**ממן 12 אלגוריתמים**

**שאלה 1**

**א.**

נוכיח באינדוקציה על אורך המסלולים .

עבור מסלול  *באורך 0 נתון כי משקל כל הצלעות הוא חיובי ולכן*  אכן מסלול מזערי.

נניח נכונות עבור n-1 ונוכיח עבור n :

*נניח בשלילה* שהמסלול אינו מסלול מזערי

*כלומר קיים מסלול המזערי המקיים w(*

נסמן k קדקוד לפני v במסלול הקשת (k, v) היא צלע שימושית . ולכן לפי ההגדרה נמצאת במסלול מזערי כלשהו מ s ל v נסמנו

נסמן שכן המסלול המזערי מכיל את הקשת (k, v) *.*

*כלומר קדקוד k נמצא במסלול המזערי .*

*כן כי (k, v) הקשת האחרונה ב*

. לפי ההנחה הוא מסלול מזערי כי הוא מסלול באורך n-1 שכל צלע שלו היא שימושית. ולכן *לכל מסלול* כלומר

מתקיים

בסתירה לכך ש כלומר המסלול מסלול מזערי*.*

ב.

נניח כי יש צלע שימושית (אחת או יותר ) ב . כמו כן נניח בשלילה כי מסלול מזערי. *נבחר את הצלע הלא שימושית האחרונה נסמנה (q, u) .*

*נסמן המסלול החלקי עד לu*

*מכך ש (q, u) לא שימושית נובע כי קיים מסלול מסלול מזערי . המקיים* .

נסמן המסלול המורכב מהמסלול המזערי של u והמשך המסלול מה uל v כמו ב .

בסתירה לכך של מסלול מזערי.

ג.

נוכיח כי אם מסלול כמעט מזערי יש בו קשת לא שימושית אחת ויחידה .

כלומר צריך להוכיח כי יש לו לפחות קשת אחת לא שימושית .

ושיש לו לכל היותר קשת אחת לא שימושית.

לפחות קשת אחת לא שימושית :

בסעיף א הוכחנו כי במסלול שבו כל הקשתות הן שימושיות אז המסלול הוא מזערי .

מסלול כמעט מזערי אינו מסלול מזערי (נתון שהמשקל שלו שונה ממשקל מסלול מזערי) מכך נובע כי יש מסלול כמעט מזערי לפחות קשת אחת לא שימושית.

לכל היותר קשת לא שימושית אחת :

נניח כי יש לפחות שתי קשתות שימושיות ב נבחר את 2 הקשתות האחרונות הללו ונסמנן (q, u), האחרונה ו-(x, y) לפני אחרונה . מכך שבמסלול יש קשת לא שימושית נובע כי קיים מסלול המקיים  *(מסעיף א) . נסמן*

*כמו כן מכל שב יש קשת לא שימושית נוספת (q, u) גם ב יש קשת לא שימושית נובע מסעיף א כי קיים מסלול לא מזערי המקיים*

*כלומר מתקיים ולכן לא מסלול כמעט מזערי בסתירה לכך ש מסלול כמעט מזערי . כלומר יש במסלול לכל היותר קשת אחת לא שימושית. .*

*מכך ומכך שיש לפחות קשת אחת לא שימושית נובע כי יש בדיוק קשת אחת לא שימושית.*

ד.

נתון כי ב יש קשת יחידה (u1,u2) לא שימושית .

מכך נובע כי הרישא של ,  *היא שכל הקשתות שלו הם קשתות שימושיות לכן לפי סעיף א המסלול הוא מסלול מזערי.*

*כעט נסתכל על ונסמן המסלול המזערי מ s ל u2 . לפי סעיף ב' ב- אין קשתות לא שימושיות .*

*נניח בשלילה כי אינו מסלול מזערי מ u2 ל s . לכן נובע כי קיים*  מסלול מזערי המקיים w( . כלומר -

w ( *כלומר לא מסלול מזערי ולכן יש בו קשת לא שימושית אחת לפחות (לפי סעיף ב') . מכך ש ב אין קשתות לא שימושיות נובע כי ב יש קשת לא שימושית בסתרה לכך ש*(u1,u2) *הקשת הלא שימושית היחידה ב . לכן נובע כי הינו מסלול מזערי.*

ה.

