**אלגוריתמים**

**ממ"ן 13 - תשובות**

מספר קורס: 20417

מנחה: אורן רות

שם הסטודנטית: ברית בן-דוד

ת"ז: 204879365

**שאלה 1:**

**הרצת FFT.**

נתון הפולינום:

1. נריץ FFT מסדר n=4:

כאשר:

נבצע חלוקה רקורסיבית לוקטורים/פולינומים זוגיים ואי-אזוגיים ונחשב לפי הנוסחה:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| שורשי היחידה |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| **המקדמים** |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| חישוב |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| תוצאות |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
| שורשי היחידה |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| **המקדמים** |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| חישוב |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| תוצאות |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
| ***המקדמים*** |  |  | |  |  |  | | |  |  |  | |  | |  |  | |

קיבלנו:

1. נריץ INVERSE-FFT מסדר n=4:

כאשר:

נבצע חלוקה רקורסיבית לוקטורים/פולינומים זוגיים ואי-אזוגיים ונחשב לפי הנוסחה:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| שורשי היחידה |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| **המקדמים** |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| חישוב |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
| תוצאות |  |  | | |  | | | | |  | | | | |  | | |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
| שורשי היחידה |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| **המקדמים** |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| חישוב |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
| תוצאות |  |  | | |  | | | |  |  |  | | | |  | | |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
| ***המקדמים*** |  |  | |  |  |  | | |  |  |  | |  | |  |  | |

קיבלנו:

נחלק ב-4 ונקבל:

קיבלנו וקטור הזהה לוקטור הראשוני שקלטנו (בסעיף א'), כנדרש.

**שאלה 2:**

**כפל מספרים שלמים בגישת FFT**.

מטרה:

הצגת אלגוריתם משופר (יחסית לאלגוריתם הכפל של Karatsuba), שמחלק כל קלט ל- בלוקים בגודל ומבוסס FFT.

* נניח כי ההכפלות המתבצעות במהלך הקריאות הרקורסיביות אינן מגדילות את אורכם של המספרים, ולכן ימומשו באמצעות .

האלגוריתם:

1. בהינתן שני מספרים כל אחד מהם בייצוג בינארי של n ביטים, נחלק כל מספר לשני מספרים באורך ביטים, כאשר , ונציג אותם בצורה הבאה:

או, ניתן לסמן , ולקבל בהתאם:

בתצורת הצגה זו נתייחס למספרים כאל פולינומים ממעלה , כאשר או () הם מקדמי הפולינומים ואילו () הם המשתנים.

1. כעת, נרצה לבצע קונבולוציה על שני המספרים הנ"ל (בתצוגתם כפולינומים) – .

ראשית, נפעיל FFT על-מנת לחשב את המכפלה בצורה יעילה, בזמן .

המכפלה תעשה על הוקטורים של המקדמים ב- נקודות:

ונקבל ערכים חדשים בהתאמה:

1. נכפול נקודתית את ערכי ו-, כלומר:
2. נריץ INVERS-FFT על ונקבל ערכים חדשים בהתאמה:

נסמן:

ערכים אלו מהווים מקדמים של התוצאה הסופית של הקונבולוציה על A ו-B.

1. בשלב האחרון נחזור לייצוג הבינארי של המספרים בתצורה הבאה:

נשחזר את פולינום C:

נציב (כפי שהצבנו בשלב הראשון) וכך נשחזר את הפולינום לתצוגתו כמספר בייצוג בינארי:

מחישוב זה נקבל את הכפל של שני המספרים A ו-B בזמן ריצה יעיל, לאחר שחילקנו אותם למספרים באורך ביטים, כאשר , כנדרש.

הוכחת נכונות האלגוריתם:

**טענה:** האלגוריתם המשופר שהצגנו להלן (יחסית לאלגוריתם הכפל של Karatsuba), שמחלק כל קלט ל- בלוקים בגודל ומבוסס FFT, עובד.

**הוכחה:** באמצעות הנחת השלילה.

נניח בשלילה כי האלגוריתם אינו עובד ונראה כי שמתקבלת סתירה והאלגוריתם שהצענו עובד.

ניתן לראות כי שלבים 1 ו-5 של האלגוריתם הינם "שלבי מעטפת", ז"א בשלבים אלו אנו מייצגים את מספרים שמופיעים בייצוג בינארי כפולינומים. תחילה הופכים את המספרים A ו-B ממספרים בייצוג בינארי לפולינומים ולאחר ולבסוף הופכים את C מפולינום למספר בייצוג בינארי. שלבים אלו ברור כי מתקיימים ונכונים, כיוון שמדובר בשינוי התצוגה של המספרים בלבד.

