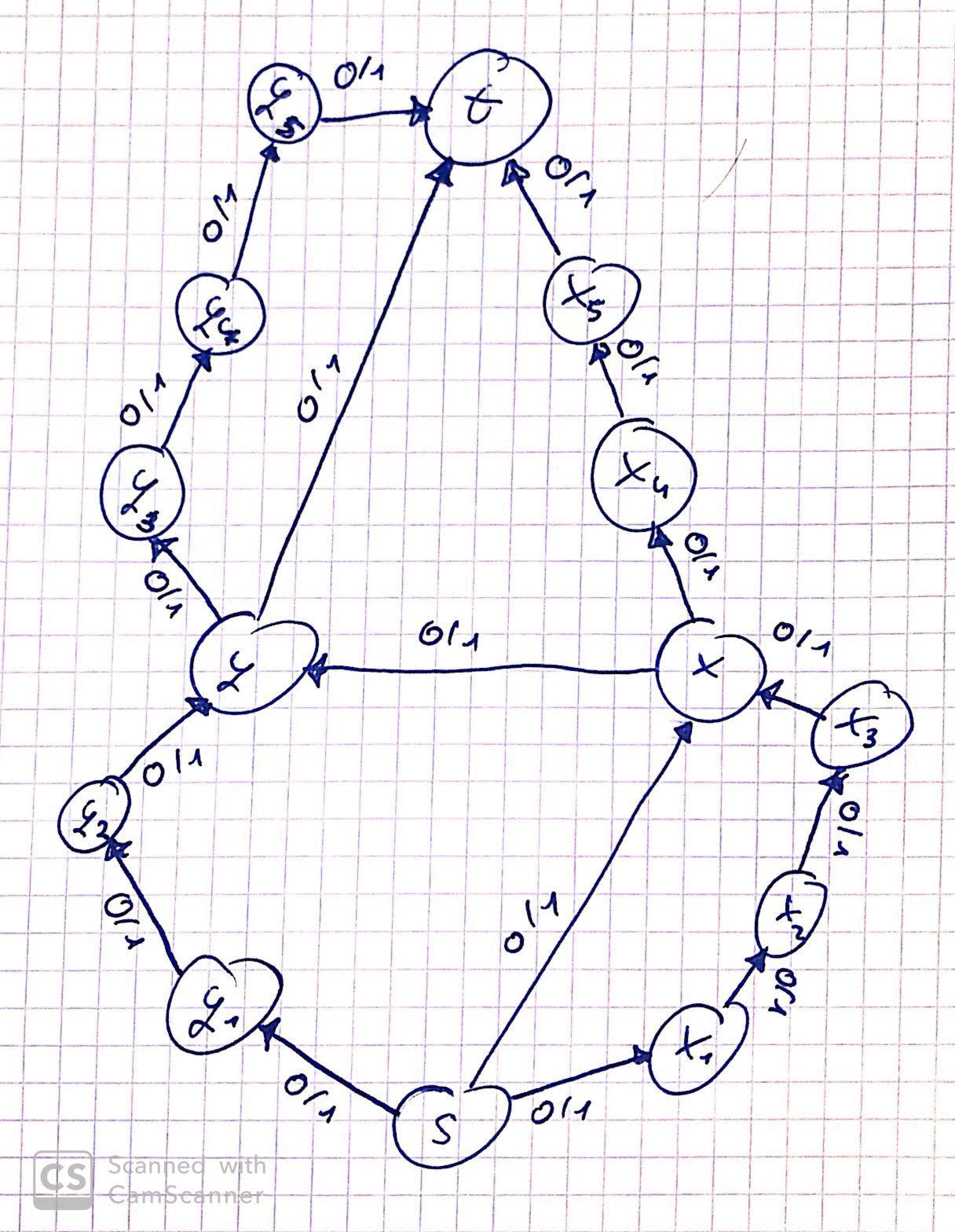
**ממ"ן 15: אלגוריתמים**

**מגיש:** יוחאי מזוז

**ת"ז:** 324962125

1. 

**הסבר:**

*, באיטרציה הראשונה והשלישית תוספת הזרימה דרכה תהיה שווה לקיבולת השיורית שלה שתהיה שווה ל1.*

מסלול השיפור יהיה , ואז ואז .

