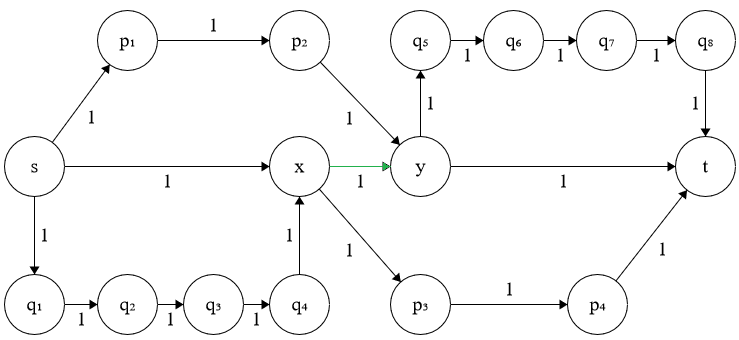
# שאלה 1



נבחר את הצלע . באיטרציה הראשונה נבחר המסלול באורך 3 העובר דרך ומעביר זרימה 1 ואז באיטרציה השנייה נבחר המסלול באורך 7 , ואז באיטרציה השלישית נבחר המסלול באורך 11 שהוא העובר פעם שנייה דרך ומעביר זרימה 1.

# שאלה 2

זרימה חוקית בשאלה שלנו מקיימת:

* שימור זרימה -
* חסימת זרימה מלמטה -

## סעיף א

יהי זרימה חוקית ברשת שהזרימה הכוללת שלה היא . אנחנו רוצים ליצור רשת זרימה חדשה שהזרימה הכוללת שלה תהיה גדולה כרצוננו, ונסמן ב-, כאשר בפרט .

לכל צלע נגדיר: . מכיוון ו- אז נקבל ולכן ולכן חסימת זרימה מלמטה מתקיימת. הכפלנו כל צלע בגרף בקבוע מספרי שאינו אפס, ולכן סכום הזרימה הנכנסת ויוצאת לכל קודקוד מקיימים:

ולכן הזרימה היא זרימה חוקית ברשת, כאשר כל צלע הגדלנו ביחס שווה, ולכן הזרימה הכוללת היא שהיא זרימה גדולה כרצוננו.

## סעיף ב

### האלגוריתם:

נבצע רדוקציה לבעיית מציאת הפצה הכוללת ביקושים וחסמים תחתונים (עמוד 413 בספר). נמצא את הקיבולת המרבית ונגדיר אותה כחסם התחתון : . נגדיר פונקציית קיבולת חדשה כך ש-. נגדיר את הביקושים ל-0, כלומר . נריץ את האלגוריתם ונחזיר את הזרימה.

### הוכחת נכונות:

אם נגדיר שלכל צלע הקיבולת היא לפחות אנחנו נשמור על חסימת הזרימה מלמטה, אבל אנחנו צריכים לטפל בשימור זרימה (טיפול לא טריוויאלי). אנחנו נגדיר חסם תחתון לזרימה של , וכך בוודאות נקבל זרימה מספיק גדולה עבור כל קשת. מכיוון ואנחנו מניחים כי (כי קיימים ), אז מתקיים .

הערך , הקיבולת החדשה עבור כל צלע, למעשה מתאימה לזרימה הכי גדולה שאנחנו יכולים לקבל אילו היינו מצליחים להזרים בדיוק בכל קשת. בזכות סעיף א אנחנו יודעים שאפשר לקבל זרימה חוקית גדולה כרצוננו, בפרט הזרימה הנ"ל. בזכות כך אנחנו נקבל כי בסוף ריצת האלגוריתם נקבל זרימה לכל צלע המקיימת , ולכן חסימת הזרימה מלמטה מתקיים. מכיוון והזרימה היא חוקית בחוקים זרימה רגילים (חסימה מלמעלה), אז חוק שימור הזרימה מתקיים ובגלל שהוא לא השתנה, אז מקיים שימור זרימה, ולכן הוא זרימה חוקית כלשהי.

