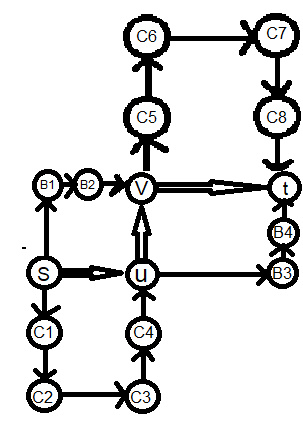
ממן 15 אלגוריתמים

שאלה 1:



מכיוון שלא היה לי מקום ב"צייר" אגיד כאן כי כל הקיבולות הן בכיוון החיצים ובגודל 1.

הסבר:

לקחנו איזשהו "צוואר בקבוק", קשת (v,u), ודאגנו שהוא יהיה מוקד המעבר של 3 מסלולים לפי אורך המסלולים, לאחר כל העברת זרימה במסלול הוא "יצא מהמשחק" (כי כל הקשתות פרט ל(v,u) לא תהיינה רלוונטיות) המסלולים יהיו, לפי הסדר: 1.  *2. 3. (), הזרימה המקסמלית בגרף היא כמובן 3.*

*הערה: מתנצל על האיכות של הציור והעובדה שהוא אולי מסובך מידי בשביל להבהיר את הנקודה, לא הצלחתי לפשט אותו יותר.*

שאלה 2:

1. הרעיון שלי הוא, שמכיוון שקיימת זרימה חוקית, בה הזרימה בכל צלע גדולה בהכרח מ0, אם נכפיל את כל הזרימה בכל הצלעות באותו פקטור, גדול לפי רצוננו, נוכל להגדיל את הזרימה לפי רצוננו.

תהי f זרימה חוקית ברשת, נראה כי החל מ כלשהו, עבור כל קיימת זרימה בגודל n, למרות שהניסוח מזכיר אינפי- ההוכחה תהיה ממש פשוטה:

תהי , בניסוח החדש, מכיוון שו אזי מטרנזיטיביות מתקיים כי ש*. כאמור, על מנת להוכיח כי קיימת זרימה חוקית גדולה כרצוננו נראה כי* עבור כל קיימת זרימה בגודל n.

תהי פונקציית זרימה חדשה לכל המוגדרת כך:

[הערה: הסיבה שהוכחנו כי היא שפונקציית הזרימה תהיה מוגדרת היטב (ללא חלוקה ב0), ושונה מ0, מכיוון שנרצה ליצור פונקציה גדולה כרצוננו עבור כל n.]

נראה כי היא פונקציית זרימה חוקית, על פי ההגדרה החדשה:

2 הגדרות יש, על מנת להראות שהפונקציה תהיה חוקית, ראשית,  **אך כידוע מוגדרת ע"י** : ומכיוון ש נסיק כי , כאשר הא"ש האחרון מהעובדה כי f פונקציית זרימה חוקית.

ולכן מטרנזיטיביות נקבל כי , כלומר ענינו על התנאי הראשון.

כעת נותר התנאי השני- קיום שימור הזרימה, נראה כי :

*אך לפי ההגדרה מתקיים כי*

*הא"ש הקודם לאחרון נובע מכך שf עצמה הינה פונקציה חוקית ולכן עבורה מתקיים חוק שימור הזרימה.*

*כעת רק נותר להראות כי באמת :*

*ידוע כי גודל של זרימה הוא סך הזרימה היוצא מ-s, כלומר*

נחשב זאת:

וסיימנו להראות כי החל ממספר מסוים, ניתן למצוא זרימה חוקית גדולה ממנו, או באופן שקול, ניתן למצוא זרימה חוקית גדולה כרצוננו, מש"ל.

**הערה**: כעת לאחר שעברתי על פתרון של חבר ונתקלתי ברעיון של הגדלת מסלול בודד אני מרגיש כי סיבכתי את זה מאוד, אך זה עדיין "עובד" ולכן הסתפקתי בפתרון הזה.

1. נרצה לטפל בכל קשת כך שתקיים 2 דברים- 1. אחרי שנזרים בה ישמר חוק שימור הזרימה ו2. הזרימה שתוזרם בה תהיה גדולה או שווה לקיבולת המינימלית שלה, ולכן נעבור על כל קשת, נמצא מסלול מs לt, מכיל אותה ונזרים בו את הקיבולת המינימלית שלה.

