

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
'ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ'



Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
& Μηχανικών Υπολογιστών

Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης &  
Νανοτεχνολογίας  
Εργαστήριο Στατιστικής  
Μηχανικής & Πολύπλοκων  
Δυναμικών Συστημάτων

---

## Χιμαιρικές Καταστάσεις σε Leaky Integrate-and-Fire Νευρώνες: Η Επίδραση του Συντελεστή Απωλειών

---

Χαρδούβελης  
Γεώργιος-Ορέστης

## Περίληψη

Η παρούσα αναφορά πρακτικής έχει ως ύφος την προσομοίωση δικτύων νευρώνων. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η συμπεριφορά ενός δικτύου νευρώνων από το μοντέλο ολοκλήρωσης-πυροδότησης με απώλειες Leaky Integrate-and-Fire, τοποθετημένων επί δακτυλίου με μη-τοπική συνδεσμολογία. Μεταβάλλοντας τον συντελεστή απωλειών  $\lambda'$ , καθώς και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος, εξετάστηκε η δημιουργία και η εξέλιξη των χιμαρικών καταστάσεων. Η προσομοίωση του μοντέλου υλοποιήθηκε σε γλώσσα "C++" και επιλύθηκε υπολογιστικά με ολοκλήρωση Euler. Αποδείχθηκε πως ο συντελεστής απωλειών  $\lambda'$  επηρεάζει σημαντικά τον συγχρονισμό των νευρώνων, και μάλιστα σε διαφορετικό βαθμό ανάλογα με τον συντελεστή σύζευξης 'σ' και άλλες παραμέτρους.

## **Ευχαριστίες**

Η συγκεκριμένη πρακτική άσκηση υλοποιήθηκε στο Εργαστήριο Στατιστικής Μηχανικής & Πολύπλοκων Δυναμικών Συστημάτων του Ινστιτούτου Νανοεπιστήμης & Νανοτεχνολογίας του ΕΚΕΦΕ ‘Δημόκριτος’ στα πλαίσια του προγράμματος πρακτικής άσκησης της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, την περίοδο Σεπτέμβρη - Οκτώβρη 2019.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Δρ. Αστέρω Προβατά που με μύησε στο θέμα και με καθοδήγησε καθ'όλη την πορεία της πρακτικής. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και την υπόλοιπη ομάδα, την υποψήφια διδάκτορα Νεφέλη-Δήμητρα Τσίγκρη, τον Κουλιεράκη Ιωάννη, καθώς και τους συναδέλφους μου Φερίκογλου Άγγελο, Διολέτη Τίλια και Παναγιωταρά Ηλία για την στήριξη τους την δημιουργία μιας ευχάριστης ατμόσφαιρας κατά την διάρκεια του διμήνου.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών κ. Ιωάννη Γκόνο, ο οποίος ήταν ακαδημαϊκός υπεύθυνος του προγράμματος πρακτικής άσκησης της σχολής.

Τέλος, σημαντική ήταν η συνεισφορά του Εθνικού Δικτύου Έρευνας και Τεχνολογίας για τη χρήση του υπερυπολογιστή HPC ARIS (έργο pr007011) με τον οποίο έγινε δυνατή η υλοποίηση των υπολογιστικά δύσκολων προσομοιώσεων που έδωσαν τα αποτελέσματα της εργασίας.

# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>6</b>
1.1 Λειτουργία Νευρώνων . . . . .	6
1.2 Μοντελοποίηση Δικτύου Νευρώνων με το Leaky Intergate-and-Fire (LIF) μοντέλο . . . . .	8
1.3 Συγχρονισμός και Χιμαϊρικές Καταστάσεις . . . . .	10
<b>2 Αλγόριθμος Προσομοίωσης</b>	<b>12</b>
<b>3 Αποτελέσματα</b>	<b>15</b>
3.1 Επίδραση του συντελεστή απωλειών λ για διαφορετικούς συντελεστές σύζευξης σ . . . . .	15
3.1.1 Συντελεστής σύζευξης $\sigma=0.4$ . . . . .	15
3.1.2 Συντελεστής σύζευξης $\sigma=0.7$ . . . . .	17
3.1.3 Συντελεστής σύζευξης $\sigma=1.6$ . . . . .	19
3.2 Επίδραση του συντελεστή σύζευξης σ με συντελεστή απωλειών λ μηδέν . . . . .	21
3.3 Μελέτη μετάβασης χιμαϊρικών καταστάσεων για συντελεστή σύζευξης $\sigma=1.6$ και συντελεστή απωλειών $\lambda=1.2$ . . . . .	23
3.3.1 Μεταβολή του αριθμού νευρώνων στο δίκτυο N . . . . .	24
3.3.2 Μεταβολή του αριθμού των γειτόνων R . . . . .	26
3.3.3 Μεταβολή των N και R με σταθερή αναλογία . . . . .	28
3.4 Μελέτη μετάβασης χιμαϊρικών καταστάσεων για διαφορετικά R .	31
<b>4 Συμπεράσματα και Ανοιχτά Προβλήματα</b>	<b>34</b>
<b>5 Βιβλιογραφία</b>	<b>36</b>
<b>6 Παράρτημα: Κώδικας Προσομοίωσης</b>	<b>38</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

