול, בצלע הלא שימושית היחידה במסלול הצומת השמאלי מסומן ב1 והימני ב2, וכל הצמתים אחרי הצלע הלא שימושית מסומנים ב2, המזערי מבין כל המסלולים מהסוג הזה.

הוכחה: בכיוון הראשון אם נתון מסלול כמעט מזערי, אז לפי סעיף ג' יש בו צלע לא שימושית יחידה, וניתן לסמן את המסלול ב1,2 כדרוש.

בכיוון שני:

אם קיים מסלול P בצורה המתוארת עם סימונים 1,2 המזערי ביותר, אזי הסרת הסימונים של ה1 ו2, תיתן לנו מסלול לא מזערי(משום שיש לו צלע לא שימושית), ונניח בשלילה שזה לא מסלול כמעט- מזערי ושקיים מסלול אחר כמעט מזערי נקרא לו , אז בS חייבת להיות צלע לא שימושית אחת בלבד לפי סעיף ב' ומכאן שניתן לסמן אותו בצורה המתוארת, אך משום שהמסלול P המזערי ביותר מהצורה הזאת, אזי S לא קטן ממנו במשקל, בסתירה לכך שP לא כמעט-מזערי.

מכאן שטענת העזר נכונה.

האלגוריתם בונה 2 חלקים של צמתים, ומכפיל את הצלעות השימושיות לשני החלקים האלה ומאפשר מעבר מחלק לחלק רק דרך צלע לא שימושית, ולכן המסלול שנקבל עם הסימונים זה מסלול שמכיל בדיוק צלע לא שימושית אחת, ולכן לפי טענת העזר המסלול שנחזיר הוא כמעט מזערי, באותה צורה אם קיים מסלול כמעט מזערי אז האלגוריתם ימצא אותו, כי יש מסלול מקביל מסומן שאלגוריתם דייקסטרה יעבור דרכו.

וסיימנו.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

ניתן להריץ אלגוריתם דייקסטרה בסיבוכיות (משפט 4.15 עמו 153 בספר), בפעם השנייה של הריצה מספר הצמתים והצלעות יגדל לינארית ולכן זמן הריצה עדיין ישאר אותו דבר( והפעלה פעמיים לא משנה את הסיבוכיות)

ומכאן שזמן הריצה של האלגוריתם הוא:

וסיימנו.

1. **רעיון האלגוריתם בקצרה:**

השמטת הקשת את העפ"מ ל2 רכיבי קשירות בהם נמצאים כל הקדקודים שכל אחד מהם הוא עץ, אם נוסיף קשת המחברת את שני הרכיבים(מובטחת לנו כזאת כי נתון קשיר) האלה זה יהפוך לעץ פורש, ואם היא תהיה מינימלי אז זה יהיה גם עץ פורש מינימלי.

**מבנה האלגוריתם:**

* נמצא את רכיב הקשירות הראשון על ידי הרצת סריקת BFS צומת כלשהו.

וסימון כל הקודקודים שהם סומנו שהם ב.

* נמצא את רכיב הקשירות השני בצורה דומה על על ידי הרצת סריקת BFS צומת שאינו סומן עדיין.

ואת כל הקודקודים שלא סומנו שהם ב נסמן שהם ב

* לכל כך שקצה אחד שלו ב וקצה שני ב,
  + אם

נוסיף את ל וכעת החזרנו את להיות עפ"מ של .

**נכונות האלגוריתם:**

* ראשית הסרת הצלע(נקרא לה ) מעץ מפרקת את אותו לשני רכיבי קשירות, משום שאם נשאר קשיר, אזי יש מסלול מv לu ומכאן שלפני הסרת הצלע הגרף היה קשיר בסתירה להגדרת עץ.
* שני רכיבי הקשירות הם עצים ולכן חסרי מעגלים, ואין קשת המחברת ביניהם(שהרי אחרת הם היו גרף קשיר בסתירה לנקודה הקודמת), הוספת קשת המחברת ביניהם תאפשר ליצור מסלול בין כל 2 קודקודים, אם הם היו באותו רכיב קשירות לפני הוספתה אז בפרט היה להם מסלול לפני, ואם לא אז ניתן ליצור בכל רכיב קשירות מסלול מאחד הקודקודים לקצה הקשת שנוספה ודרכה נוצר מסלול בין 2 הקודקודים.

אפשר לנמק זאת גם בפשטות בכך שמספר הקשתות היה מקיים

כי מספר הקשתות היה חוזר להיות כמספר הקשתות בT, והגרף היה חסר מעגלים מהסיבות שפורטו בנקודה הקודמת.

ומכאן שניתן לתקן את לעץ פורש על ידי הוספת קשת המחברת בין 2 רכיבי הקשירות(וכזו מובטחת לנו שקיימת כי G' קשיר).

* לסיכום נראה שלא רק שניתן לתקן אותו לעץ פורש, אלא שהוספת קשת כזו מזערית נקרא לה , גם תהפוך אותו לעץ פורש מזערי.

נשתמש בתכונת החתך(משפט 4.17 בעמוד 154 בספר) לפיה כל עפ"מ מכיל את , ונוסיף את ל.

נניח כי קיים עץ פורש מזערי שמשקלו קטן ממשקלו של לאחר הוספת

אזי

לפי תכונת החתך , הסרתה של מ תיצור (בצורה דומה למה שהוכחנו בנקודה השנייה) 2 רכיבי קשירות .