האלגוריתם עצמו:

1. עבור כל , הגדר f(e)=0.
2. עבור כל שעבורו f(e)<c(e):
   1. הפעל חיפוש BFS על s, והגדר עבור כל קשת במסלול הקצר ביותר בין s לu את f(e') בתור (כלומר מוספים לערך f כל קשת במסלול את הערך שחסר ל כדי להגיע לc(e)).
   2. הפעל חיפוש BFS על v, והגדר עבור כל קשת במסלול הקצר ביותר בין v לt את f(e') בתור (כלומר מוספים לערך f כל קשת במסלול את הערך שחסר ל כדי להגיע לc(e)).
   3. הגדר את . (בעצם ההשמה היא )
3. החזר את f.

**הוכחת נכונות:**

שוב, נצטרך להראות 2 דברים: שהקיבולת של כל קשת קטנה או שווה לערך שזורם בקשת, ושחוק שימור הזרם מתקיים.

ראשית, כאשר בפקודה 2. אנו עוברים על כל הקשתות, אנו דואגים שבכל קשת e יזרום הערך c(e), לכל הפחות (אלא אם כבר זרם בה זרם כזה), ובכל איטרציה אחרת אנו יכולים להוסיף לה רק ערך של עבור קשת אחרת, אך מכיוון שלכל קשת כזאת מתקיים אנו מוסיפים לה ערך חיובי ממש. ולכן בהכרח בסוף איטרציות 2. מתקיים כי .כלומר הראינו תנאי 1.(בצורה פשוטה יותר, לכל קשת e באיטרציה "שלה" אנו דואגים ש ובשאר האיטרציות ניתן רק להוסיף לf(e), ולכן גם בסוף מתקיים )

שנית, כאשר אנו מעברים במסלול כלשהו בין s לt זרם כלשהו וקודם לכן נשמר חוק שימור הזרימה, גם לאחר העברת הזרם בין s לt נשמר חוק שימור הזרימה. נראה זאת: מכיוון שקודם לכן התקיים חוק שימור הזרימה ולכל קודקוד v במסלול, לבד מs,t התקיים כי כלומר: , אך כעת, לאחר שבאחת הקשתות אליו הוספנו מספר חיובי L כלשהו, ובאחת בקשתות **ממנו** הוספנו את אותו המספר, מתקיים כי

*כלומר, הוכחנו כי לאחר הוספה של אותו מספר חיובי לכל קשת במסלול כלשהו בין s לt, נשמר חוק שימור הזרימה, ולכן גם עבור הוספה של L=c(e)-f(e)>0 מתקיים התנאי הנ"ל. מכיוון שזרימת ה0 מקיימת את חוק שימור הזרימה, אזי לאחר שלב 1. באלגוריתם החוק מתקיים, ולפי מה שהראנו כעת גם ב2. חוק שימור הזרימה נשמר בכל איטרציה- ולכן הזרימה המוחזרת ב3. משמרת את חוק שימור הזרימה. מש"ל.*

*סיבוכיות:*

*שלב 1 מבצע פעולה 1 עבור כל , ולכן נעשה ב.*

*שלב 2 מפעיל BFS פעמיים עבור כל , ולכן נעשה ב.*

*שלב 3 נעשה ב. ולכן האלגוריתם מתבצע ב.*

1. *נרצה להשתמש ברדוקציה לאלגוריתם אדמונד-קארפס. נניח כי כבר יש לנו זרימה חוקית, המתקבלת מהרצת האלגוריתם בסעיף ב', נרצה לדעת כמה להוריד מכל קשת על מנת להגיע לזרימה חוקית מינימלית.*

*כלומר, היינו רוצים להוריד את* ***הזרימה המקסימלית*** *מתוך זרימה חוקית f, כך שתישאר זרימה מעל הקיבולת המינימלית. על מנת למצוא את הזרימה המקסימלית להוריד נשתמש באלגוריתם אדמונד-קארפס על הגרף . כאשר פונקציית הקיבולת היא*  המוגדרת , לאחר שמצאנו את זרימה המקסימלית בN', נחסיר אותה מf ונסיים.

נתאר את האלגוריתם.