1. א. נניח כי ברצוננו להגדיל את הזרימה ב((.

וכי נתונה פונקציית זרימה חוקית לפי תנאי השאלה.

נגדיר פונקציית זרימה חדשה:

נראה כי זו זרימה חוקית ומתקיים .

**חוקיות:**

אילוצי קיבול:

משמע מקיימת את אילוץ הקיבול הנתון בשאלה.

*אנטי סימטריה:*

*כנדרש, ומכאן ש מקיימת את אילוץ אנטי סימטריה.*

*שימור הזרימה:*

*טריוויאלי ש:*

(\*)הבהרה: הצעד נכון כי זה קבוע ביחס ל.

מכאן ש מקיימת את אילוץ שימור הזרימה, ולסיכום זו פונקציית זרימה חוקית.

כעת נראה כי :

*מכאן שניתן להגדיל זרימה חוקית ברשת כרצוננו, ולכן ניתן למצוא פונקציית זרימה חוקית ברשת גדולה כרצוננו.*

*עם זאת זו לא פונקציית זרימה בשלמים, אך זו פונקציית זרימה תקינה.*

*ב.* ***רעיון האלגוריתם:***

*ראשית נגדיר כנדרש מאילוץ הקיבול.*

*כעת נותר ל"דאוג" לכך שמתקיים שימור זרימה,(את הצלעות בכיוון השני נגדיר לפי תנאי אנטי סימטריה, מובטח לנו שלכל היותר צלע אחת מוגדרת בכל כיוון מ ל עבור ).*

*נתקן את לשימור זרימה כך:*

*אם סכום הזרימה הנכנסת ל קטנה מסכום הזרימה היוצאת מ, נעלה את סכום הזרימה הנכנסת כך שתשתווה לסכום הזרימה היוצאת(כי יש זרימה מינימלית ולא נרצה להקטין זרימה), משום שאנו משנים את הזרימה הנכנסת ל, נרצה לתקן שימור זרימה עבור הצמתים מהם מגיעים ל, ולכן את הבדיקה של המקרה הזה נעשה בריצה על הקשתות בסדר "הפוך", כלומר בריצה מ לs.*

*באותה צורה אם סכום הזרימה הנכנסת ל גדולה מסכום הזרימה היוצאת מ, נעלה את סכום הזרימה היוצאת כך שתשתווה לסכום הזרימה הנכנסת(כי יש זרימה מינימלית ולא נרצה להקטין זרימה), משום שאנו משנים את הזרימה היוצאת מ, נרצה לתקן שימור זרימה עבור הצמתים אליהם מגיעים מ, ולכן את הבדיקה של המקרה הזה נעשה בריצה על הקשתות מs לt.*

*נוכל לרוץ על הקשתות בעזרת BFS(עבור הריצה ההפוכה ניצור גרף מקביל לG בו הקשתות הפוכות ואותו נסרוק ונבצע את הפעולות על הקשתות המתאימות לסריקה בG).*

***האלגוריתם:***

1. *עבור על :*
2. *עבור כל :*
3. *ניצור גרף , (נשמור גם לכל קשת ב את הקשת המתאימה לה ב)*
4. *נבצע סריקת BFS עבור , כאשר הסריקה תסרוק את ,*

*אם ,*

*, כאשר זה כמות הצמתים מהם ניתן להגיע ל.*

1. *נבצע סריקת BFS עבור , כאשר הסריקה תסרוק את ,*

*אם ,*

*, כאשר זה כמות הצמתים מהם ניתן להגיע מ.*

1. *נחזיר את .*

*נשים לב ש מוגדר לפני ההשמות ולכן הוא קבוע ביחס אליהן(לא משתנה בין השמה להשמה).*

***נכונות האלגוריתם:***

*מקיימת את אילוץ הקיבול משום לפי צעד ( ובשל כך שבמהלך האלגוריתם רק מעלים את הקיבולות.*

*F מקיימת את אילוץ האנטי סימטריה לפי צעד f) ובשל כך שלפי השאלה שבין שני צמתים רק קשת אחת לכל היותר שייכת ל.*