מתקיים ש:

נחליף את הצלע ב ב ונקרא לעץ החדש שקיבלנו לפי המשוואה הנ"ל נסיק:

בעצם קיבלנו שהעץ הפורש (הסיבה שהוא עץ פורש זה כי מתקיים אצלו כי הוא אותו קשתות כמו והוא קשיר משום ש מחברת בין 2 רכיבי קשירות באותה צורה ש עושה זאת) בעל משקל קטן משל , אך זה לא אפשרי משום שכל צלעותיו של נמצאות גם ב ולכן זו סתירה לכך ש הוא עץ פורש מזערי.

ומכאן שלא קיים עץ פורש מזערי שמשקלו קטן ממש משל ולכן עצ פורש מזערי.

**סיבוכיות זמן ריצה:**

לפי עמוד 94 בספר לימוד בכל גרף קשיר מתקיים (\*)

זמן ריצה של BFS לפי עמוד 99 בספר ו(\*)

ריצה על הקשתות

סך הכול זמן הריצה של האלגוריתם:

וסיימנו.

1. אשתמש בנוסחת הבאה אשר מופיעים בה רק שני ליטרלים :

האלגוריתם החמדן יתחיל עם ויבדוק, הוא יספק את אם יציב אמת ויספק את אם יציב שקר, ולכן משום שיש רוב להצבת אמת, האלגוריתם החמדן יספק יציב אמת ב, לאחר מכן יבדוק עם את הפסוקיות שטרם סופקו(), אם יציב בו אמת יספק את ואם יציב שקר יספק את ולכן יציב שקר.

ולסיכום האלגוריתם לא יספק את ולכן יחזיר שהנוסחה אינה ספיקה.

אך זה לא נכון משום שההשמה מספקת את הנוסחה( הן טאטולוגיות, מספק את ו מספק את .

וסיימנו.

* אציין שהנחתי שמותר "להשתמש" באותו ליטרל פעמיים באותה פסוקית (לא צוין על כך דבר ובאופן כללי בלוגיקה זה אפשרי) ושהאלגוריתם לא יודע לזהות שזו טאוטולוגיה(משום שזה אלגוריתם חמדן ולכן לא מפעיל חשיבה לטווח הרחוק ולכן לא בודק את הליטרלים האחרים בפסוקית).

1. **רעיון האלגוריתם:**

נשתמש בכך שמבחינת האלגוריתם השכיחות של שני אחים בעומק כלשהי מקיימת שהסכום מייצגת בעיני האלגוריתם את שכיחות האב. ולכן "נרצה" בעצם להגדיר לכל עלה בדרגה d את השכיחות המתאימה לו כך שהסכום עם אחיו ייצג צומת .

נשים לב שהדרך הנוחה והברורה ביותר לעשות דבר כזה היא כך שבהינתן עלה i בעומק נגדיר נשים לב שאכן שזו אכן השכיחות אשר הייתה מייצגת עלה בדרגה .

**מבנה האלגוריתם:**

כמו שכתבתי ברעיון, נגדיר לכל עלה , .

**נכונות האלגוריתם:**

נוכיח בעזרת אינדוקציה על עומק העץ.

**הנחת אינדוקציה:**

לכל עץ בינארי לחלוטין בעומק (עומק מקסימלי), כאשר מפעילים את האלגוריתם של הופמן על סדרת השכיחויות העץ המוחזר הוא העץ )שקול אליו).

**עבור :**

מתקיים כי העץ הוא בעל צומת אחת בלבד – השורש, וסדרת השכיחויות מכילה רק , ומכאן שטריוויאלי כי אלגוריתם הופמן גם מחזיר עץ בעל שורש בלבד(שהוא גם עלה) ששקול לעץ .

**נניח כי מתקיים עבור כל עץ בינארי לחלוטין בעומק הקטן ממש מ נוכיח כי מתקיים עבור עץ בינארי לחלוטין בעומק :**

ניקח עלה שמקיים המובטח לנו משום שהעץ בעומק ,

משום שהעץ בינארית לחלוטין אז קיים , אח של , שגם הוא עלה המקיים .

נשכפל את העץ לעץ ועבור כל עלה בעומק נמצא את אחיו , נציב באביהם את סכום השכיחויות שלהם ,ונמחק את שני האחים מ ,בצורה כזאת נוצר עלה בעץ(האב שהסרנו את בניו) נקרא לעלה כזה, עלה חדשה,נבצע זאת כל עוד קיימים עלים שעומקם הוא .

נבחין שלאחר שסיימנו לבצע את מחיקת העלים בעומק , נותרנו עם עץ בינארי לחלוטין בעומק כאשר השכיחות של כל העלים **החדשים** הוא (משום שהעלים החדשים הם אבות לשעבר, שהרי רק בניהם של אבות כאלה מחקנו).

לפי הנחת האינדוקציה הפעלת אלגוריתם הופמן על סדרת השכיחויות הזו(של העלים בעץ לאחר הסרת העלים בעומק ) תחזיר לנו את .

משום שבצעד הראשון של אלגוריתם הופמן, הוא לוקח את 2 העלים בעלי השכיחות הנמוכה ביותר מסיר אותם ומציב באביהם את סכום שכיחותם, אז אם נבצע את אלגוריתם הופמן על העץ T, אז האלגוריתם לאחר מספר צעדים יגיע לעץ T' ומשם ימשיך, לפי הנחת האינדוקציה המשך התהליך יחזיר את העץ T', ומשום שהאלגוריתם בסוף התהליך מפרק את האבות חזרה לבנים שלהם, אז הוא יפרק את העלים החדשים חזרה, ונקבל את .

ומכאן שצעד האינדוקציה הושלם וסיימנו.

לסיכום, סיימנו להוכיח את האינדוקציה ולכן הוכחנו את הטענה שאכן לכל עץ בינארי לחלוטין מושרש T קיימת סדרת שכיחויות שאחד מעצי הופמן שלה הוא T.