האלגוריתם :

1. נאתחל d(D) = ∞ D=∅ ,
2. נריץ אלגוריתם דייקסטרה מs ל t נשמור בכל צומת את המסלול אליו ונסמן כל קשת שבמסלול מינימלי כשימושית.
3. נהפוך את כיווני כל הצלעות
4. נבצע אלגוריתם דייקסטרה מt ל- s שוב נשמור בכל צומת את המסלול אליו ונסמן כל קשת שבמסלול מינימלי כשימושית.
5. נהפוך חזרה את כיווני הצלעות
6. לכל קשת (u, q) שאינה שימושית נבדוק האם d(s, u) +w(u, q)+d(q,v)< d(D) אם כן נשמור את המסלול ב D ו d(S) = d(D)
7. לבסוף נחזיר את D .

נכונות :

האלגוריתם עוצר מנכונות דייקסטרה ומכך E קשתות לכן יש לכל היותר E קשתות לא שימושיות .

טענה: בכל איטרציה D מכיל את מכיל מסלול בעל קשת לא שימושית אחת .

נוכיח באינדוקציה באיטרציה הראשונה :

מסעיף ב נובע שכל מסלול מזערי אינו מכיל צלע לא שימושית.

כלומר עבור קשת (u, q) שאינה שימושית כלשהי d(s, u) +w(u, q)+d(q, t)<∞

ולכן D= P(s, u) +(u, q)+P(q, t) מסעיף ב ומדייקסטרה P(s, u) ו P(q, v) ללא

קשת לא שימושית .

נניח כי הטענה נכונה באיטרציה הn-1 ונוכיח בצורה דומה עבור n .

אם d(s, u) +w(u, q)+d(q, t)< d(D) אז בדיוק אותה הוכחה כמו באיטרציה הראשונה אם d(s, u) +w(u, q)+d(q, t)≥d(D) אז לפי ההנחה הטענה נכונה.

טענה בכל איטרציה D מכיל את המסלול בעל קשת לא שימושית יחידה הקל ביותר מכל המסלולים המכילים את הקשתות שנבדקו.

הוכחה :

באיטרציה הדבר ברור .

נניח שהטענה נכונה באיטרציה ה n-1 נוכיח עבור האיטרציה הn .

אנחנו בודקים

d(s, u) +w(u, q)+d(q,v)<

מנכונות דייקסטרה נובע כי d(s, u) +w(u, q)+d(q , v) הוא המסלול הקצר ביותר שעובר ב (u, q) וכמו כן אם אכן d(s, u) +w(u, q)+d(q , v)< אז מההנחה נובע כי לאח ההשמה  *אחרת*

*כלומר אכן d(D) מכיל את המסלול הקל ביותר .*

מסעיף ג ומ2 הטענות נובע כי D המסלול הקל ביותר בעל קשת שימושית יחידה ולכן הוא מסלול כמעט מזערי.

כלומר מהטענה ומשורה 6 נובע כי D הוא המסלול הכמעט מזערי.

ניתוח אנחנו מבצעים דיקסטרה פעמיים O(|E| \* log |V|) וכמו כן מצבעים שתי היפוכים O(E)

ועוברים על כל הקשתות הלא שימושיות כדי למצוא את המסלול הקל ביותר בעל קשת לא שימושית יחידה O(E) סה"כ O(|E| \* log |V|).

**שאלה 2**

רעיון האלגוריתם : נמצא את שני רכיבי הקשירות של T ונמצא את הקשת בעל המשקל המינימלי לחיבור שני רכיבי הקשירות.

אלגוריתם :

1. נסמן e\* הקשת שהושמטה
2. נבנה עץ חדש T ' המורכב מהעץ T\{e\*} .
3. נריץ BFS מקדקוד כלשהו ב T ' נקבל את רכיב הקשירות t .
4. אם T' הוא T נחזיר את T
5. אחרת נעבור על כל קשת בעץ G'=G\{e\*} שצד אחד שלה ב e\*1 וצד שני ב T ' \ t
   1. אם זאת הקשת בעלת המשקל המינימלי נשמור אותה ב e .
6. נחזיר את T ' ∪ {e}

נכונות :

נניח כי העץ T' אינו פורש מינימלית את G' .

T=T' הרי ש קיים עץ פורש מינימלי T\* המקיים d(T\*)<d(T')=d(T) אבל T\* הוא גם עץ פורש של G וזאת סתירה לכך ש T עפ"מ .

אם T'≠ T הרי ש e\*∈ T .

טענה : בT' יש שני רכיבי קשירות .

הוכחה אם היה רכיב קשירות הרי שב T יש מעגל ולכן זהו לא עץ . אם יש יותר משני רכיבי קשירות הרי שT יש לפחות שני רכיבי קשירות כי קשת יכולה לחבר לכל היותר רכיבי קשירות.

טענה כל איברי T למעט e\* הם איברים בעץ פורש מינימלי של G' .

