**ממ"ן 13 – אלגוריתמים**

**מגיש:** יוחאי מזוז

**ת"ז:** 324962125

1. א. נריץ ,( שורש יחידה פרימיטיבי):

ראשית נייצג את הפולינום הנתון

כוקטור: .

נשתמש במשוואה:

כעת נחשב:

*משמע הרצת תחזיר לנו את התוצאה*

*.*

*ב. באותה צורה נחשב*

*(נסמן ב את הפולינום שמיוצג על ידי התוצאות מהסעיף הקודם)*

*(מתקיים כי (:*

*התוצאה שהאלגוריתם החזיר היא*

*ולאחר חלוקה ב4(משום שבמקרה שלנו ( נקבל*

*וזה אכן וקטור המקדמים של הפולינום .*

1. ***רעיון האלגוריתם:***

*בהינתן מספריים טבעיים בעל ייצוג בינארי באורך .*

*ניתן לייצג את המספרים כפולינומים לפי הבסיס הבינארי בצורה הבאה:*

*כאשר לכל מתקיים .*

*המספרים האלה בייצוג בינארי הם באורך ביטים ולכן נוכל לחלק אותם ל בלוקים, כשבכל בלוק ביטים(כאשר נשלים את הבלוק האחרון באפסים משמאל אם צריך).*

*וכך נוכל לייצג את כפולינומים בצורה הבאה לפי הבלוקים:*

*כאשר כאן מייצגים את המספר שאת הייצוג הבינארי שלו מכיל הבלוק ה ב- בהתאמה.*

*נגדיר כעת וקטורי מקדמים המייצגים את לפי הצורה למעלה(לפי הבלוקים), כך שאת ייצג הוקטור ואת ייצג הוקטור .*

*נרצה לחשב בעצם את , נשים לב ש- אלה פולינומים מסדר ולכן מכפלתם מסדר , לשים חישוב המכפלה, נשתמש בFFT, נריץ אלגוריתם FFT מסדר*

*על וקטורי המקדמים שמצאנו מקודם, נקבל את ערכי הפולינומים ב שורשי יחידה מסדר , נכפיל את ערכיהם כדי לקבל את ערכי מכפלת הפולינומים ב נקודות ומשום שהנקודות אלו חזקות של שורש היחידה נוכל למצוא כך את פולינום המכפלה , אשר נקבל*

בצורה של וקטורי מקדמים, אותה נוכל להציב בצורה לפי בלוקים

שהראנו מקודם ונקבל כך שנוכל לחשב את בזמן לינארי ומכאן נקבל את .

**מבנה האלגוריתם:**

נסתכל על הצורה של בייצוג הבינארי לפי בלוקים:

נגדיר וקטורי מקדמים בהתאם למען שימוש בFFT:

ונגדיר את שורש היחידה (לפי הצורה הכללית של שורש יחידה).

*וכעת נריץ ונשמור את התוצאה ב בהתאמה.*

*ונחשב (מכפלת וקטורים), כדי לשמור את ערך נקודות של פולינום המכפלה.*

*כעת נמיר("חזרה") את לוקטור מקדמים על ידי הרצת ,*

*() ושמירת התוצאה בתור , וחלוקה של ב(משום שוקטור המקדמים שמוחזר ב הוא כפול (.*

*ואת הוקטור שקיבלנו נמיר למספר הסופי על ידי חישוב:*

*נחזיר את וסיימנו.*

***נכונות האלגוריתם:***

*נתייחס לאלגוריתם FFT בתור קופסה שחורה:*

*בהינתן פולינומים המוגדרים ,*

*קיבלנו כתוצאה משימוש ו את המקדמים של*

*כך ש.*

*ייצגנו את שני המספרים בתור הצבה של 2 בפולינומים, הצלחנו למצוא את פולינום המכפלה בעזרת חלוקה לבלוקים ואז שימוש בFFT, לאחר מכן חישבנו את המכפלה עם שימוש בהצבת הערך 2 בפולינום המכפלה.*

*הייצוג של נכון כי נתון שניתן לייצג את שני המספרים בייצוג בינארי ב ביטים ולאחר מכן הראנו שהייצוג הזה גם ניתן להגדרה בתור פולינום.*

*השימוש בFFT הוא בחזקת קופסה שחורה כך שהוקטור המקדמים שמוחזר לנו לבסוף(לאחר השימוש ב( הוא אכן פולינום המכפלה, כאשר שורש היחידה מוגדר לפי הצורה הכללית של שורש יחידה.(מציאת ערכי הנקודות מתוארת בעמוד 96-97 בספר, ההמרה מהנקודות חזקה לוקטור מקדמים היא לפי משפט 5.14, אבל בכל מקרה את הפתרון עצמו עשיתי לפי הדרך שנלמדה בהרצאות של אורן פחות לפי הדרך של הספר, אך ציון העמודים בוא בשביל הפורמליות).*