1	Δομή Νευρώνα [1] . . . . .	7
2	Μη-τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου με $R=3$ . Ο κάθε κόμβος συνδέεται με $R=3$ γείτονες στα δεξιά του και στα αριστερά του.	9
3	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\lambda$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\sigma = 0.4$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	16
4	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\lambda$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\sigma = 0.7$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	18
5	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\lambda \leq 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\sigma = 1.6$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	20
6	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\lambda > 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\sigma = 1.6$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	21
7	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\sigma$ ( $\alpha$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\lambda = 0$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	22
8	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $\sigma$ ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\lambda = 0$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .	23
9	LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $N$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $R = 270$ , $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 1.2$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . .	25

- |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 10 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R < 270$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 1.2$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .                                 | 27 |
| 11 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R > 270$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $N = 1000$ , $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 1.2$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .                                 | 28 |
| 12 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R$ και του $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 ( $\alpha$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 1.2$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . . | 29 |
| 13 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R$ και του $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 1.2$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .  | 30 |
| 14 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\sigma = 0.7$ , $\lambda = 0.6$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .                                                    | 32 |
| 15 | LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του $R$ και του $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι $\sigma = 1.6$ , $\lambda = 0.6$ , $\mu = 1$ , $u_{th} = 0.98$ . . . . .  | 33 |

# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Λειτουργία Νευρώνων

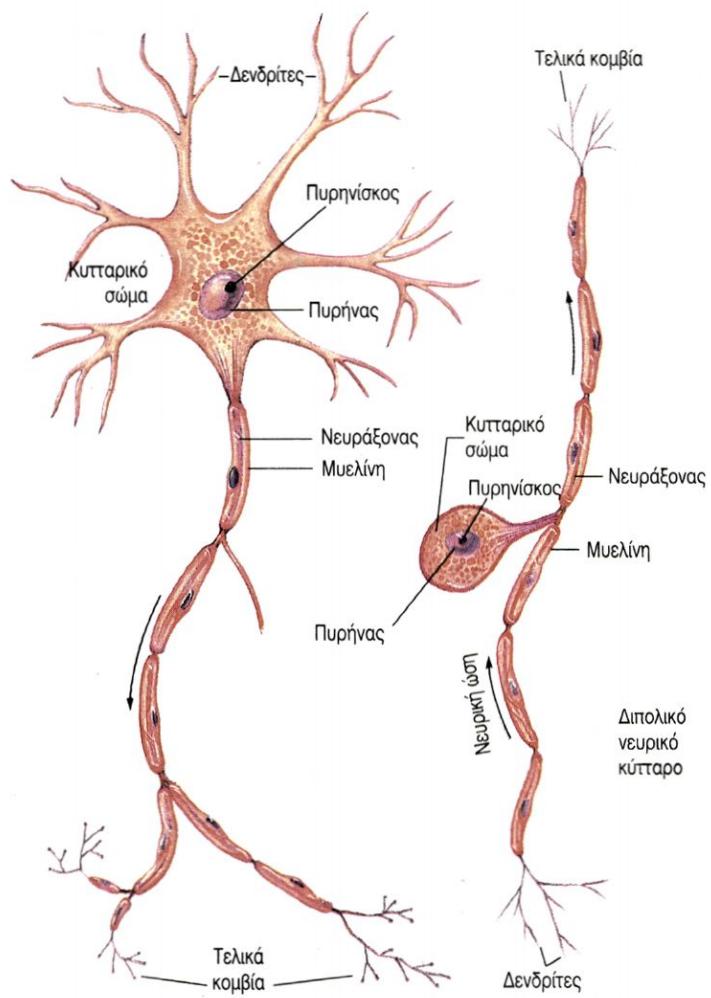
Οι εγκεφαλικές λειτουργίες υλοποιούνται στο σύνολο τους από το δίκτυο των νευρώνων. Οι νευρώνες, που αποτελούν τη δομική και λειτουργική μονάδα του νευρικού συστήματος, έχουν την ιδιότητα να αντιδρούν σε συγκεκριμένες μεταβολές του περιβάλλοντος [1].

Όπως φαίνεται και στο **σχήμα 1**, κάθε νευρώνας αποτελείται από το χυταρικό σώμα (που περιέχει τον πυρήνα και τα οργανίδια του χυτάρου) και τις νευρικές αποφυάδες που διακρίνονται στους δενδρίτες και τον νευροάξονα.