1. נפעיל את אלגוריתם סעיף ב' ונשמור את התוצאה לתוך פונקציית זרימה f.
2. נפעיל את אלגוריתם אדמונד-קארפס על שמוגדר למעלה. ונקבל פונקציית זרימה חדשה h על N'.
3. נחזיר את f-h.

הוכחת נכונות:

ראשית נראה כי פונקציית הזרימה f-h הינה חוקית:

שוב נתבקש להראות כי מתקיים חוק שימור הזרימה וכי :

ראשית נראה כי :

לפי הגדרת אדמונד-קארפס,מתקיים כי ולכן מתקיים כי כנדרש, כלומר, אכן מתקיימת החסימה מלרע של פונקציית הזרימה ע"י הקיבולות.

כעת נותר להראות כי מתקיים חוק שימור הזרימה:

ידוע כי f וh מקיימות את חוק שימור הזרימה, ולכן לכל v בגרף כך ש מתקיים

ולכן נפתח את הביטוי הנ"ל עבור f-h:

כלומר, אכן מתקיים חוק שימור הזרם.

כעת נותר רק להוכיח כי הזרימה מינימלית:

נניח בשלילה כי הזרימה אינה מינימלית, כלומר, קיים איזשהו מסלול בין s לt, כך שניתן להוריד מכל הקשתות במסלול זרימה L>0 כלשהי ועדיין לקיים את תנאי החסימה מלרע ע"י הקיבולות. אזי ניתן להזרים במסלול הזה את L בשלב 2- בו מופעל אדמונד-קארפס, ולמצוא זרימה חוקית גדולה יותר בN', בסתירה לכך שאדומנד-קארפס מוצא את הזרימה החוקית הגדולה ביותר – לפיכך הזרימה אכן מינימלית.

**סיבוכיות:**

שלב 1 מתבצע כאמור בסעיף ב' בסיבוכיות של  *שלב 2 כולל יצירת גרף זהה עם קיבולות שונות - – והרצת אדמונד-קראפס עליו -, שלב 3 נעשה בסיבוכיות קבועה ולכן האלגוריתם כולו פועל ב.*

שאלה 3:

1. הרעיון הוא שלאחר הגדלת הקשת ב1, נגדיר *. כאשר פונקציית הקיבולת היא*  המוגדרת , כלומר, בגרף שמכיל את כל הקשתות הלא רוויות, נשמור לכל קשת את הקיבולת השיורית שלה.

כעת, בהינתן שקיבולתה גדלה ב1, פשוט נדרש לחפש מסלול כלשהו ברשת השיורית העובר ב ולהזרים בו 1.

האלגוריתם:

1. אם הגדלת הקיבולת לא מועילה ולכן נסיים- לא ניתן להזרים יותר.
2. נגדיל את הקיבלת הקשת- - ב1.
3. נבנה את כאמור למעלה.
4. נריץ BFS על s (אם קיים מסלול בין s לu האלגוריתם ימצא אותו) אם אכן קיים מסלול כלשהו בין s לv, נזכור אותו כמסלול . אחרת נסיים- לא ניתן להזרים יותר.
5. נריץ BFS על u (אם קיים מסלול בין v לt האלגוריתם ימצא אותו) אם אכן קיים מסלול כלשהו בין u לt, נזכור אותו כמסלול . אחרת נסיים- לא ניתן להזרים יותר.
6. בכל קשתות המסלול , נזרים בכל המסלול ערך 1, ובכיוון ההפוך נזרים מינוס 1. גם בפונקציה f המקורית.

**הוכחת נכונות:**

ברור כי אם ניתן להגדיל קשת אחת, הזרימה תגדל רק אם אכן נזרים דרכה.

מכיוון שהאלגוריתם באמצעותו הגענו לזרימה המקסימלית הינו Ford-Fulkerson ובכל שלב באלגוריתם מוסיפים לזרימה בקשת כלשהי את הקיבולת השיורית של אחת הקשתות, ומאינדוקציה פשוטה (בסיס: זרימת ה0 בה כל הזרימה בכל קשת היא שלמה) וסגירות השלמים לחיבור, נקבל כי בכל שלב הזרימה בכל קשת שלמה גם היא.