### ניתוח זמן ריצה:

החישוב של , ובניית ו- הם כולם בסיבוכיות . נשאר לחשב זמן ריצה של האלגוריתם למציאת הפצה. האלגוריתם הנ"ל, לפי ההוכחה בעמוד 412, הוא בעצמו רדוקציה לבעיית מציאת הפצה עם ביקושים, שקיים אלגוריתם עבורה בעמוד 411. סה"כ כל הרדוקציה הזאת היא בסיבוכיות (הסיבוכיות של אדמונס-קרפ). סה"כ נקבל .

## סעיף ג

### רעיון האלגוריתם:

נריץ את האלגוריתם מסעיף ב, ובנה גרף חדש , כאשר , לכל אם"ם , ופונקציית הקיבולת היא , כאשר זהו ערך הזרימה שקיבלנו מסעיף ב. נריץ את אדמונס-קרפ מ- ל- ונקבל את ערך הזרימה שצריך להפחית מהזרימה מסעיף ב.

### האלגוריתם:

1. הרץ את האלגוריתם מסעיף ב, ונקבל זרימה .
2. נבנה גרף חדש ופונקציית קיבולת :
   1. לכל הוסף
3. נריץ את אלגוריתם אדמונס-קרפ מקודקוד מקור וקודקוד בור ונקבל זרימה
4. לכל נחשב .
5. החזר את בתור הזרימה החוקית המזערית.

### ניתוח זמן ריצה:

ההרצה של סעיף ב לוקחת . בניית גרף העזר בשלב 2 היא העתקה של קבוצת הצמתים וחישוב לכל צלע ולכן . ההרצה של אדמונס-קרפ לוקחת . החישוב הסופי בשלב 4 הוא . סה"כ קיבלנו שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא .

### הוכחת נכונות:

אנו מניחים שהאלגוריתם מסעיף ב נכון, ולכן הפונקציה תהווה זרימה חוקית כלשהי בנתוני השאלה. נתון שבגרף המקורי שלכל זוג צמתים לכל היותר קיימת צלע בודדת ביניהם ורק מעליה מוגדרת פונקציית הקיבולת המקורית . ולכן בגרף , מכיוון ורק הפכנו את כיוון הצלעות, אז שוב מתקיים שלכל צמתים לכל היותר צלע בודדת קיימת ביניהם.

יהי צלע . לפי נכונות האלגוריתם מסעיף ב, מתקיים . ולכן נקבל כי מתקיים , כלומר פונקציית הקיבולת היא אי-שלילית. בזכות נכונות אלגוריתם אדמונס-קרפ, אנחנו נקבל זרימה חוקית (רגילה) המקסימלית בגרף , כלומר:

*לגבי שימור זרימה, נשים לב כי היא זרימה חוקית מסעיף ב, ולכן מקיימת שימור זרימה, ו- היא תוצאה של אדמונס-קרפ, ולכן גם משמרת זרימה:*

*ולכן הזרימה שנקבל היא זרימה חוקית בנתוני השאלה. נוכיח שהיא אכן מזערית:*

*נניח בשלילה ש- אינה זרימה מזערית. כלומר קיימת זרימה חוקית מזערית יותר . כלומר קיימת צלע  
 כך ש-. כלומר מתקיים . בדומה להוכחה מקודם, פונקציית הזרימה הנוצרת מההפרש היא זרימה חוקית בגרף . אך לפי זה שקיימת צלע עבורה נקבל שבזרימה , כלומר קיימת זרימה רגילה בגרף שהזרימה גדולה יותר מ-, וזה בסתירה לכך שאלגוריתם אדמונס-קרפ מספק לנו את הזרימה המקסימלית. ולכן יש סתירה, ולכן הזרימה היא הזרימה החוקית המזערית.*

# שאלה 3

יהי גרף עם פונקציית קיבולת . נתונה זרימה מרבית בקשת . נבחרה צלע מסויימת .

## סעיף א

נניח שהגדלנו את הקיבולת של ב-1. כמובן שהקיבולת המרבית כעט יכולה לא להשתנות או לגדול ב-1. נציג אלגוריתם שימצא את הזרימה המרבית החדשה.