Η λειτουργία των νευρώνων έγκειται στη διαφορά δυναμικού μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού της χυταρικής μεμβράνης κάθε νευρώνα. Αυτό ρυθμίζεται μέσω της αντλίας  $Na^+$ ,  $K^+$  και των διόδων  $Na^+$ ,  $K^+$  και  $Cl^-$ . Σε δυναμικό ηρεμίας παρατηρείται υψηλή συγκέντρωση κατιόντων νατρίου και κατιόντων χλωρίου στο εξωτερικό της μεμβράνης, και κατιόντων καλίου στο εσωτερικό. Η αντλία  $Na^+$ ,  $K^+$  για κάθε τρία  $Na^+$  που απομακρύνει από το εσωτερικό του χυτάρου μεταφέρει στο εσωτερικό δύο  $K^+$ . Ταυτόχρονα τα θετικά ιόντα νατρίου, παρεμποδίζόμενα από την μεβράνη, διαχέονται ελάχιστα. Έτσι, δημιουργείται δυναμικό περίπου -70 mV το οποίο η μεμβράνη διατηρεί όσο δεν δέχεται κάποιο ερεύνισμα, γι' αυτό και ονομάζεται δυναμικό ηρεμίας [2].

Σαν αντίδραση σε ορισμένες μεταβολές του περιβάλλοντος (ερευνήσματα) που προκαλούν ένταση μεγαλύτερη μιας οριακής τιμής, αυξάνεται η διαπερατότητα της μεμβράνης σε ιόντα νατρίου (ανοίγει η αντίστοιχη είσοδος), επιτρέποντας τους να εισέλθουν στο εσωτερικό του χυτάρου, φορτίζοντας το θετικά και φτάνοντας σε τιμή +50 mV (εκπόλωση). Τέτοια ερευνήσματα ονομάζονται νευρικές ώσεις. Τότε, αρχίζει να εμποδίζεται η είσοδος κατιόντων νατρίου, λόγω του δυναμικού, ενώ κλείνει και η αντίστοιχη δίοδος, και ταυτόχρονα ανοιγει και η δίοδος κατιόντων καλίου, επιτρέποντας τους να εξέλθουν από το χύταρο. Ως αποτέλεσμα πλησιάζουμε στις αρχικές τιμές ισορροπίας (επαναπόλωση). Στη συνέχεια το δυναμικό πέφτει κάτω από εκείνο της ισορροπίας στα -70mV και τέλος σταθεροποιείται ξανά στο δυναμικό ισορροπίας (υπερπόλωση) [1][2][3].

Η σύνδεση των νευρώνων γίνεται μέσω των συνάψεων, δηλαδή των περιοχών λειτουργικής σύνδεσης των τελικών κομβίων του νευράξονα ενός νευρώνα με άλλα νευρικά κύτταρα ή όργανα. Η μεταφορά της νευρικής ώσης μέσω των συνάψεων πραγματοποιείται συνήθως με τη βοήθεια χημικών ενώσεων που παράγει το νευρικό κύτταρο, των νευροδιαβιβαστών, οι οποίες εκχρίνονται από τα τελικά κομβία των νευραξόνων [1].



Σχήμα 1: Δομή Νευρώνα [1]

Οι νευροδιαβίβαστές επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την λειτουργία των νευρώνων σε συνάρτηση με τον τύπο της σύναψης που παφατηρείται. Μπορούν να εμφανίσουν είτε διεγερτική ("excitatory") είτε ανασταλτική ("inhibitory") συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, έχουμε συνάψεις τύπου *I* και τύπου *II* και ανάλογα με τον τύπο της σύναψης παφατηρείται η αντίστοιχη συμπεριφορά. Οι συνάψεις τύπου *I* είναι διεγερτικές και οι τύπου *II* ανασταλτικές. Ο νευροδιαβίβαστής επηρεάζει την διαμεμβρανική ροή ιόντων είτε για να αυξήσουν (διεγερτική συμπεριφορά) είτε για να μειώσουν (ανασταλτική συμπεριφορά) την πιθανότητα με την οποία το κύτταρο με το οποίο έρχεται σε επαφή θα προκαλέσει δυναμικό δράσης [4].

## 1.2 Μοντελοποίηση Δικτύου Νευρώνων με το Leaky Integrate-and-Fire (LIF) μοντέλο

Για την μελέτη που έγινε στην παρούσα πρακτική άσκηση έγιναν αριθμητικές προσομοιώσεις σε υπολογιστή. Μεταξύ των διαφόρων μοντέλων για την μελέτη δικτύων νευρώνων, επιλέχθηκε το μοντέλο Leaky Integrate-and-Fire (LIF) (Μοντέλο Ολοκλήρωσης και Πυροδότησης). Το μοντέλο αυτό περιγράφει τη χρονική μεταβολή του δυναμικού της μεμβράνης ενός νευρώνα. Για έναν μεμονωμένο νευρώνα, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το δυναμικό έχει ως εξής:

$$\frac{du(t)}{dt} = \mu - \lambda u(t) \quad (1)$$

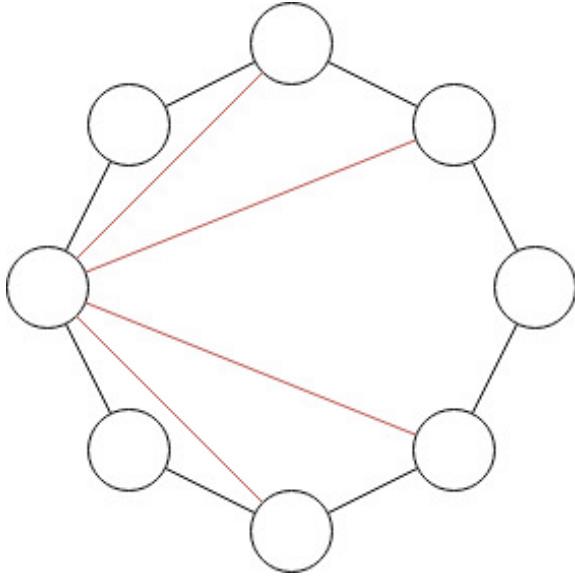
με οριακή συνθήκη:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(t + \varepsilon) = 0, u \geq u_{th} \quad (2)$$

[5][6][7].

Η συνάρτηση  $u(t)$  αντιστοιχεί στο δυναμικό μεμβράνης ενός νευρώνα και η σταθερά μέρος της πρώτης εξίσωσης είναι ο 'όρος απωλειών' ("leaky term"), που εμποδίζει το δυναμικό να φτάσει σε ακραίες τιμές. Ο συντελεστής  $\lambda$  είναι ο συντελεστής απωλειών, την επίδραση του οποίου θα μελετήσουμε στο μοντέλο. Σε προηγούμενες μελέτες που χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο είχε θεωρηθεί πως  $\lambda = 1$ . Η οριακή κατάσταση που περιγράφεται, όπως έχει παρατηρηθεί πειραματικά, υποδηλώνει πως αφ' ότου το δυναμικό ξεπεράσει κάποιο άνω όριο, επιστρέφει άμεσα στην κατάσταση ηρεμίας (επαναπόλωση) [5][6][7].

Κάθε φορά που λαμβάνει χώρα επαναπόλωση, θεωρούμε πως ο νευρώνας έχει εκτελέση μία πλήρη ταλάντωση. Έτσι, ορίζεται η μέση συχνότητα (mean



Σχήμα 2: Μη-τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου με  $R=3$ . Ο κάθε κόμβος συνδέεται με  $R=3$  γείτονες στα δεξιά του και στα αριστερά του.

phase velocity) για κάθε νευρώνα  $i$  που υπολογίζεται ως εξής:

$$\omega_{ij} = \frac{2\pi n_i}{T} \quad (3)$$

όπου  $n_i$  ορίζεται ως ο αριθμός των ταλαντώσεων του συγκεκριμένου νευρώνα, και  $T$  ο συνολικός χρόνος στον οποίο έχουν πραγματοποιηθεί οι ταλαντώσεις [5][6][7].

Συχνά, στο μοντέλο LIF συμπεριλαμβάνεται και η Περίοδος Εφησυχασμού (Refractory Period), δηλαδή ένα χρονικό διάστημα αμέσως μετά την επαναπόλωση του νευρώνα κατά την οποία μένει ανενεργός στην κατάσταση  $u(t) = 0$  [6]. Στις προσομοιώσεις της συγκεκριμένης εργασίας όμως δεν συμπεριλήφθηκε.

Για το δίκτυο νευρώνων οφείλουμε να λάβουμε υπ' όψιν πως το δυναμικό κάθε νευρώνα επηρεάζεται και από τους γειτονικούς νευρώνες. Η τοπολογία του δισδιάστασου δικτύου που μελετήθηκε ήταν μη-τοπική συνδεσιμότητα δακτυλίου [3]. Συγκεκριμένα, θεωρώντας πως οι νευρώνες είναι διατεταγμένοι σε έναν κυκλικό δακτύλιο, κάθε νευρώνας είναι συνδεδεμένος με  $R$  νευρώνες δεξιά του και  $R$  αριστερά του, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2**.

Για την μελέτη του δικτύου νευρώνων επιλέχθηκε να συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανίζουν ανασταλτική συμπεριφορά, μιας και σε παλαιότερες έρευνες του εργαστηρίου παρατηρήθηκαν ενδιαφέροντα αποτελέσματα που απορρέουν από τον συγκεκριμένο τύπο ανασταλτικής συνδεσιμότητας [5][7]. Έτσι, οι γειτονικοί νευρώνες επιδρούν αρνητικά στη μεταβολή του δυναμικού του εκάστοτε νευρώνα υπό μελέτη και το μοντέλο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \mu - \lambda u_i(t) - \frac{1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} \sigma_{ij} [u_j(t) - u_i(t)] \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_i(t + \varepsilon) = 0, u_i \geq u_{th} \quad (5)$$