*אילוץ שימור הזרימה הוא "המעניין" ביותר באלגוריתם.*

*נוכיח ט"ע 1 שלאחר הצעדd ), מתקיים לכל אם לפני הצעד d) , אז אחריו .*

*נניח ש:.*

*כאשר הסריקה הגיעה לצומת :*

*נקרא לערכי שלאחר ההשמה ונניח כי עוד לא בוצעה ההשמה ולכן יתקיים*

*מכאן שלאחר שהסריקה סורקת את מתקיים, .*

*נשים לב שעל מנת שתשתנה קשת , הסריקה צריכה לעבור על הצומת כשזה קורה(לפי אופן שינוי הקשתות).*

*עבור הקשתות הנכנסות ל, הסריקה תשנה רק כאשר עוברים על מהסיבה שציינתי.*

*עבור קשת היוצאת מ, הצומת אליו היא יוצאת קרוב יותר ל ולכן הסריקה תעבור עליו קודם, ומכאן שלאחר שהסריקה תעבור על , היא לא תעבור עבור קשתות הנכנסת או יוצאת אליו.*

*מכאן שלאחר שהסריקה תעבור על , לא ישתנו עד(כולל) סוף הצעד, , ולכן לאחר סוף הצעד יתקיים ולכן ט"ע 1 מתקיימת.*

*באותה צורה(עם התאמות קלות), מתקיים שלאחר הסריקה בשלב ( מתקיים לכל אם לפני הצעד ,אז אחריו .*

*ומכאן שלאחר שתי הסריקות יתקיים לכל , . ומכאן שמתקיימת שימור זרימה וסיימנו, מצאנו זרימה חוקית בגרף G לפי תנאי השאלה.*

***זמן ריצת האלגוריתם:***

*אתחול :*

*השמת ערכים ב וערכים התחלתיים ב:*

*2 סריקות BFS:*

*יצירת :*

*החלת אנטי סימטריה:*

*סך הכל זמן ריצת האלגוריתם הוא*

*ג.* ***רעיון האלגוריתם:***

*נמצא פונקציית זרימה חוקית לפי תנאי השאלה לפי הסעיף הקודם.*

*נתבונן בפער , בעצם זה מייצג לנו כמה ניתן לחסר לכל היותר מהזרימה שמצאנו ועדיין לקיים את אילוץ הקיבול, נרצה לחסר כמה שיותר באופן חוקי על מנת למצוא פונקציית זרימה חוקית מזערית.*

*על מנת למצוא כמה ניתן לכל היותר לחסר, נחפש פונקציית זרימה מקסימלית בגרף שמצאנו כאשר אלו המשקולות, ושימור זרימה מוגדר כרגיל(כלומר לא לפי תנאי השאלה), זו בעצם הזרימה המרבית שנוכל לחסר, ולכן אם נחסר אותה מהזרימה נקבל פונקציית זרימה חוקית לפי תנאי השאלה מזערית.*

***האלגוריתם:***

1. *נמצא פונקציית זרימה חוקית לפי תנאי השאלה, לפי סעיף ב'.*
2. *נמצא פונקציית זרימה מרבית חוקית(אילוץ קיבול מוגדר כרגיל, לא לפי תנאי השאלה), הקיבולות מוגדרות כך ש.*
3. *נחזיר את*

***נכונות:***

*נוכיח כי הפונקציה שהחזרנו חוקית לפי תנאי השאלה:*

*אילוץ קיבול:*

*מתקיים כנדרש.*

*אנטי סימטריה:*

*מתקיים כנדרש.*

*שימור זרימה:*

*כנדרש.*

*וכעת נוכיח שזו פונקציית זרימה מזערית:*

*נניח בשלילה כי קיימת פונקצייה זרימה חוקית לפי תנאי השאלה כך, ש*

*נתבונן ב*

*זו פונקציית זרימה חוקית (מוגדר כרגיל לא לפי תנאי השאלה) עבור הגרף G כאשר המשקולות הן ,*

*אילוץ קיבול:*

*אנטי סימטריה:*

*שימור זרימה:*

*אך כעת מתקיים:*

*קיבלנו ש זו לא פונקצית זרימה חוקית מקסימלית כפי שהוגדרה ולכן הגענו לסתירה, מכאן ש זו פונקציית זרימה חוקית(לפי תנאי השאלה) מזערית וסיימנו.*

