**ממ"ן 13**

**שאלה 1**

וקטור המקדמים של הפולינום הוא (1,2,-3,-1)

כמו כן נקבל:

נבצע את FFT על הפולינום הנתון:

Calling FFT((1, 2, -3, -1),i)

1. Calling FFT((1, -3),-1)
2. Calling FFT((1), 1) Returning (1)
3. Calling FFT((-3),1) Returning (-3)
4. Returning (1-3, 1+(-1)\*(-3))=(-2,4)
5. Calling FFT((2, -1),-1)
6. Calling FFT((2),1) Returning (2)
7. Calling FFT((-1), 1) Returning (-1)
8. Returning (2-1, 2+(-1)\*(-1))=(1,3)

Returning (-2+1, 4+3\*i, -2+(-1)\*1, 4+(-i)\*3)=(-1, 4+3i, -3, 4-3i)

כלומר התוצאה הסופית היא: (-1, 4+3i, -3, 4-3i)

כעת נבצע את INVERSE FFT על התוצאה שהתקבלה מFFT שביצענו לעיל:

Calling FFT((-1, 4+3i, -3, 4-3i), i^-1)

1. Calling FFT((-1, -3), -1)
2. Calling FFT((-1), 1) Returning (-1)
3. Calling FFT((-3), 1) Returning (-3)
4. Returning (-1-3, -1+3)=(-4, 2)
5. Calling FFT((4+3i, 4-3i), -1)
6. Calling FFT((4+3i), 1) Returning (4+3i)
7. Calling FFT((4-3i), 1) Returning (4-3i)
8. Returning (4+3i+4-3i, 4+3i-4+3i)=(8, 6i)

Returning (-4+8, 2+i^(-1)\*6i, -4-8, 2-i^(-1)\*6i)=(4, 8, -12, -4)

כלומר התוצאה הסופית היא: (4, 8, -12, -4)

כאשר נחלק את התוצאה ב4 נקבל (1,2,-3,-1) שזה בדיוק וקטור המקדמים של הפולינום שהתחלנו איתו את האלגוריתם.

**שאלה 2:**

יהי Y וZ המספרים שנרצה להכפיל. נחלק את המספרים ל חלקים שווים בגודל K. נגדיר וקטורים עם חלקי המספרים הנ"ל A וB עבור Y וZ בהתאמה. נקבל כי:

ו כאשר . (בהנחה שהמספרים מיוצגים בבינארית.)

נוכל לומר כי כאשר \* נציב .

נגדיר אלגוריתם שמחלק את המספרים Y וZ ל חלקים שווים. לאחר מכן האלגוריתם יחשב את הקונוולוציה של A וB לפי אלגוריתם FFT שלמדנו והגדרנו והוכחנו בספר. (יחשב את ערך A וB בנקודות מסויימות בעזרת FFT. לאחר מכן יחשב את ערך המכפלה בנקודות אלו ולבסוף ימצא את הקונוולוציה בעזרת INVERSE FFT).

לבסוף האלגוריתם יציב . לפי מה שהראנו לעיל התוצאה תהיה תוצאת מכפלת המספרים Y וZ.

נכונות האלגוריתם נובעת מהחישובים שביצענו לעיל. (כמו כן מתבסס על העובדה שFFT מתבצע כהלכה, מה שהוכח בספר הלימוד.)

**זמן ריצה:**

לפי הנתון בשאלה ניתן להניח (ללא הצדקה) שמכפלה של 2 מספרים באורך K תהיה תוצאה באורך K. ולכן זמן הריצה של הכפלת זוג מספרים כאילה יהיה .

זמן הריצה של אלגוריתם FFT הוא . כיון שהרצנו את האלגוריתם על קלט בגודל זמן הריצה של האלגוריתם FFT יהיה . בנוסף יש לקחת בחשבון את זמן הריצה של פעולת הכפל על קלט בגודל K. לכן זמן הריצה של FFT במקרה זה יהיה .

זמן הריצה של בנית הווקטורים A וB הוא לינארי. זמן הריצה של חישוב ההצבה הוא .

*נציב ונקבל:*

*לכן זמן הריצה של האלגוריתם יהיה:*

**שאלה 3:**

נגדיר A,B:

מתברר כי:

לכן, על מנת לחשב את הנגזרות מכל סדר עבור כלשהו נוכל לחשב את הקונוולוציה של A וB. וקטור המקדמים שנקבל בתוצאה C יהיה וקטור הנגזרות של f בנקודה כאשר .

תיאור האלגוריתם:

נגדיר את הוקטורים A וB בזמן לינארי. נחשב עבורם את הקונוולוציה בעזרת אלגוריתם FFT שהוגדר והוכח בספר בזמן . התוצאה שנקבל הוא וקטור הנגזרות הנדרש כפי שהוכחנו לעיל.

זמן הריצה של האלגוריתם יהיה .

**שאלה 4:**

אם נתבונן בנתון בשאלה נראה כי יש דרך לחשב מכפלה של 2 מטריצות בגודל NXN ע"י חישוב 7 מכפלות של מטריצות מגודל וחישוב הסכום שלהן. (הדבר מתאפשר בגלל תכונה הקיימת במטריצות שלפיה אפשר לבצע כפל של "בלוקים".) הדרך לעשות זאת מפורטת בשאלה.

בתרגיל הנחנו לשם נוחות שN בדרך כלל זוגי.

נגדיר אם כן אלגוריתם כך:

כל עוד N>1 נחלק את המטריצה ל4 תתי מטריצות, נחשב את המכפלות הרצויות עבור תתי המטריצות כפי המוגדר בשאלה ברקורסיה. את התוצאות נסכם כפי המוגדר בשאלה ונקבל את מכפלת המטריצות הרצויה.

אם N=1 נוכל לבצע את מכפלת המטריצות בזמן קבוע ונחזיר את התשובה.

נראה אם כן שבכל שלב N ברקורסיה, חשבנו 7 פעמים מכפלה של מטריצות מסדר . לאחר מכן חברנו בין מטריצות מסדר ולבסוף אחדנו 4 מטריצות מסדר למטריצה אחת מסדר N.

אם כך נוסחת הנסיגה לזמן הריצה של האלגוריתם היא:

*לפי שיטת האב שנלמדה בקורס מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים פתרון נוסחת הנסיגה הינו:*