όπου  $\sigma$  είναι η σταθερά σύνδεσης (coupling strength) του νευρώνα  $i$  με τον νευρώνα  $j$ , που εκφράζει την δύναμη της σύνδεσης τους. Θεωρήσαμε πως το  $\sigma_{ij} = \sigma$  είναι κοινό για όλους τους νευρώνες στο δίκτυο.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το μοντέλο και τα αποτελέσματα που θα προκύψουν μπορούμε να εκμεταλευτούμε το παραπάνω γεγονός. Έτσι επεξεργαζόμενοι την σχέση (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= \mu - \lambda u_i(t) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [u_j(t) - u_i(t)] \\ \iff \frac{du_i(t)}{dt} &= \mu - \lambda u_i(t) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} u_j(t) + \sigma u_i(t) \\ \iff \frac{du_i(t)}{dt} &= \mu + (\sigma - \lambda) u_i(t) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} u_j(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως ο συντελεστής απόσβεσης λ στην πραγματικότητα επηρεάζει τον συντελεστή του δυναμικού του νευρώνα, σε ποσοστό που είναι άμεσα συνδεδεμένο με την τιμή του συντελεστή σύζευξης  $\sigma$ .

### 1.3 Συγχρονισμός και Χιμαιρικές Καταστάσεις

Στην εργασία αυτή μελετούνται φαινόμενα συγχρονισμού σε δίκτυα νευρώνων, εστιάζοντας στις χιμαιρικές καταστάσεις. Χιμαιρική ονομάζεται μια κατάσταση στην οποία ένα μέρος των κόμβων του δικτύου ταλαντώνεται συγχρονισμένα, ενώ ένα άλλο μέρος είναι ασυγχρόνιστο [3][8]. Η πρώτη αναφορά σε χιμαιρική κατάσταση έγινε το 2002 από τους Kuramoto και Battogtokh σε

ένα μη-τοπικά συνδεδεμένο σύστημα ταλαντωτών Kuramoto [9].

Οι χιμαιρικές καταστάσεις μελετώνται, σε συστήματα ταλαντωτών που βρίσκουν εφαρμογές σε πολλά επιστημονικά πεδία. Στην βιολογία για παράδειγμα, συσχετίζεται με τον ημισφαιρικό ύπνο ορισμένων θηλαστικών και τις κρίσεις επιληψίας, ενώ εμφανίζονται και στην οικονομία και την θεωρία παιγνίων [10].

## 2 Αλγόριθμος Προσομοίωσης

Ο αλγόριθμος της προσομοίωσης αναπτύχθηκε σε γλώσσα C++ και υλοποιήθηκε στο σύστημα HPC Aris που διαχειρίζεται το Εθνικό Δίκτυο Έρευνας και Τεχνολογίας (<https://hpc.grnet.gr/>). Όπως είδαμε στο μοντέλο που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4) και (5), είναι απαραίτητο να επιλυθούν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις. Για τον σκοπό αυτό επιλέχθηκε η μέθοδος Euler, όπου δίνει μια προσεγγιστική λύση.

Η μέθοδος στηρίζεται στο γεγονός πως αν φέρεις μια εφαπτόμενη στην καμπύλη, οι τιμές της κοντά στο εφαπτόμενο σημείο δεν διαφέρουν ιδιαίτερα από τις πραγματικές τιμές. Με αυτή την λογική μπορεί να γίνει μια προσεγγιστική αντικατάσταση της καμπύλης με πολλά (εφαπτόμενα) ευθύγραμμα τμήματα [11]. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{u_i(t+dt) - u_i(t)}{dt} \implies u_i(t+dt) = u_i(t) + \frac{du_i(t)}{dt} dt \quad (7)$$

Χρησιμοποιήσαμε βήμα ολοκλήρωσης  $dt = 10^{-3}$  ενώ ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης ήταν 5000 χρονικές μονάδες. Ακόμη θέσαμε  $\mu = 1$  και  $u_{th} = 0.98$ . Τα υπόλοιπα στοιχεία της προσομοίωσης δίνονταν κατά την εκτέλεση. Συγκεκριμένα, οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στις προσομοίωσεις είναι οι παρακάτω:

- ο συνολικός αριθμός νευρώνων στο δίκτυο  $N$ ,
- ο αριθμός των γειτόνων ενός νευρώνα στον δακτύλιο από την μία κατεύθυνση  $R$ ,
- ο συντελεστής σύζευξης  $\sigma$ ,
- ο συντελεστής απωλειών  $\lambda$ ,
- το πρόσημο του αθροίσματος ώστε να επιλέγουμε μεταξύ διεγερτικής συμπεριφοράς με '+' και ανασταλτικής με '-'. Σε όλες τις προσομοίωσεις αυτής της εργασίας επιλέχθηκε το δεύτερο.
- το seed που χρησιμοποιήθηκε. Συγκεκριμένα υπήρχε ένας πίνακας με 4 διαφορετικά seeds και ορίζόταν κάθε φορά ποιό θα χρησιμοποιηθεί ώστε να συγχρίνουμε αποτελέσματα για διαφορετικές παραμέτους με τις ίδιες τυχαίες αρχικές ακολουθίες.