כלומר, אם קיים ברשת N' מסלול העובר ב, בהכרח ניתן להעביר בכל המסלול זה זרימה נוספת של 1, מכיוון שידוע כי , ומכיוון שמדובר בשלמים, "גדול ממש מ-0" משמעותו "גדול או שווה ל1" ולכן ניתן להעביר במסלול העובר ב ברשת השיורית פשוט זרימה נוספת של 1 – בדיוק מה שהאלגוריתם מבצע- מכיוון שלפי הגדרה קיים מסלול בין s לt העובר בe אם"ם קיין מסלול בין s לu, וקיים מסלול בין v לt. ועל פי תכונות אלגוריתם BFS אם קיים כזה נמצא אותו ונעביר בו זרימה של 1- כנדרש.

ולכן, הראנו כי אם ניתן להגדיל את הזרימה, העברת זרימה של 1 במסלול בין s לt העובר ב, אכן תגדיל את הזרימה למקסימום- ומכיוון שזה בדיוק מה שהאלגוריתם מבצע – במימוש ע"י שימוש בbfs – האלגוריתם אכן מוצא את הזרימה המקסימלית.

**סיבוכיות האלגוריתם:**

שלבים 1 ו2 נעשים ב*, בניית רשת הזרימה החדשה מתבצעת ב* ב*, כמו גם הפעלת BFS פעמיים בשלבים 4 ו5 מתבצעת ב* ב*,והזרמת זרם 1* בכל קשתות המסלול מתבצעת ב*. כלומר סיבוכיות האלגוריתם כולו היא* ***.***

1. *הרעיון זהה, רק שנרצה לחפש מסלול בו ניתן* ***להוריד*** *1 ממסלול המכיל קשתות הזורם בהם זרם כלשהו, ולאחר מכן לבדוק האם ניתן להוסיף 1 למסלול בדרך אחרת- שתבטל את המחיקה של ה1 מהזרימה המקסימלית.*

*רק שאנו נרצה להתבונן ברשת זרימה*

*האלגוריתם בתחילתו, עד שלב 6, יהיה דומה מאוד:*

1. אם הקטנת הקיבולת לא כופה שינוי ולכן נסיים-ניתן להזרים אותה זרימה.
2. נקטין את הקיבלת הקשת- - ב1.
3. נבנה את כאמור למעלה.
4. ברשת N'' נריץ BFS על s (אם קיים מסלול בין s לu האלגוריתם ימצא אותו) אם אכן קיים מסלול כלשהו בין s לv, נזכור אותו כמסלול .
5. ברשת N'' נריץ BFS על u (אם קיים מסלול בין v לt האלגוריתם ימצא אותו) אם אכן קיים מסלול כלשהו בין u לt, נזכור אותו כמסלול .
6. בכל קשתות המסלול , נזרים בכל המסלול ערך והכיוון ההפוך נזרים בכל המסלול ערך 1. גם בפונקציה f המקורית.

כעת אנו נרצה לבדוק אם ניתן להוסיף זרימה של 1 בכל אופן לגרף בדרך אחרת:

1. נתבונן ברשת כמוסבר בסעיף א': *.* כאשר *פונקציית הקיבולת היא*  המוגדרת , כלומר, בגרף שמכיל את כל הקשתות הלא רוויות, נשמור לכל קשת את הקיבולת השיורית שלה.
2. נריץ BFS על הקודקוד s.

מכיוון ש BFS מוצא מסלול בין s לt ברשת השיורית, אם יש כזה נזרים בו 1, בדומה לאדמונד-קארפס, ונסיים, אחרת, לא ניתן להזרים ונסיים:

1. אם נסיים.
2. אחרת, נעקוב אחורה מt עד s ובמסלול שמוצא לנו BFS בינהם נזרים 1- ובכיוון ההפוך נזרים 1.

**הוכחת נכונות:**

ברור כי אם הוקטנה קיבולת קשת אחת ב1, הזרימה תקטן רק אם אכן זרם דרכה הזרם שאכן שווה לקיבולת, ולכן אחרת נסיים.

הוכחנו בסעיף א' כי הזרימה בתחילה היא שלמה.