***זמן ריצה:***

*מציאת :*

*מציאת על ידי אלגוריתם אדמונדס-קרפ(כולל יצירת הגרף מחדש עם המשקולות "החדשות":*

*חישוב :*

*סך הכול, זמן הריצה של האלגוריתם הוא: .*

1. א. **האלגוריתם:**

נשים לב שמתקיימות אחת משתי האפשרויות:

לאחר הגדלת הקיבולת של , יש מסלול שיפור או לא, נשים לב גם שמשום שלא היו מסלולי שיפור לפני(כי זו זרימה מרבית), אז לאחר ש"נתקן" את המסלול הזה, כבר לא יהיו עוד מסלולי שיפור ואז הזרימה החדשה שנקבל זו זרימה חוקית מרבית(משום שאין מסלולי שיפור בה)(\*).

על מנת לתקן את מסלול השיפור, נפעיל פשוט את אלגוריתם אדמונדס-קרפ.

משום שיש לכל היותר מסלול שיפור אחד, אז האלגוריתם ירוץ לכל היותר איטרציה אחת.

זמן הריצה של איטרציה אחת הוא כשל סריקת BFS, כלומר

*נכונות האלגוריתם מתוארת לעיל(\*), זמן הריצה הוא לינארי*

*וסיימנו.*

*ב.* ***רעיון האלגוריתם:***

*נבדוק אם הקטנת הקיבולת גרמה לכך שיתקיים , אם כן נמצא מסלול מs לt ונקטין את הזרימה שם ב1, אחרת הכל תקין ולא נשנה כלום.*

***האלגוריתם:***

*נניח כי כבר הוקטנה הקיבולת ב.*

1. *אם :*
   1. *נמצא מסלול מ ל בעזרת סריקת BFS.*
   2. *נמצא מסלול מ ל בעזרת סריקת BFS(כך ש הצומת ההתחלתי בה).*
   3. *נחבר את שני המסלולים*
   4. *לכל*
   5. *נריץ אדמונדס-קרפ על*
2. *נחזיר את*

* *אם יש צורך בליצור זרימה חדשה אפשר כמובן ליצור זרימה חדשה, לאתחל אותה ל ולחסר בה בהתאם לאלגוריתם במקום ב, להריץ עליה אדמונדס-קרפ ולהחזיר אותה, די טריוויאלי.*

***נכונות:***

*אם לאחר ההקטנה , אזי זרימה מרבית חוקית(אילוץ הקיבול מתקיים לפי התנאי ושאר התכונות טריוויאלי), משום שלא יתכן שנקבל זרימה חדשה חוקית שגודלה גדול מ, משום שאז היא הייתה זרימה חוקית גם לפני ההקטנה(כי רק הקטנו קיבולת).*

*אחרת, אילוץ קיבול מתקיים עבור כל הקשתות פרט ל באופן טריוויאלי, ועבורה מתקיים משום שהקטנו אותה ב1 במהלך האלגוריתם כרצוי.*

*אנטי סימטריה מתקיימת באופן טריוויאלי(מוגדרת בכיוון ההפוך באופן עוקב ל).*

*שימור זרימה מתקיים עבור כל קודקוד שלא ב משום שלא שונתה הזרימה בקשתות היוצאות ממנו או נכנסות אליו.*

*עבור , מחסירים 1 גם מ וגם מ ולכן מתקיים שימור זרימה.*

*זו זרימה חוקית.*

*ולכן נפעיל את אלגוריתם אדמונדס קרפ על זרימה חוקית ונחזיר זרימה חוקית מרבית כנדרש.*

***זמן ריצה:***

*נשים לב לך שאלגוריתם אדמונדס-קרפ ישפר לכל היותר מסלול שיפור אחד, משום שלאחר החיסור במסלול , גודל הזרימה קטן ב-1, אם נשפר 2 מסלולי שיפור, אז גודל הזרימה יגדול ב-2 לפחות, ולכן סך הכל הזרימה תהיה גדולה ב1-1 לפחות מגודל הזרימה ההתחלתית(הנתונה בשאלה), בסתירה לכך שזו זרימה מרבית(משום שהזרימה שהחזרנו היא גם זרימה חוקי לפי הקטנת הקיבולת).*

