**ממ”ן 12 – אלגוריתמים – לירון ג'אן**

# שאלה 1

1. נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול Ps,v

* בסיס האינדוקציה: עבור מסלול בעל קשת אחת בלבד n=1

כלומר יש קשת אחת (s,v)שהינה שימושית, לכן קיים מסלול מזערי מ s ל v המסתיים בקשת זו.

קיימת רק קשת אחת במסלול (s,v). לכן זהו מסלו מזערי

* הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור כל מסלול Ps,v באורך n-1
* צעד האינדוקציה: יהי מסלול עבור מסלול זה הינו מסלול מזערי מהנחת האינדוקציה.

כעת נוסיף צלע שימושית . זוהי קשת שימושית לכן קיים מסלול מזערי

המסתיים בקשת .

נסמן את המסלול המזערי בתוספת הקשת כך**:**

נניח בשלילה כי משקל המסלול המזערי קטן יותר ממשקל המסלול המזערי כלומר .

הקשת קיימת בשני המסלולים ומשקלה חיובי לכן אם נוריד אותה נקבל

בסתירה לכך ש מסלול מזערי לפי הנחת האינדוקציה.

1. נניח בשלילה כי קיימת צלע לא שימושית במסלול אבל בוא אכן מסלול מזערי.

נסמן את הצלע הלא שימושית במסלול כלשהו כלשהו . כיוון ש e אינה צלע שימושית היא אינה צלע אחרונה ב לכן המסלול אינו מזערי )אחרת e הייתה שימושית(.

לכן קיים מסלול אחר שמשקלו קטן יותר מהמסלול , כלומר w()<w() ולכן w()<w(). לסיכום ולכןאינו מזערי.

1. נתון כי מסלול כמעט מזערי כלומר קיימת לפחות קשת לא שימושית אחת, אחרת אם כל הקשתות היו שימושיות אז לפי ההוכחה בסעיף א' הינו מסלול מזערי בסתירה לנתון.

כעת נניח בשלילה כי קיימת יותר מקשת לא שימושית אחת במסלול הכמעט מזערי .

יהיו 2 קשתות לא שימושיות ו- .

נסתכל על הקשת הלא שימושית הראשונה במסלול , נניח בה”כ שזו הקשת כלומר:

נסתכל על המסלולזהו מסלול שאינו מזערי כיוון הוא מכיל את הקשת הלא שימושית .

נניח כי קיים מסלול מזערי כך שמתקיים .

נגדיר מסלול המזערי P’(s,v)=.

אזי נקבל כי

*אבל, אינו מזערי כיוון שמכיל את הקשת הלא שימושית – לפי הוכחת סעיף ב'.*

*כלומר, קיים מסלול מזערי כלשהו כך שמתקיים ולכן לא מסלול כמעט מזערי לפי הגדרתו.*

1. לאחר הסרת הקשת e הלא שימושית היחידה נקבל שני מסלולים שני מסלולים מכילים קשתות שימושיות בלבד ולכן מסעיף א' הרישא והסיפא מהווים מסלולים מזעריים.
2. רעיון האלגו'

* נריץ אלגו' דייקסטרה על הגרף מצומת . נקבל עץ כאשר מכיל את הקשתות השימושיות בגרף.
* ניצור גרף חדש המכיל פעמיים את .
* נוסיף ל את הקשתות הלא שימושיות כל שכל קשת לא שימושית יוצאת מ ל או להיפך (גרף מכוון).
* נריץ אלגו' דייקסטרה על הגרף מצומת
* נבדוק אם קיים מסלול מ ל . אם כן, קיים מסלול כמעט מזערי. אם לא, אין מסלול כזה.

תיאור האלגו'

* נריץ אלגו' דייקסטרה על הגרף מצומת . נקבל עץ מסלולים מזעריים כאשר מכיל את הקשתות השימושיות בגרף.
* נגדיר את T’,T’’: כך ש נגדיר את הקשתות לכל אחד מהשיכפולים .
* כעת נגדיר את המכיל את .
* נוסיף ל את הקשתות הלא שימושיות בגרף המקורי באופן הבא:

נוסיף את הקשת .

* נריץ שוב את אלגו' דייקסטרה על הצומת בגרף . נקבל את עץ המסלולים המזעריים .
* אם קיים מסלול מ ל זהו מסלול מזערי מכיוון שהמסלול עובר בקשת לא שימושית אחת בלבד כפי שהוכח בסעיפים ב' וג'. נחזיר את המסלול ללא התגים.
* אחרת, לא קיים מסלול כזה שהוא כמעט מזערי.

