ממ"ן 13

נדב אלון

322952631

שאלה 1

א.

שורש נכון לשימוש במקרה זה הוא i, כי

נחשב את :

אז נחשב את ערכי p בנקודות 1,i,-1,-i:

כלומר צריך לחשב את

נחשב את הערכים בנקודות 1,-1:

פה הגענו לסוף הרקורסיה:

ואפשר להציב:

אז

נציב:

אז

ב.

נחשב את :

בשביל כך נחשב את

וכמובן FFT((x),1)=(x) לכל x.

נציב:

אז

נציב:

אז

נבדוק את נכונות הפעולה ע"י חילוק התשובה ב4 ונקבל את מקדמי הפולינום המקורי:

*כנדרש.*

שאלה 2

ראשית נחקור את המבנה של הקלט בעזרת הדרישה לחילוק הקלט לn/k בלוקים בגודל k כל אחד כך ש k=lgn.

נשים לב שlgn ביטים יכול לייצג מספר בין 0 לn, אז ניתן לראות בחילוק הקלט לבלוקים בגודל הזה כייצוג הקלט בבסיס n.

כלומר אם נתון חילוק שכזה, ניתן להתבונן בו כמספר בייצוג הזה:

כך שa\_0 הוא הבלוק הימני ביותר, a\_1 משמאלו וכך הלאה.

בהינתן שני מספרים כאלה, ניתן לחשב את מכפלתם בעזרת חישוב הקונבולוציה

*כי אכן מתקיים*

*וזוהי הקונבולוציה של הווקטורים.*

*נפעיל את FFT על שני הקלטים ונקבל 2n+1 ערכים שלהם בשורשים המרוכבים ה2n+1-ים. כל ערך שמכפילים באורך lgn ביטים, אז הכפלת שני מספרים באורך lgn זה בזה דורשים פעולות (לפי ההנחה בשאלה).*

*מכפילים ערכים בעלי lgn ביטים כל אחד, אז כל התהליך לוקח זמן ריצה. לאחר מכן ניתן לחזור לייצוג פולינומי בעזרת הפעלת FFT נוסף עם הערך הנגדי לשורש המקורי שהתחלנו איתו (כנראה ).*

*נשים לב גם שזמן הריצה של FFT לא משפיע אסימפטוטית על זמן הריצה, כל עוד ניתן להניח שזמן ריצתו היא nlgn כמו בספר (כלומר בהינתן וחישוב ערך הביטוי בהינתן הערכים לוקח מספר קבוע של פעולות, למרות ש ו לא בהכרח שלמים).*

נשים גם לב שזמן הריצה של חלוקת הקלט לבלוקים וסכימת הבלוקים הסופיים למספר בינארי שניהם לינאריות, וגם הם לא תורמות אסימפטוטית לזמן הריצה.

***[שאלה לבודק: איך אמורים לחשב את זמן הריצה של האלגוריתם בלי להתייחס לזמן שלוקח להכפיל מספרים מרוכבים, או מספרים קטנים מ 1 שעליהן לא ניתן זמן ריצה ? אם לדוגמא צריך להכפיל את ב שגם הרכיב המדומה וגם הממשי לא שלמים, אז לא ניתן להניח שהכפלתם לוקחת מספר קבוע של פעולות. צריך להעביר לייצוג קוטבי ואז ההכפלה יותר קלה בגלל שהערך המוחלט 1?***

***באותה הנימה, אפשר בכלל לחשב את זמן הריצה של האלגוריתם בלי להתייחס לזמן הריצה ה'מעודכן' של FFT בהתחשב לעובדה שפעולות כפל וחיבור לא לוקחות זמן קבוע מנקודת המבט שלנו (שאומרת שאורך הקלט הוא לא כמות הנקודות אלה כמות הספרות הכוללות בכל הנקודות ביחד), או פשוט זמן הריצה שלו לא חשוב אסימפטוטית? אשמח להבהרה]***

שאלה 3

נשים לב ש לכל k.

נראה שני וקטורים שהקונבולוציה שלהם נותנת את הערכים הרצויים:

-

-

אז נקבל שהקונבולוציה שלהם היא:

בפרט, נראה שהאיבר הk בקונבולוציה שווה לנגזרת הn-k של הפולינום בנקודה x0:

אז כל שעלינו לעשות כדי לחשב את ערכי הנגזרת של הפולינום בנקודה x0 הוא חישוב הוקטורים וחישוב הקונבולוציה ביניהם.

בהינתן הערך x0 והערך x0^k ניתן לחשב את x0^k+1 בעזרת פעולת כפל יחידה. כדומה לגבי n! ו (n+1)!, ולכן ניתן את הוקטורים בזמן לינארי.

אז הדבר היחיד שתורם אסימפטוטית לזמן הריצה של האלגוריתם הוא הפעלת הFFT כקופסא שחורה לקבלת הקונבולוציה, וזה לוקח , כנדרש.

שאלה 4

לפי סעיף (ג) נובע שבשביל לחשב את המכפלה מספיק לחשב את המטריצות ולבצע עליהן מספר קבוע של פעולות חיבור מטריצות (כשחיבור מטריצות לוקח זמן ריבועי ).

לפי סעיף (ב) נובע שחישוב המטריצות הנ"ל לוקח זמן ריצה כאשר T הוא פונקציית זמן ריצה של האלגוריתם.

מכאן נובע שנוסחת הנסיגה המתאימה לזמן הריצה היא:

נשתמש בשיטת האב כדי להוכיח שנוסחת הנסיגה הזאת מתאימה לזמן ריצה n^lg7:

כאשר .

אז ממקרה א' של שיטת האב נובע ש

מש"ל.