*מכיוון שכעת לא ניתן להעביר זרם ב, וכל הזרימה אכן שלמה, ניתן למצוא מסלול בגודל 1, לכל הפחות, ולהחסיר ממנו 1.*

*מכיוון שכאשר נחסיר 1 בשלבים 4-6 נשמור על חוק שימור הזרימה ובקשת הקיבולת כעת תחסום מילעיל, מכיוון שהחסרנו 1.(וכמובן ששאר קיבולות עדיין חוסמות מלעיל, מכיוון שאנחנו לכל היותר רק מחסירים מכל קשת).*

*אך מכיוון שאין הכרח כי הזרימה עדיין מקסימלית, נבדוק האם קיים מסלול שיפור, ונראה כי אם קיים כזה, האלגוריתם מוסיף לזרימה 1- וכך שוב מגיע לזרימה המקסימלית:*

*האלגוריתם פועל בדיוק כמו אדמונד-קארפס – מחפשים ברשת השיורית מסלול בן s לt. אך- ופה הקאץ' – הסיבה שניתן לעשות זאת בפעם אחת הוא שמכיוון שברשת הזאת הזרימה בשלמים – ולכן אם קיים מסלול זרימה כלשהו עם זרימה גדולה ממש מ0, הזרימה במסלול בהכרח גדולה או שווה ל1, ולכן, מכיוון שהזרימה לא יכולה להיות גדולה מהזרימה לפני ההפחתה ב, לא ייתכן שלאחר זרימה של 1 יותר קיים מסלול עם זרימה גדולה יותר, שאם כן, הזרימה הזאת הייתה גדולה מהזרימה שהתקבלה ב* Ford-Fulkerson, ולכן, מכיוון שהיא מתאימה גם להגבלות הגרף הקודם, מצאנו זרימה גדולה מהזרימה המקסימלית- סתירה.

ומכיוון שמה שהאלגוריתם בעצם מבצע בשלבים 7-10 הוא המתואר לעיל, האלגוריתם בעצם אכן מוצא זרימה מקסימלית.

**סיבוכיות האלגוריתם:**

שלבים 1-6 דומים, כאמור, לשלבי סעיף א', ולכן אם נעבור עליהם, ניתן לראות שאת בניית הרשת, הרצת הBFS-ים והזרמת הזרמים במסלול, נעשה ב**.**

שלב 7*, בניית רשת, נעשה* ב, שלב 8 , הרצת BFS, נעשה גם הוא ב*, שלב 9 נעשה בסיבוכיות קבועה* , ושלב 10, מעבר על מסלול והגדרת זרימה בו, נעשה ב.

סה"כ: סיבוכיות של.

שאלה 4:

על מנת להוכיח נשתמש במשפט HALL

נגדיר גרף כזה:

ובעברית צחה- *כל הליטרלים תורגמו לקודקודים בגרף, כמו גם כל הפסוקיות היוצרות את הנוסחה, וביניהם יש קשתות בין כל ליטרל לפסוקית בו הוא מופיע (וכמובן בין כל פסוקית ל3 הליטרלים שהיא מכילה).*

*ראשית נבחין כי 2 הקבוצות, הליטרלים והפסוקיות, באותו הגודל: אם נניח כי קיימת פסוקית אחת יותר על מספר הליטרלים או להיפך, לצורך העיניין k לעומת k+1, מכיוון שכל איבר בכל קבוצה קשור ל3 איברים* ***שונים*** *בקבוצה השנייה, קיימים עבור k+1 איברים בקבוצה 1, כ(k+1)3 איברים בקבוצה השנייה- לא בהכרח שונים, אך ידוע שמתוכם לפחות לא קיימת רביעייה זהה, כלומר, לפחות*  שונים, בסתירה לכך שישנם רק k איברים בקבוצה השנייה. מכאן נסיק כי m=n ולכן .

ע"י הפסקה האחרונה בעצם הוכחנו 2 דברים הנחוצים למשפט HALL:

עבור , מתקיים כי הראנו כי n=m וגם, מכיוון שהראינו כי לכל תת קבוצה של L או R, מותאמת תת קבוצה לפחות באותו גודל, בעצם הוכחנו כי לכל , ולכן ענינו על כל תנאי משפט הול ולכן מתקיים כי קיים שידוך מושלם בין L לבין R.