נכונות האלגו'

* מ*אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s מתקבל עץ מסלולים מזעריים T, ועל כן כל מסלול הוא מסלול מזערי*
* *לפי סעיף ב' כל הצלעות ב T שימושיות. T על המסלולים המזעריים ולכן מכיל רק קשתות שימושיות שכן אם היה מכיל קשת לא שימושית אזי הוא T לא היה עץ המסלולים המזעריים. לכן,*
  + - – הקשתות השימושיות ב
    - – הקשתות שאינן שימושיות ב
* תתי הגרפים הן המסלולים המזעריים ב G הגרף המקורי.
* הוספת הקשתות הלא שימושיות ל G’ מאלצת את המסלול החדש להכיל בדיוק קשת לא שימושית אחת. קשתות אלו קיימות בגרף G המקורי ולכן כל מסלול ב G’ קיים גם ב G.
* הרצה נוספת של *אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s’ בגרף G’ נקבל את כל האפשרויות השונות למסלולים מזעריים:*
  + אם קיים מסלול כנדרש *ע"י החיוב של קשת לא שימושית אחת בדיוק ב אנחנו מקבלים שמסלול זה הוא כמעט מזערי לפי סעיף ד'.*
  + *אחרת – לא קיים מסלול כמעט מזערי.*

סיבוכיות האלגו'

* ||<|E| ולכן בניית הגרפים T’,T’’ עלותן O(||+|V|).
* שימוש באלגו' דייקסטרה לסריקת G,G’ עלותן כל אחת (ב G’ יש לכל היותר פי 2 צמתים וקשתות בגרף לעומת G – זניח).
* סה"כ **.**

# שאלה 2

* רעיון האלגוריתם:
  + נראה כי ב T ללא הקשת e\* יש בדיוק שני רכיבי קשירות
  + נבצע סריקת BFS בכדי למצוא את רכיבי הקשריות
  + נוסיף את הקשת בעלת המשקל המינימלי ב-E’ המחברת בין 2 רכיבי הקשירות
  + נקבל עץ פורש מזערי T’ עבור G’
* תיאור הלאגוריתם:
  + נסמן ב את העץ הפורש המזערי של G ללא הקשת e\* .
  + נגדיר: - השומר את משקל הקשת המימלית ביותר ב E’,

- השומר את הקשת אותה נצטרך להוסיף ל- בכדי לקבל את העץ המזערי

* + נריץ סריקת BFS על אחד הצמתים ב נסמן את העץ שקיבלנו
  + נריץ שוב סריקת BFS על אחד הצמתים ב ב שלא קיים ב - נסמן את העץ שקיבלנו
  + עבור כל קשת ב G’ נבדוק האם או להיפך(כיוון שהגרף לא מכוון)
    - אם
  + לאחר שעברנו על כל הקשתות האפשריות, נוסיף את ל וכך נקבל את העץ הפורש המזערי T’ עבור G’
* נכונות:
  + **נוכיח כי ב T ללא הקשת = (u,v) e\* יש בדיוק שני רכיבי קשירות-**

מעצם הגדרת עץ T יחד עם הקשת e\* הינו עץ קשיר. לכן אם נסיר את הקשת e\* תגרום לכך שיהיו שני רכיבי קשירות.

נניח בשלילה כיT’’ (העץ הפורש המזערי של G ללא הקשת e\*) הינו קשיר אזי קיים מסלוך מu לv ולכן ב-T קיים מעגל בסתירה להגדרת עץ

נניח בשלילה כי T”’ מכילה 3 רכיבי קשירות אזי אם נוסיף בחזרה את הקשת e\* נקבל את T המכיל 2 רגיבי קשירות גיוון שהוספת הקשת e\* יכולה לחבר רק בין 2 רכיבי קשירות וזאת בסתירה לנתון שT קשיר

* + **נוכיח כי ניתן לתקן את T’’ לגרף פורש(לא בהכרח מזערי)**

לאחר זיהוי 2 רכיבי הקשירות(בעזרת BFS)  ו- נרצה לחבר ביניהם ע"י הוספת קשת מ G’ כך שתהפוך את הגרף לקשיר.(קיימת קשת כזו כיוון שנתון שG’ קשירה ללא e\*)

כמו כן, ו- שניהם עצים, שכן הם תתי-גרפים של T המקורית שהוא עץ בעצמו. בפרט, כל אחד מהם, לא מכיל מעגל.( לפי משפט 3.2 בספר).

ע"י שנוסיף קשת הקיימת בG’ כך שצד אחד שלה הוא צומת מ- וצד שני שלה הוא צומת מ- ניצור גרף קשיר ללא מעגלים וזהו הגרף הפורש עבור G’

* + **נוכיח כי ניתן לתקן את T’’ לגרף פורש מזערי**

בחרנו את הקשת בעלת המשקל המינימלי מתוך כל הקשתות בG’ המחברות בין ל- , נסמן קשת זו ב e’ .

הקשת המחברת בין 2 רכיבי קשירות שונים, והיא בעלת המשקל המינימלי משאר הקשתות ו ולכן לפי תכונת החתך (משפט 4.17 בספר), נקבל שכל עץ פורש מזערי של מכיל בהכרח את .

מסקנה: הגרף הפורש המזערי של G’ בהכרח יכיל א e’.

כעת עלינו להוכיח כי הוספת e’ ל T’’ (T’) תהפוך אותו לגרף פורש מזערי.

