**ממן 12**

**שאלה 1**

1. נוכיח את הטענה באינדוקציה על אורך המסלול.

יהי מסלול P מS לV בעל צלע אחת e המורכב מצלעות שימושיות בלבד. כיון שe היא שימושית, אז המסלול המזערי בין S לv מסתיים בה. נניח P אינה המסלול המזערי בין S לv אז קיים מסלול P' המסתיים בe שהוא מסלול מזערי. יהי X המשקל של המסלול P' ללא הצלע e. X חיובי לפי הנתון

(משקל הצלעות חיובי) ולכן .w(P’)=x+w(e)>w(e)=w(P)

קבלנו סתירה. הרי ש P מסלול מזערי בין S לV.

נניח הטענה מתקיימת עבור מסלול באורך K. נוכיח שהיא מתקיימת עבור מסלול באורך K+1.

יהי P מסלול מS לV המורכב מצלעות שימושיות בלבד.

יהי e הצלע האחרונה במסלול P. e=(u,v)

לפי הגדרה, כיון שe שימושית קיים מסלול מזערי מS לV כך שe הצלע האחרונה במסלול, כלומר קיים מסלול מזערי מS לV שעובר בU. לפי הנחת האינדוקציה הרישא של P מS לU הוא מסלול מזערי כיון שמורכב מצלעות שימושיות. נניח שהמסלול P אינו מסלול מזערי, הרי שקיים מסלול מזערי כלשהו P' שמסתיים בe ומשקלו קטן ממשקל P. כלומר קיים מסלול כלשהו מS לU שמשקלו קטן ממשקלו של הרישא של P מS לU. אבל כבר הוכחת שהרישא של P מS לU מסלול מזערי. קבלנו סתירה. הרי שP מסלול מזערי מS לV.

כלומר, קבלנו שמסלול שכל צלעותיו שימושיות הוא מסלול מזערי.

1. תהי P מסלול מS לV בעלת צלע לא שימושית אחת e=(u1, u2).

יהי 1P הרישא של P מS לu1. יהי 2P הסיפא של P מu2 לV.

נניח 1P+e היה מסלול מזערי מS לu2. הרי שe היה צלע שימושית וקבלנו סתירה. כלומר 1P+e אינו מסלול מזערי מS לu2.

לכן w(p1)+w(e)> w(p’).

יהי P' מסלול מזערי מS ל2U.

נניח P היה מסלול מזערי מS לV. נוכל להגדיר מסלול P'' המורכב מP' +2P.

W(p)=w(p1)+w(p2)+w(e)> w(p’)+w(p2)=w(p’’). כלומר, P'' קצר יותר מp. הרי שP אינו מסלול מזערי.

1. ברור שחייבת להופיע במסלול לפחות צלע אחת לא שימושית אחרת המסלול מזערי לפי סעיף א'.

נוכיח שלא ייתכן יותר מצלע לא שימושית אחת. נניח קיימים במסלול שתי צלעות לא שימושיות. נחלק את המסלול ל2 חלקים. החלק הראשון הוא מS עד הצלע הלא שימושית הראשונה כולל והחלק השני הוא מסוף החלק הראשון עד V. ו

לפי סעיף א', החלק הראשון של המסלול הוא אינו מסלול מזערי מS לU. ולכן קיים מסלול מזערי כלשהו כך ש. לכן נוכל להגדיר מסלול+ שאורכו קטן מאורך המסלול P המקורי. מצד שני, כיון שקיימת צלע לא שמושית במסלול החדש שהגדרנו ברור שהוא לא המסלול המזערי. כיון שמצאנו מסלול לא מזערי קטן מP הרי שP אינו מסלול כמעט מזערי.

1. הרישא של המסלול מורכבת מצלעות שימושיות לפי הנתון ולכן לפי סעיף א' הוא מסלול מזערי. הסיפא של המסלול גם הוא מורכב מצלעות שימושיות בלבד ולכן לפי סעיף א' הוא מזערי.
2. נציג בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקודקוד נתון s לקודקוד יעד נתון t:
   * נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים מינימליים מ-s, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
   * נהפוך את הצמתים בגרף (כדי שנוכל למצוא את המסלולים המינימליים של t)
   * נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת מסלולים מינמליים מ-t, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
   * נהפוך את הצמתים בגרף בחזרה.
   * נעבור על צלעות הגרף.

אם הצלע הנוכחית היא לא שימושית (יש לנו את המידע על זה לפי השלבים הקודמים) – נסמנה e=(u,v). נבדוק האם זה המרחק המינימלי שנמצא עד כה. אם כן- נשמור את המסלול (מכיל מסול מינימלי מ-s לu, ומv לt – ואת e צלע לא שימושית אחת).

* + בסוף הריצה נקבל את המסלול המינימלי המכיל יש צלע לא שימושית אחת בלבד.

נחשב זמן ריצה:

האלגוריתם של דייקסטרה רץ פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . היפוך הצמתים בגרף מתבצע פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . מעבר על הגרף וביצוע לכל צלע מספר סופי של פעולות – זמן הריצה של שלב זה הוא .

לכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא: כנדרש.

**שאלה 2:**

רעיון האלגוריתם: נמצא את רכיבי הקשירות של T לאחר שהסרנו את הקשת e\*, נחפש את הקשת בעלת המשקל המינימלי שמחברת בין רכיבי הקשירות הללו – וכך T יהפוך שוב לעץ פורש מינימלי.

האלגוריתם:

* e\*= (v, w) הצלע אותה נשמיט מתוך T
* נסמן T' כ-T לאחר הסרת הצלע e\*
* נריץ אלגוריתם BFS מקודקוד העץ T’ עד ל-w, על מנת לקבל את רכיבי הקשירות של w .
* נעבור על כל אחת מהצלעות ב-G’ שמקושרות לקודקודים של רכיב הקשירות

אם הצלע הנוכחית נכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי – נסמנה e’.

* נוסיף את הצלע e’ ל-T’ ובכך T’ יהיה עץ פורש מינימלי.

הוכחת נכונות:

* + נסמן בתור S את קבוצת הקשירות של w בעץ T’ (לאחר הסרת הצלע (v,w)).
  + גודל קבוצת הקשירות S קטן מ-V, מכיוון שאם שתי הקבוצות היו באורך שווה היינו מקבלים לאחר הסרת הצלע e\* גרף קשיר – משמע היה מעגל בעץ T – וזו סתירה להיותו עץ.
  + הקבוצות S ו-(S-V) אינן ריקות – ולכן על פי משפט 4.17 הקשת המינימלית בין 2 הקבוצות הללו חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימלי של G’.
  + נניח בשלילה שהעץ T’ אינו עץ פורש מינימלי. הצלע e’ היא חלק מכל עץ פורש מינימלי, לכן ייתכן רק שT’ שפורש את S אינו מינימלי או T’ שפורש את V-S אינו מינימלי. אך חלקים אלה מוכלים בעץ הפורש המינימלי הנתון T – כלומר ניתן להחליף אותם בעץ מינימלי – כלומר העץ T אינו עץ פורש מינימלי – וזוהי סתירה לנתון. לכן נסיק כי האלגוריתם נכון והוא מוצא עץ פורש מינימלי.

חישוב זמן ריצה:

זמן הריצה של סריקת העץ ע"י אלגוריתם BFS הוא . זמן הריצה של מעבר על הקשתות הוא – ושאר הפעולות רצות בזמן קבוע. כמו כן – נתון שהגרף קשיר, ולכן מתקיים – לכן זמן הריצה הוא כנדרש.

**שאלה 3**

נגדיר:

האלגוריתם הנתון בשאלה יבצע את ההשמה הבאה:

=אמת

=אמת

=אמת

יחזיר שקר בכל מקרה וממילא הנוסחה לא ספיקה.כעת, מתברר ש

אבל, ידוע שהנוסחה כן ספיקה. לדוגמא עבור ההשמה:

=שקר

=אמת

=אמת

=אמת

=אמת

כלומר, האלגוריתם נכשל.

***שאלה 4:***

יהי T עץ בינארי לחלוטין בעל N עלים. נוכיח שקיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

*לכל עלה בעץ נגדיר לו שכיחות בהתאם :*

*נוכיח באינדוקציה על עומק העץ שT הוא עץ הופמן של f.*

*עבור d=0:*

*עומק העץ הוא 0 ולכן ב-T יש עלה אחד, וסדרת השכיחויות היא = 1. עץ הופמן של סדרה זו הוא גם בעל עלה אחד – כלומר הוא זהה ל-T – הוא T עצמו.*

*נניח הטענה נכונה עבור עץ בעומק d. נוכיח שהטענה מתקיימת עבור עץ בעומק d+1.*

יהי T עץ בינרי לחלוטין שעומקו d+1. קיים לפחות צומת אחד u המקיים d(u) = d+1. מכיוון ש-T הוא עץ בינרי לחלוטין -לu יש אח v שהוא גם עלה, וגם הוא מקיים d(v) = d+1 (על פי תכונות עץ בינרי לחלוטין).

נגדיר T' כך:

T=T' .

לכל צומת u בקבוצת הצמתים של T, כך ש : d(u) = d+1 קיים אח v שהוא גם עלה (כי העץ בינארי לחלוטין).

נציב באב שלהן את סכום השכיחויות של הצמתים: . לאחר מכן נמחק את העלים u v מהעץ.

נקבל שכל האבות של האחים שמצאנו הם בעומק d (מכיון שבניהם היו בעומק d+1), והשכיחות שלהם היא . כמו כן, עומק העץ כעת הוא d (מכיוון שאיחדנו את כל הצמתים בעומק d+1 לעומק d). כלומר T’ הוא ע בינרי לחלוטין בעומק d שמקיים את סדרת השכיחויות f. לכן על פי הנחת האינדוקציה – קיים עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו שהיא T’. נבנה מ-T’ בחזרה את T המקורי ע"י כך שנבצע את הפעולות ההפוכות שביצענו בהפיכת העץ T’ לעץ בעומק d – נקבל בהתאם עץ הופמן תקין שהוא בעצם T.