Στην αρχή στον κώδικα αρχικοποιούνται οι τιμές του δυναμικού των νευρώνων σε τυχαίες αποδεκτές τιμές. Στη συνέχεια, για τον ορισμένο χρόνο και με την βοήθεια της μεθόδου Euler υπολογίζεται σε κάθε βήμα το άθροισμα

και προστίθεται στις ήδη υπάρχουσες τιμές. Για να μην χάνονται οι τιμές της προηγούμενης επανάληψης πριν υπολογιστούν τα αθροίσματα, έχουν δημιουργηθεί δύο πίνακες ώστε να κρατάνε και τα παλιά και τα καινούργια δεδομένα. Ο υπολογισμός του αθροίσματος φαίνεται παρακάτω:

```

for(int i = 0; i<N; i++){
    // create the sum in ring
    double sum = 0.0;

    for(int j = 1 ; j<=R; j++){
        int aristeros = mod(i-j,N); // we
            need module not remainder in case
            it's negative
        int daxis = ((i+j) % N);

        sum += u[aristeros] + u[daxis] - 2*u
            [i]; // u[j] - u[i] for 2
            neighbors
    }

    unext[i] = u[i] + dt*(m - l*u[i] + sign*(s
        /(2*R))*sum);
}

```

Στη συνέχεια μελετάται η τιμή του δυναμικού του κάθε νευρώνα. Συγκεκριμένα, αν κάποια τιμή του δυναμικού κάποιου νευρώνα ξεπεράσει το κατώφλι  $u_{th}$  τότε μηδενίζεται (έχουμε εκπόλωση). Παράλληλα, κάθε φορά που συμβαίνει το παραπάνω, αυξάνουμε κατά μία μονάδα τον αριθμό των πλήρων ταλαντώσεων (κύκλων) που έχει εκτελέσει ο συγκεκριμένος νευρώνας. Η προσμέτρηση κύκλων ξεκινάει ύστερα από κάποιες επαναλήψεις ώστε να δωθεί χρόνος στο σύστημα να ξεπεράσει πιθανά αρχικά μεταβατικά στάδια.

Με βάση τα παραπάνω, κάθε 1000 βήματα τυπώνουμε την μέση συχνότητα (mean phase velocity) κάθε νευρώνα στον χρόνο που έχει διανύσει η προσομοίωση μέχρι στιγμής.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι αρχεία ASCII που περιέχουν στήλες με την χρονική στιγμή, την αρίθμηση του νευρώνα, το δυναμικό του και την συχνότητα του την συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Με χρήση του εργαλείου gnuplot δημιουργούνται χωροχρονικά διαγράμματα (space-time plots) που απεικονίζουν την μεταβολή του δυναμικού όλων των νευρώνων σε συνάρτηση με τον χρόνο. Ακόμη, απομονώνοντας μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (στιγμότυπο), παράγονται διαγράμματα δυναμικού και

μέσης συχνότητας συναρτήσει του αύξοντα αριθμού των νεωρώνων.

Τέλος, για να επαληθευτεί η ορθότητα της προσομοίωσης, αναπαρήχθησαν διαγράμματα με παραμέτρους που είχαν εξεταστεί σε προηγούμενες εργασίες του εργαστηρίου και τα προκύπτοντα αποτελέσματα ήταν στατιστικά ίδια με εκείνα των εξεταζόμενων εργασιών [6][7].

### 3 Αποτελέσματα

#### 3.1 Επίδραση του συντελεστή απωλειών λ για διαφορετικούς συντελεστές σύζευξης σ

Αρχικά μελετήθηκε η επίδραση του συντελεστή απωλειών λ του μοντέλου όσον αφορά στο συγχρονισμό και την δημιουργία χιμαιρικών καταστάσεων. Συγκεκριμένα, μελετήθηκαν δίκτυα νευρώνων με παραμέτρους  $N = 1000$  και  $R = 270$ . Η μελέτη έγινε πάνω σε δίκτυα με διαφορετικό συντελεστή σύζευξης σ, ο οποίος είναι ενδεικτικός της δύναμης της σύνδεσης κάθε νευρώνα με τους γείτονες του και εκφράζει το κατά πόσον οι συνδέσεις με άλλους νευρώνες επηρεάζουν το δυναμικό κάθε νευρώνα. Έτσι μεταβάλλαμε διαδοχικά τον συντελεστή απωλειών λ από 0 εώς 2 με βήμα 0.1 για τιμές συντελεστή σύζευξης σ=0.4, σ=0.7 και σ=1.6.