### אלגוריתם:

1. בנה רשת שיורית על סמך הזרימה הנתונה כאשר נגדיל ב-1 את הקיבולת ב-.
2. הרץ אלגוריתם אדמונס-קרפ על המעודכן, ונעדכן במידת הצורך את מסלול השיפור והזרימה המרבית.
3. החזר את התוצאה מהרצת אדמונס-קרפ.

### ניתוח זמן ריצה:

בניית רשת השיורית וההגדלה היא בזמן . כאשר אנחנו מריצים את אדמונס-קרפ על הרשת השיורית, נשים לב כי אם לא קיים מסלול שיפור, אז הרצנו פשוט וסיימנו. המסלול שיפור בהכרח עובר דרך (אחרת קיים מסלול שיפור בלי קשר לשינוי בקיבולת, ולכן אינה זרימה מרבית בסתירה לנתון), כאשר מסלול שיפור זה יעביר בו זרימה השווה לקיבולת של שהוא צוואר הבקבוק (כל הקיבולות שלמות חיוביות ולכן הזרימה הכי קטנה היא 1) ואז באיטרציה הבאה בהכרח כבר לא ימצא מסלול שיפור אחר (כי במצב כזה קיים מסלול שיפור שלא עובר דרך הסותר מה שהוכחנו מקודם) . סה"כ הסיבוכיות של הרצת אדמונס-קרפ היא לכל היותר הרצת פעמיים ומעבר על הצלעות, סה"כ . סה"כ נקבל שזה סיבוכיות לינארית.

נכונות האלגוריתם נובעת מנכונות אדמונס-קרפ.

## סעיף ב

נניח שהקטנו את הקיבולת של ב-1. כמובן שהקיבולת המרבית כעט יכולה לא להשתנות או לקטון ב-1. נציג אלגוריתם שימצא את הזרימה המרבית החדשה.

### אלגוריתם:

1. אם אז השינוי לא משנה את הזרימה הסופית אז החזר ישר את .
2. נריץ מצומת ונמצא מסלול פשוט לצומת המכיל את , ועל כל קשת במסלול זה נוריד 1 מערך הזרימה ונוריד 1 מערך הזרימה המקסימלי הכולל.
3. בנה רשת שיורית על סמך הזרימה והשינוי משלב 2.
4. הרץ אלגוריתם אדמונס-קרפ על המעודכן, ונעדכן במידת הצורך את מסלול השיפור והזרימה המרבית.
5. החזר את התוצאה מהרצת אדמונס-קרפ.

### ניתוח זמן ריצה:

הבדיקה משלב 1 היא . הרצת היא , מציאת המסלול שעובר דרך הוא גם בסיבוכיות והעדכון הוא . בניית הרשת השיורית היא בזמן . בדומה להוכחה מסעיף א, הזמן הריצה של שלב 4 הוא . סה"כ קיבלנו , סיבוכיות לינארית.

### הוכחת נכונות:

אם מתקיים , בגלל שכל הקיבולות שלמות, מתקיים ולכן הזרימה הישנה עדיין חוקית ופשוט אפשר להחזיר אותה. נטפל במקרים של (המקרה של גדול לא אפשרי כי זו זרימה חוקית החסומה בקיבולת).

נתון כי , ולכן מתקיים . אם הזרימה דרך צלע אינה אפס, כלומר במהלך הרצת פורד-פולקסון היה מסלול שיפור שעבר דרך . ולכן קיים מסלול פשוט ב- העובר דרך . ולכן בשלב 2 נמצא מסלול כזה, שלאורך כל הצלעות שלו נקטין את ההזרמה ב-1. מכיוון וכל צומת מופיע לכל היותר פעם אחת במסלול (כי הוא פשוט), ולכל צומת פרט ל- יש קשת כניסה ויציאה שלשתיהן הקטנו ב-1 את הזרימה, נקבל ששימור זרימה נשמר. חסם הקיבולת נשמר כי הקטנו את הזרימה. ולכן נקבל שהזרימה שמתקבלת בסוף שלב 2 היא חוקית, ולכן הרצה של אדמונס-קרפ עליה היא חוקית.

המשך הנכונות נובע מנכונות אדמונס-קרפ.