לגבי שלבים 2, 3 ו-4, ניתן לראות כי מדובר במימוש כל שלבי התמרת פורייה המהירה למציאת מכפלה של פולינומים, מכיוון שהראנו ששלבים 1 ו-5 בטוח נכונים אז נקבל כי שלב מסוים (2,3,4) אינו נכון. זאת, בסתירה למשפט שמופיע בעמ' 259 בספר, משפט 5.5: "באמצעות התמרת פורייה המהירה, המשמשת למציאת פולינום המכפלה C(x), אפשר לחשב את הקונבולוציה של הוקטורים המקוריים a ו-b, תוך פרק הזמן ". מדובר במשפט קיים ולכן ברור שהוא נכון.

קיבלנו סתירה ולכן האלגוריתם שהצענו נכון, והוכחנו את מה שנדרש.

ניתוח זמן ריצה:

ראשית, נחשב את זמן הריצה עבור שלבים 1 ו-5: בעת המרת המספר מייצוג בינארי לפולינום נבצע n פעולות (כמספר הביטים במספר). מכיוון שמבצעים המרה זאת עבור 2 מספרים בהתחלה (A ו-B) ועבור מספר אחד בסוף (C) נקבל כי זמן הריצה יהיה:

כעת, עבור שלב 3: הרצת FFT על בלוקים בגודל , זמן הריצה יהיה . לפי ההנחה בנתון (מימוש הכפלות בצורה תמימה) נסיק כי זמן הריצה של כמות ההכפלות יהיה .

לכן נקבל כי זמן הריצה יהיה:

נציב: ונקבל:

מצאנו כי זמן הריצה יהיה: , כנדרש.

**שאלה 3:**

**חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה.**

מטרה:

הצגת אלגוריתם לחישוב ערכי כל הנגזרות באותה נקודה , תוך ביצוע פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד.

רעיון:

מהסתכלות על נגזרות של פונקציה מסוימת . נחפש הכללה למשוואה שפותרת את הנגזרות:

*...*

נכליל עבור כל נגזרת מסדר k ():

נכתוב את המשוואה בתצורה הבאה:

כעת נסתכל על המשוואה שמצאנו כעל פולינום ומקדמיו:

כאשר הפרמטר k מתחיל מ-0 (נגזרת מסדר 0 שזהו הפולינום עצמו) עד לנגזרת הנדרשת.

על-מנת למצוא כל נגזרת כזו, נבצע את האלגוריתם הבא.

האלגוריתם:

1. נבצע FFT על הפולינומים הבאים:

(כאשר ו- (

ונקבל ערכים חדשים בהתאמה: A' ו-B'.

1. נכפול נקודתית את ערכי ו-, כלומר:
2. נריץ INVERS-FFT על ונקבל ערכים חדשים בהתאמה:

שזה בעצם:

בדרך זו נצליח למצוא את סדרת ערכי כל הנגזרות של בנקודה , כנדרש.

(כשנרצה למצוא נגזרת ספציפית נצטרך לבחור את האיבר ה-k בסדרה).

ניתוח זמן ריצה:

מציאת שני המספרים A ו-B עליהם נרצה לבצע FFT לוקחת מספר קבוע של פעולות אריתמטיות בסיסיות .

לאחר-מכן, הרצת FFT על שני פולינומים לוקח זמן ריצה של .

לבסוף נבחר את האיבר ה-k בסדרה, גם כאן מדובר בזמן ריצה קבוע .

סה"כ זמן הריצה יהיה: , כנדרש.

**שאלה 4:**

**כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)**.

**סעיף ד':**

**טענה:** *מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם של Strassen הוא*  בלבד.

**הוכחה:**

*נזכיר כי באלגוריתם הוגדרו 7 המטריצות הבאות:*

בנוסף, הוגדרו הנוסחאות הבאות:

*נחשב את מספר הפעולות האלמנטריות הנדרשות לביצוע בעת הפעלת האלגוריתם ולאחר-מכן נשתמש בנוסחת הנסיגה לחישוב זמן הריצה שלו.*

1. *בסעיף ב' ווידאנו כי חישוב המטריצות כרוך ב-*7 פעולות כפל בלבד של מטריצות מסדר (כיוון שבכל P יש פעולת כפל אחת)

🡨 ז"א

1. נסכום את מספר פעולות החיבור/חיסור של המטריצות ב-  *ונראה כי נדרשות 10* פעולות כאלו. בנוסף, נסכום את מספר פעולות החיבור/חיסור של הנוסחאות שהגדרנו s,t,r,u ונראה כי קיימות שם 8 פעולות כאלו.

לכן, סה"כ קיימות באלגוריתם 18 פעולות חיבור/חיסור שנעשות בזמן של גודל המטריצה בריבוע

🡨 ז"א

לפיכך, נקבל שנוסחת הנסיגה לחישוב האלגוריתם היא:

*כעת, נשתמש בשיטת האב לפתרון נוסחת הנסיגה ונראה כי:*

***עבור מתקיים:***

*ולכן:*

***עבור מתקיים:***

ניתן לראות כי מתקיים מקרה 1 של שיטת האב:

קיים קבוע כך ש:

ולכן:

*הראנו כי מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם הוא , כנדרש.*