##### 3.1.1 Συντελεστής σύζευξης σ=0.4

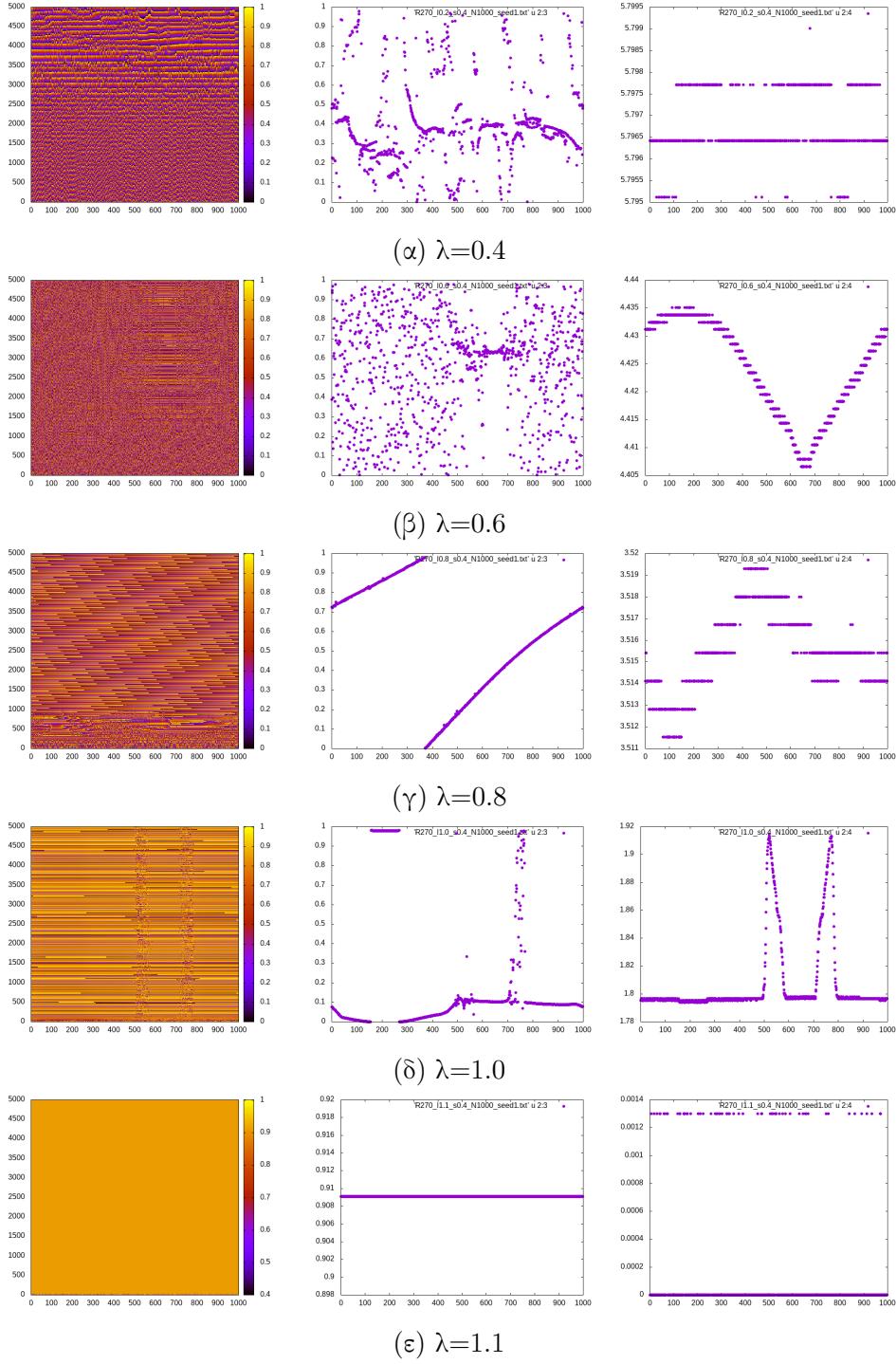
Για πολύ μικρές τιμές του λ παρατηρείται συγχρονισμός συχνοτήτων είναι πολύ κοντά μεταξύ τους.

Η πρώτη χιμαιρική κατάσταση παρατηρείται για λ=0.6 και πιο καθαρά για λ=0.7 για περιορισμένο χρόνο.

Αυξάνοντας το λ το σύστημα πλησιάζει στον συγχρονισμό, σχηματίζοντας οδεύοντα κύματα για λ=0.8 και λ=0.9.

Για τιμές του λ μεγαλύτερες του 1.0 το σύστημα φτάνει σε κορεσμό και όλοι οι νευρώνες σταθεροποιούνται σε μία τιμή δυναμικού.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\lambda$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

