**ממן 13: אלגוריתמים**

שם המגיש: משה מושקטל

**שאלה 1:**

א. נפריד את p(x) לשני פולינומים המורכבים מהחזקות הזוגיות והאי זוגיות של x, ונקבל:

כך ש:

*נראה את תוצאות הרצת האלגוריתם על שורשי היחידה:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -i | -1 | i | 1 |  |
| *-3* | *1* | *-3* | *1* |  |
| *-4* | *-2* | *-4* | *-2* |  |
| *-3+4i* | *3* | *-3-4i* | *-1* | P(x) |

*ב. נראה את תוצאות ה-INVERSE-FFT על פי תוצאות א:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **-i** | **-1** | **i** | **1** |  |
| *8i* | *-6* | *8i* | *-6* |  |
| *4* | *2* | *4* | *2* |  |
| *-4i* | *-2* | *4i* | *2* |  |
| *4i* | *-8* | *12i* | *-4* | P(x) |
|  | | | | |

***שאלה 2:***

***שלבי האלגוריתם:***

*תחילה נבצע המרה של המספרים לבסיס בינארי.*

*לאחר מכן, נפעיל את אלגוריתם FFT על שני הפולינומים שאותם אנו רוצים להכפיל,*

*כך נקבל בחירה חכמה של הנקודות המייצגות כל פולינום (כדי לקבל אלגוריתם הפרד-ומשול יעיל לביצוע חישוב הכפל).*

*נכפיל את שני הווקטורים שקיבלנו מהרצת ה-FFT,*

*נפעיל עליהם FFT Inverse – ונקבל את התוצאה של מכפלת שני הפולינומים (בבסיס בינארי).*

*נמיר את התוצאה חזרה מבסיס בינארי וקיבלנו את התוצאה הסופית של הכפלת שני הפולינומים.*

***נכונות:***

*האלגוריתם מתבסס על המרת המספרים לבסיס בינארי,*

*וכמו כן על האלגוריתם להכפלת שני פולינומים באמצעות אלגוריתם FFT.*

*לכן נכונות אלגוריתם זה נובעת מנכונות שני האלגוריתמים הנ"ל.*

***זמן הריצה*** *של הצגת המספרים בבסיס בינארי וחזרה הוא (מתבצע פעמיים – בתחילת האלגוריתם ובסופו).*

*הרצת האלגוריתם FFT על בלוקים בגודל (n/k) היא ,*

*עלות ההכפלות היא (נתון)*

*ולכן נקבל . נבחר ונקבל: ועל פי חוקי לוגריתמים:*

לכן סה"כ זמן הריצה הוא: .

***שאלה 3:***

***שלבי האלגוריתם****: חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה*

*נגדיר שני וקטורים A וB (בהתבסס נוסחת נגזרת לפולינום) :*

*בעזרת וקטורים אלה, נקבל שהנגזרת ה-t היא האיבר ה-n-t של תוצאת הרצת אלגוריתם ה-FFT על A \* B .*

*האלגוריתם יקבל את דרגת הפולינום n, את מקדמי הפולינום ואת הנקודה (נגזרת בנקודה)*

1. *עבור בצע:*
2. *נריץ את אלגוריתם FFT ונשמור את התוצאה ב-y כך שמתקבל*
3. *עבור בצע:*
   1. *הצג כפלט את ערך הנגזרת ה-t בנקודה :*

***נכונות האלגוריתם*** *נובעת מנכונות האלגוריתם להכפלת וקטורים שתוצאתם מציגה את הנגזרת ה k של f .*

***יעילות –*** *יצירת הווקטורים A ו B דורשת זמן ריצה לינארי . להכפלת הווקטורים בעזרת אלגוריתם FFT זמן ריצה של ,ולאחר מכן הצגת הפלט ולכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא .*

***שאלה 4:***

*מימוש ישיר של כפל מטריצות כרוך ב- פעולות אריתמטיות.*

*ביטוי זה נגזר מהעובדה שבכל שלב של הרקורסיה באלגוריתם מפרקים כל מטריצה ל-4 תתי מטריצות מסדר (כלומר 8 קריאות רקורסיביות – פעולות כפל)*

*ו-4 פעולות חיבור (בין כל שני איברים במטריצה).*

*על כן מתקבלת נוסחה לפי שיטת האב לחישוב זמן הריצה של האלגוריתם –*

*.*

*האלגוריתם הנתון שונה מאלגוריתם מימוש ישיר של כפל מטריצות בכך שמספר פעולות הכפל ירד ל7 (במקום 8) – ומספר פעולות החיבור-חיסור גדלו ל-18 (מספר הפעולות שיש ב-P1-P7 ו-s,t,r,u).*

*לכן, אם נשתמש שוב בשיטת האב לחישוב זמן הריצה של האלגוריתם נקבל את הנוסחה:*

*. מה שצריך להוכיח.*