הוכחה :

d(T) = d(t)+w(e\*)+d(v\t)

ניקח את איבר הקשירות t . אם בעץ פורש מינימלי של t יש קשתות השונות מהקשתות הפורשות את העץ החלקי ב T הרי ש קיים t' עפ"מ את רכיב הקשירות t המקיים d(t)>d(t') או קיים (v\t)' המקים d(v\t)<d((v\t)')כלומר קיים עפ"מ T\*\* ל G המקיים . נניח בה"כ d(t)>d(t')

d(T) = d(t)+w(e\*)+d(v\t)< d(t')+ w(e\*)+ d(v\t)=d(T\*)

כלומר T לא עפ"מ של G וזאת סתירה.

טענה : הקשת הקיימת שצד אחד שלה ב t והצד השני שלה ב v\t נמצאת בעפ"מ של G'

הוכחה : טענה 4.17 .

כלומר הוכחנו T\{e\*} חלקי לעפ"מ של G' והוכחנו ש e נמצאת בו ולכן האלגוריתם שלנו מקיים את הנדרש .

**שאלה 3**

נסתור את נכונות האלגוריתם באמצעות דוגמא נגדית .

כלומר נראה נוסחה בפורמט 3-CNF .

*נוכיח כי הנוסח ספיקה . עבור ההשמה x1,x3,x4 = T, x2,x5 =F φ = T כלומר ההשמה מספקת את הנוסחה ולכן הנוסחה ספיקה .*

*נוכיח כי האלגוריתם החמדן נכשל :*

*נזכור כי בכל שלב האלגוריתם בוחר את ההשמה שמספקת את המספר הרב ביותר של פסוקיות חדשות.*

*\* תחילה עבור x1 אם x1 = T יסופקו 2 פסוקיות ואם x1=F תסופק פסוקית אחת*

*לכן האלגוריתם יבחר את ההשמה x1 =T . והפסוקיות יסופקו*

*\*\*עבור x2 כעת לא רלוונטיות יותר ולכן נסתכל על הפסוקיות האחרות .*

*כאשר x2 =T יסופקו הפסוקיות ואילו אם x2=F תסופק רק הפסוקית*

*לכן האלגוריתם יבצע את ההשמה x2=T והפסוקיות*  יסופקו .

\*\*\*עבור x3 נסכל על שלושת הפסוקיות האחרונות שנשרו . במידה ו x3=T הפסוקיות יסופקו ואילו עבור x3=F רק הפסוקית , תסופק ולכן האלגוריתם יבצע את ההשמה x3=T

כבר ניתן לראות כי בעקבות ההשמות שהאלגוריתם ביצע עד כה x3=x2=x1=T

ולכן כלומר האלגוריתם מפיק פלט של השמה לא מספקת .

**שאלה 4**

נוכיח שלכל עץ T בינרי לחלוטין בעל n עלים קיימת סדרת שכיחויות f1,f2 ……. fn כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T

נגדיר את סדרת השכיחויות כך f(i) = כשאר d(i) הוא העומק של i ו- i הוא עלה .

נוכיח באינדוקציה על עומק העץ שלסדרת השכיחויות יש עץ הופמן.

עבור d=0 : בעץ יש עלה 1 השורש כלומר סדרת השכיחויות הינה f1 = =

עץ הופמן של סדרה זו גם הוא מכיל עלה אחד שהוא השורש וכלן זה אותו עץ.

נניח שהטענה נכונה עבור עץ בגובה m-1 ונוכיח עבור עץ בגודל m.

יהי עץ בעומק m לכן קיים צומת v המקיים d(v) = m מכיוון שהעץ הוא עץ בינרי לחלוטין לv בהכרח קיים אח v' המקיים d(v') = m .

נבנה כעת מהעץ שכפול T' כך:

כל עוד קיים צומת v כלשהו ברמה ה m נמצא את אחיו נמחק את שניהם וניתן לאביהם p את סכום השכיחויות שלהם . כלומר

כלומר אכן שכיחות האב מתאימה לרמה שלו בעץ בהתאם לסדרת השכיחויות שבנינו .

כעת T' הוא עץ בינרי לחלוטין בעומק m-1 ולפי ההנחה קיים עץ הופמן T'של סדרת השכיחויות .

נפרוש בחזרה את העץ כך שלכל צומת p נחבר אליו את v' ואת v . ונקבל עץ הופמן שהוא העץ T .

נוכיח שזהו אכן עץ הופמן :

אם זהו לא עץ הופמן אז במחיקת אחד הזוגות והשמת סכום השכיחות לאבא גם היינו מקבלים עץ שהוא לא עץ הופמן בסתירה להנחה .