*ולכן אלגוריתם אדמונדס-קרפ ירוץ איטרציה אחת לכל היותר ולכן זמן הריצה שלו יהיה כשל סריקת BFS.*

*זמן הריצה סך הכל יהיה:*

*לכל היותר:*

*2 ריצות BFS למציאת המסלול R:*

*תיקון המסלול R:*

*ריצת אדמונדס-קרפ:*

*ולכן סך הכל זמן הריצה יהיה וסיימנו .*

* *( ולא כי ייתכן כי זמן הריצה יהיה קבוע אם לאחר ההקטנה.)*

1. נשים לב לכך שסך הכל ישנם מופעים של משתנים(משום שיש n משתנים, וכל אחד מופיע ב3 פסוקיות).

סך המופעים שווה גם לכמות הפסוקיות כפול 3(כי יש בכל פסוקיות 3 מופעים של משתנים).

ולכן יש פסוקיות.

*נגדיר:*

נגדיר גרף לא מכוון דו צדדי

כך ש: , במילים אחרות, נוסיף לגרף כל קשת בין פסוק לפסוקית שהוא מופיע בה.

כעת נוכיח שיש זיווג מושלם לגרף G על ידיד כך שנוכיח שלא מתקיימת האפשרויות השנייה במשפט הול(משפט 7.40 בספר):

נניח בשלילה קיימת כך ש(בהרצאות השתמשנו ב), זה עניין של מינוח והעדפתי ללכת לפי הספר).

*נגדיר:*

*במילים אחרות מחזירה כמה מהמשתנים בפסוקית בA.*

*כעת נשים לב לכך:*

* *הבהרה, בשוויון הראשון באגף הימני יש חלקי 3 כי כל משתנה מופיע בדיוק 3 פעמים, ולכן מספר המשתנים שווה למספר המופעים חלקי 3.*

*בסתירה להנחה, ולכן בהכרח מתקיימת האפשרות הראשונה של משפט הול ויש שידוך מושלם לגרף G.*

*וכעת יש לנו שידוך מושלם בין המשתנים לפסוקיות, לפי השידוך הזה נציב לכל משתנה ערך כך שיספק את הפסוקית שהוא שייך אליה(שידוך מושלם קובע כי כל משתנה ישודך לפסוקית אחת בדיוק שהוא נמצא בה ולכן ניתן להציב לו ערך שיספק אותה, ולכן לכל פסוקית יהיה משתנה(זה שמשודך אליה) שבוודאות יספק אותה), ולכן ההצבה שתיארנו לעיל מספקת את הנוסחה הנתונה(\*), ומכאן שזו נוסחה ספיקה.*

*האלגוריתם למציאת השמה מספקת, או פשוט על ידי מציאת אותם שידוכים בין המשתנים לפסוקיות(והצבת ערך מתאים לכל משתנה כך שיספק את הפסוקית(מן הסתם תלוי אם המשתנה מופיע בפסוקית בקשר שלילה)).*

*האלגוריתם למציאת השמה מספקת:*

*ליצור גרף G כמתואר לעיל, לפי משפט 7.38 בספר ניתן למצוא זיווג מקסימלי בG על ידי שימוש באלגוריתם פורד-פולקרסון בזמן ריצה , בפרט השידוך יהיה מושלם כי הוכחנו שקיים שידוך מושלם.*

*נבצע השמה בכל משתנה לפי השידוך כמתואר לעיל וזו השמה מספקת.*

*הנכונות מבוססת על (\*) ועל הכתוב לעיל.*

*סיבוכיות זמן ריצה:*

*יצירת הגרף: – יצירת צמתים ובדיקת כל פסוקית והוספת קשת עבור כל צומת שנמצא בה.*

*מציאת זיווג מקסימלי(במקרה הזה הוכח כמושלם): לפי משפט 7.38.*

*הצבת ערכים: מעבר על כל הזוגות בשידוכים והצבת ערך מתאים במשתנה.*

*סך הכול זמן הריצה של האלגוריתם הוא .*