*ולאחר מכן הצבת 2 בפולינום המכפלה תחזיר לנו את המספר שחיפשנו כי .*

* *נשים לב כי בעצם הצורה פשוט מייצגת הצבה של*

*וסיימנו.*

***סיבוכיות זמן הריצה:***

*חלוקת המספרים לבלוקים, מבוצעת בריצה על הביטים ולכן זה תלוי לינארית במספר הביטים ולכן מתבצעת ב.*

*הרצת FFT פעמיים, יחד עם כך שניתן לבצע את המכפלות הפנימיות ב כפי שנתון בספר מתבצעת בזמן (עמוד 97 בספר).*

*חישוב ערכי הנקודות של על ידי חישוב בנקודות, מתבצעת בזמן ריצה של (משום שיש נקודות).*

*ריצת תבוצע בזמן ריצה (מהסיבות שתוארו בחישוב זמן הריצה של FFT לעיל).*

*ולסיכום חישוב מתבצע בזמן לינארי.*

*ולכן סך הכל האלגוריתם מבוצע בזמן ריצה*

*נבחר נציב ונקבל, שסך הכול סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא:*

*וסיימנו.*

1. *(הנחתי שהכוונה ב4-5 שורות לרעיון המרכזי בלי הוכחת נכונות וניתוח זמן ריצה).*

***רעיון מרכזי:***

*נגדיר*

*נבצע קונוולוציה לוקטורים לעיל על ידי שימוש באלגוריתם FFT כקופסה שחורה, ונקבל את הנגזרות ב האיברים הראשונים אבל בסדר הפוך(כלומר הנגזרת ה נמצאת באיבר ה), נהפוך את סדר הוקטורים וסיימנו.*

***מבנה האלגוריתם:***

*מתואר למעלה, מיותר לפרט יותר.*

***נכונות האלגוריתם:***

*נניח בהינתן ואנו מעוניינים למצוא , נראה כי תוצאת האלגוריתם נכונה:*

*נבדוק את איבר תוצאת הקונוולוציה במקום ה משום שאנו הופכים את הסדר של תוצאת הקונוולוציה המתקבלת בFFT ורק אז מחזירים אותה.*

*וזאת אכן ההגדרה המתמטית של .*

*משום שניתן לראות כי מספר הגורמים בעצרת של כל איבר הוא (משום שבוצעו גזירות), וגם המקדמים "הוזזו"*

*צעדים כלומר הוא המקדם של, משום שלאחר גזירות, החזקה של כל איבר תקטן ב.*

*משמע קיבלנו כי האלגוריתם אכן מחזיר את וסיימנו.*

***ניתוח זמן ריצה:***

*ניתן לחשב את העצרות בצורה יעילה בעזרת שימוש במערך אשר ישמור אותן(סוג של תכנון דינמי מאוד פשוט- אני יודע שזה חומר מתקדם אבל זה לא תכנון דינמי גרידא וזה רק נועד לשפר את היעילות), ובכך לעשות זאת ב במקום חישוב נאיבי ב.*

*את הקונוולוציה של הוקטורים חישבנו בעזרת אלגוריתם FFT, אשר לפי משפט 5.15 בספר ניתן לבצע בזמן ריצה*

*ההיפוך של התוצאה חזרה(משום שסדר החזקות הפוך לפי התוצאה שמחזיר FFT) נעשה בזמן לינארי.*

*ולכן סה"כ זמן הריצה הוא*

1. *נשתמש באלגוריתם רקורסיבי שמחלק את המטריצה לארבע חלקים שווים בכל פעם.*

*מקרה בסיס: במקרה הזה פשוט נחזיר ישר את התוצאה.*

*אחרת נחלק את כל אחת לארבע תתי-מטריצות בגודל , כך ש*

*נשתמש בהגדרות בשאלה בצורה דומה ונגדיר:*

*ונחזיר*

*הוכחת האלגוריתם קצרה מאוד באינדוקציה על גודל המטריצה(כלומר – מספר השורות, אני לא זוכר במדויק את המונח המקצועי שמתאר את הגודל הזה).*

*בכל מקרה עבור טריוויאלי, נניח ומתקיים לכל מטריצה מסדר אזי האלגוריתם מחשב כראוי את ולכן לפי המסקנות שכתובות בשאלה וסיימנו.*

*סיבוכיות זמן ריצה:*

*חישוב חיסור וחיבור מטריצות מתבצע בזמן ריבועי.*

*זה אלגוריתם רקורסיבי ולכן נשתמש בנוסחת נסיגה(שוב על גודל המטריצה – כלומר מספר השורות):*

* *חישוב חיסור וחיבור מטריצות מתבצע בזמן ריבועי.*

*נקבל כי:*

*ולפי משפט האב, מקרה 1':*

*משום ש כאשר , משום ש- .*

*נקבל כי, כדרוש בשאלה, וסיימנו.*