# שאלה 4

קיבלנו נוסחת שבה יש משתנים בשמות , כאשר כל משתנה מופיע בדיוק ב-3 פסוקיות שונות. נסמן את כל הפסוקיות ב-, וידוע שבכל פסוקית יש 3 משתנים שונים. האלגוריתם ימצא השמה מספקת.

## רעיון כללי:

נבנה גרף דו צדדי כך ששני הצדדים הם:

* – כל המשתנים
* – כל הפסוקיות

קיימת צלע בין משתנה לפסוקית אם"ם המשתנה מופיע בפסוקית . נגדיר קיבולת לכל צלע כזאת

נשים לב כי בגלל ש:

* : בגלל שכל משתנה מופיע בדיוק ב-3 פסוקיות.
* : בגלל שבכל פסוקית יש 3 משתנים שונים.

ולכן (הוכחה למה בהמשך) נקבל שקיים זיווג מושלם בין ל-, ונמצא אותו באמצעות מציאת זרימה מרבית בגרף כאשר כאשר בגרף יש את כל הצלעות מהגרף ובנוסף יש צלעות מ- לכל המשתנים וצלעות מכל הפסוקיות ל-. הקיבולות יהיו 1 לכל הצלעות בגרף . הזרימה המרבית בגרף הוא בגודל (כקיבולת החתך המינימלית), כאשר התוצאה תהיה בהכרח חיבור של כל משתנה לפסוקית אחת בודדת. על בסיס ה-"תלות" של כל פסוקית במשתנה מסוים, נקבל עבור כל פסוקית איזה ערך משתנה מסוים חייב לקבל, ולפי זה נחזיר את התשובה.

## האלגוריתם:

1. בנה גרף כפי שתואר ברעיון
2. הרץ אלגוריתם פורד-פולקרסון ונקבל את הזרימה המרבית ברשת.
3. עבור כל צלע כך ש- וגם :
   1. אם המשתנה מופיע ללא סימן השלילה ב- אז
   2. אחרת
4. החזר את שהוא התאמת ערך אמת או שקר לכל משתנה

## ניתוח זמן ריצה:

נשים לב כי מתקיים וגם .

ולכן זמן בניית הגרף הוא . הרצת פורד-פולקרסון תיקח לנו . לפי הרעיון הכללי יש התאמות בין ל-, כלומר היו רק קשתות כאלה שהועברה בהם זרימה, כאשר בכל איטרציה מבצעים בדיקה והצבה בזמן קבוע, ולכן מחיר שלב 3 הוא . סה"כ קיבלנו .

## הוכחת נכונות:

ניקח את הגרף הדו-צדדי שמכיל רק את ואת , שהם שני הצדדים שלו (לפני בניית העזר), כאשר מתקיים . ולכן לפי משפט 7.40 (משפט הול – עמוד 401 בספר) נקבל שתתקיים אחת מהאפשרויות הכתובות. נוכיח שהאפשרות השנייה, קיימת תת קבוצה כך ש-, לא אפשרית. נניח בשלילה כי קיימת תת קבוצה המקיימת . קבוצה היא קבוצה בגודל של משתנים, ו- היא קבוצת הפסוקיות בהן כל המשתנים מ- מופיעים. בזכות העובדה שיש 3 משתנים שונים בכל פסוקית, נקבל כי בסתירה להנחה. ולכן רק האפשרות הראשונה ממשפט הול אפשרית בשאלה שלנו, כלומר קיים זיווג מושלם.

אם קיים זיווג מושלם, כלומר לכל פסוקית מ-, קיים זיווג יחיד למשתנה מ-. לפי איך שבנינו את הצלעות בין שני הצדדים, נקבל שמצאנו תלות של כל פסוקית במשתנה בודד (ולכל משתנה יש רק פסוקית אחת שתלויה בו), ובכך **הוכחנו שהנוסחה בהכרח ספיקה**.

אם כל פסוקית תלויה במשתנה בודד, אז לפי צורת המופע של המשתנה בפסוקית אפשר לבחור האם הוא צריך לקבל ערך אמת או שקר. מכיוון ולכל משתנה יש רק פסוקית אחת שתלויה בו, אז לא יקרה מצב שיש תלות בשני ערכים שונים למשתנה, ולכן ההשמה שבחרנו היא בהכרח השמה מספקת.