אם נעבור על קשתות השידוך המושלם, ובכל קשת נתאים לליטרל את הערך הדרוש על מנת לספק את הפסוקית המתאימה לו, נקבל השמה מספקת שתוכיח שהנוסקה ספיקה. קרי, לכל קשת השייכת לזיווג המושלם נבצע:

אם , כלומר הליטרל מופיע ללא סימן השלילה, אזי נגדיר *, אחרת , כלומר נגדיר . בצורה כזאת, מכיוון שבתוך כל פסוקית הליטרלים מחוברים עם האופרטור "או" () אזי כל פסוקית תסופק ע"י משתנה אחד, ומכיוון שיש התאמה חד-חד-ערכית, נסיק כי ניתן לספק את כל n הפסוקיות בעזרת n המשתנים ולכן כל הפסוק עצמו ספיק, וזוהי ההשמה המספקת אותו.*

כעת, לאחר שהוכחנו כי ניתן לספק באמצעות הכלים שמבטיח לנו משפט HALL, נראה כלים קונקרטיים לבניית אלגוריתם שיספק לנו נוסחה – נבצע את המציאה של השידוך המושלם באמצעות רשת זרימה:

לשם כך נעזר בפרק 7.5 בספר, שעוזר למצוא יישום לבעיית הזיווג, ובאופן יותר ספציפי נעזר במשפט 7.37 מהספר- הטוען כי בהינתן גרף דו צדדי, כמו שלנו, אם נגדיר גרף אחר G', ניתן לפתור את בעיית השידוך המקסימלי באמצעות בעיית זרימה – הגרף יהיה אותו גרף עם תוספת של קודקוד מקור וקודקוד בור, והקשתות החדשות תחברנה בין כל איבר בצד אחד של הגרף לקודקוד המקור, ובען כל הצד השני לקודקוד הבור.

במקרה שלנו נגדיר את הגרף הבא:

כלומר, שוב *כל הליטרלים תורגמו לקודקודים בגרף, כמו גם כל הפסוקיות היוצרות את הנוסחה, וביניהם יש קשתות בין כל ליטרל לפסוקית בו הוא מופיע (וכמובן נובע מכך שבין כל פסוקית ל3 הליטרלים שהיא מכילה), כמו כן יש קשתות בין קודקוד המקור לכל הליטרלים, ובין כל פסוקית וקודקוד בור.*

*כעת, נוכל להשתמש במשפט 7.37 ולבנות את האלגוריתם המתאים:*

1. *הגדר גרף G' כמתואר לעיל.*
2. *מצא בו זרימה מקסימלית (באמצעות פורד-פולקרסון או אדמונד-קארפס לצורך היעילות)*
3. *מכיוון שמזרימה המקסימלית ניתן להגיע לשידוך מושלם, לפי משפט 7.37, נבצע את השמת הליטרלים כמו מקודם עבור השידוך מושלם שנמצא מהאלגוריתם בפרק 7.5 [*אם , כלומר ליטרל מופיע ללא סימן השלילה בפסוקית המתאימה , אזי נגדיר *, אחרת , כלומר נגדיר .] וסיימנו.*

***הוכחת נכונות:***

*הראנו קודם כי בהינתן שידוך מושלם השמת המשתנים הזו אכן מספקת את הנוסחה, לפי משפט 7.37 שלבים 1 ו2 אכן מוצאים שידוך מושלם, ולכן כל האלגוריתם אכן מוצא השמת משתנים מתאימה לסיפוק הנוסחה, כנדרש.*

*סיבוכיות:*

*לפי משפט 7.38, ניתן למצוא זיווג מקסימלי -במקרה שלנו מושלם – ע"י שימוש בפורד-פולקרסון בזמן , כאשר n,m הם גדלי כל צד בגרף הדו צדדי, במקרה שלנו n=m ולכן זה נעשה ב.*

*הגדרת הגרף נעשית ב:*

*הסבר:*

*ישנם ליטרלים ופסוקיות, וקודקודי מקור ובור. כמו כן מעבר ל3n קשות שישנן בין 2 צידי הגרף אנו יוצרים גם 2n קשתות נוספות, בין המקור לכל ליטרל, ובין הבור לכל פסוקית.*

*השמת הליטרלים, נעשית אחר בדיקה לכל שידוך האם הליטרל התאים לפסוקית נמצא בה כ או כ*, כלומר מעבר סידרתי על n פסוקיות והשמת ערך ליטרל עבור כל פסוקית.

כלומר *.*

*סה"כ: סיבוכיות של .*