נניח בשלילה שקיים עץ אחר T\* שהוא הפורש המזערי של G’ אזי w(T\*)<w(T’)

e’ הינו חתך לכם הוא מחלק את T\* ל-2 רכיבי קשירות T\*1  וT\*2

w(T\*) =w(T\*1) +w(T\*2) +w(e’) < w(T’1) + w(T’2) +w(e’) = w(T’)

נחליף את הקשת e’ בקשת e\* שהייתה בגרף המקורי T ונקבל :

w(T\*) =w(T\*1) +w(T\*2) +w(e\*) < w(T’1) + w(T’2) +w(e\*) = w(T’)

כלומר חזרנו לגרף המקורי T\*=T’ אבל קיבלנו אי שווין בין המשקלים שלהם וזו סתירה לכך שw(T)=w(T) .

לכן T’ הוא עץ פורש מינימלי.

* סיבוכיות:
  + שימוש ב*אלגוריתם BFS* לסריקת G ~
  + מעבר על כל הקשתות של G’ למציאת המינימום ~
  + G’ הוא גרף קשיר ולכן מתקיים עבורו

(כל הגרפים בשאלה קשירים או קשירים ע"י תוספת של קשת אחת, ולכן סדר הגודל של המשוואה נשאר קבוע)

* + שאר הפעולות מתבצעות בזמן .
  + סה"כ -

# שאלה 3

נציג נוסחת CNF-3 בה האלגו' נכשל אך הנוסחה ספיקה:

.

ניתן לראות כי הנוסחה היא אכן מהצורה 3-CNF.

כעת נריץ את האלגו' על נוסחה זו.

1. עבור x1 מס' הפסוקיות המסופקות היא 1. עבור מס' הפסוקיות המסופקות היא 1.

לכן האלג' יציב בx1 =T (בהנחה שאם מס' הפסוקיות המקסימליות שווה עבור x1=T ועבור x1=F אז האלג מציב T)

1. עבור x2 מס' הפסוקיות המסופקות היא 1. עבור מס' הפסוקיות המסופקות היא 1.

לכן האלג' יציב בx2 =T

1. עבור x3 מס' הפסוקיות המסופקות היא 1. עבור מס' הפסוקיות המסופקות היא 1.

לכן האלג' יציב בx3 =T

1. עבור x4 אין כבר פסוקיות שלא מסופקות. נסמן אותה D.C=Don’t care.
2. נציב את ערכי הליטרלים בנוסחה:

1. האלג' יפיק כפלט כי לא נמצאה השמה מספקת.

אבלקיימת השמה מספקת: X1=F, X2=T,X3=T,X4 = D.C נציב זאת בנוסא ונקבל:

# שאלה 4

יהי T עץ מושרש בינארי לחלוטין בעל n עלים.

נראה שקיימת סדרת שכיחויות כך ש אחד מעצי הופמן של סדרה זו הוא T.

נגדיר את סדרת השכיחויות הבאה f1,f2,…,fn כך: לכל נגדיר את שכיחות הצומת - (ככל שנתקדם בעומק העץ כך השכיחות קטנה כפי שנדרש בהופמן).

נוכיח זאת באינדוקציה על עומק העץ d:

בסיס: עבור עומק d=0 ישנה רמה אחת בעץ וזהו שורש העץ לכן מתקיים .

לאחר הרצת האלגו' של הופמן נקבל עץ בעל צומת אחד ולכן זהו יהיה T.

הנחה: לכל עץ בינארי בעל עומק מרבי של d-1 אחד מעצי הופמן יהיה זהה ל T.

צעד: נוכיח שעבור עצים בינארים לחלוטין בעומק d קיים עץ הופמן שזהה ל T.

יהי T=(V,E). T עץ בינארי לחלוטין בעומק d. לכן, קיים צומת אחד ששייך לעומק d ונסמנו ב x.

כהגדרת עץ בינארי לחלוטין קיים ל x אח ונסמנו ב y. ניצור עץ חדש S כך שלכל אב של האחים x,y

נעדכן את השכיחות באופן הבא:

לכל אחים בעומק d נוסיף לאב המשותף את שדה השכיחות שלהם:

. כעת, נסיר את כל זוג x,y ברמה d.

לאחר הסרת הצמתים ברמה d+1 עדיין נשמרת תכונת השכיחויות. כלומר, לכל צומת ברמה

מתקיים כי . בפרט, עבור i=d-1.

כעת, עומק העץ הוא d-1 ולפי הנחת האינדוקציה לכל עץ בינארי בעל עומק מרבי של d-1 אחד מעצי

הופמן יהיה זהה ל S. כעת, נשחזר את T ע"י כך שלכל צומת ברמה d-1 נחלק את השכיחות בצורה שווה בין שני הילדים שלהם וכך נייצר עץ הופמן תקין. *ישנן אפשרויות רבות לבחירת העלים שנבצע להם הרחבה, וכל בחירה כזאת תוביל לעץ בינרי שונה שהוא עץ הופמן תקין. אחת מן האפשרויות הללו תיצור את המקורית.*