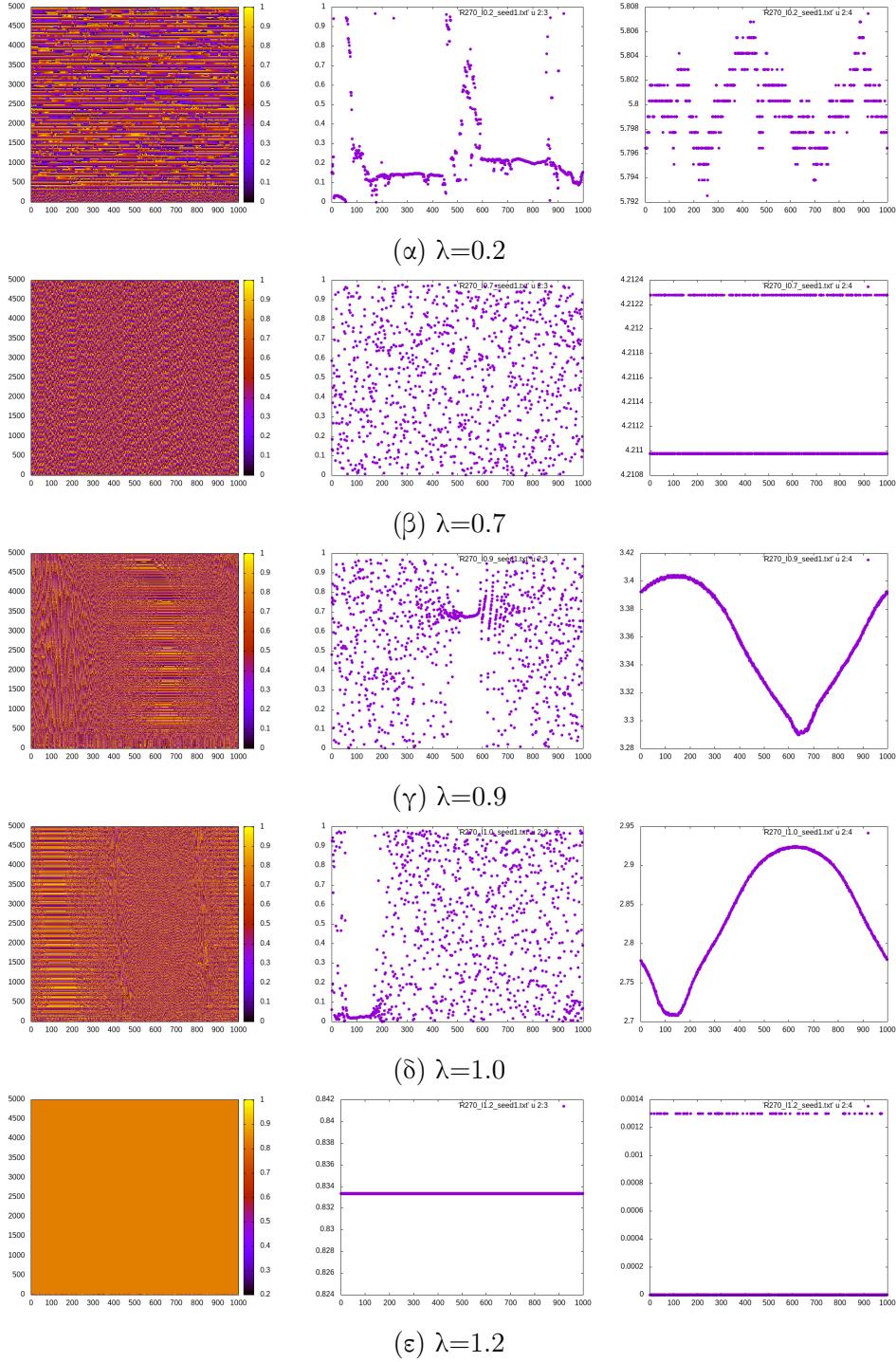
### 3.1.2 Συντελεστής σύζευξης $\sigma=0.7$

Για πολύ μικρές τιμές του  $\lambda$  παρατηρείται κατάσταση συγχρονισμού συχνοτήτων, όπως και στην προηγούμενη ενότητα.

Για  $\lambda=0.8$  ξεκινά να σχηματίζεται η πρώτη χιμαιρική κατάσταση όπου εμφανίζεται καθαρά για  $\lambda=0.9$ . Ανεβαίνοντας σε  $\lambda=1.0$  η χιμαιρική κατάσταση μεγαλώνει και εκτείνεται σε όλο το χρονικό διάστημα.

Για τιμές του  $\lambda$  μεγαλύτερες του 1.0 το σύστημα φτάνει σε κορεσμό και όλοι οι νευρώνες σταθεροποιούνται σε μία τιμή δυναμικού.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο **σχήμα 4**.



Σχήμα 4: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\lambda$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

### 3.1.3 Συντελεστής σύζευξης $\sigma=1.6$

Για  $\sigma=1.6$  τα αποτελέσματα είναι αρκετά διαφορετικά από ότι στις παραπάνω περιπτώσεις. Για πολύ μικρές τιμές του  $\lambda$ , μέχρι και  $\lambda=0.4$ , εμφανίζεται χιμαιρική κατάσταση πολλαπλότητας 4 (δηλαδή 4 συγχρονισμένες και 4 ασυγχρόνιστες περιοχές). Στη συνέχεια η χιμαιρική κατάσταση καταστρέφεται και εμφανίζονται ασυγχρόνιστες περιοχές διάσπαρτες και μη-συγκεκριμένες..

Για  $\lambda=0.7$  αρχίζουν να εμφανίζονται ξανά ξεκάθαρα οι χίμαιρες και για  $\lambda=0.8$  σταύρωσης στον χώρο μέχρι και την τιμή  $\lambda=1.1$ .

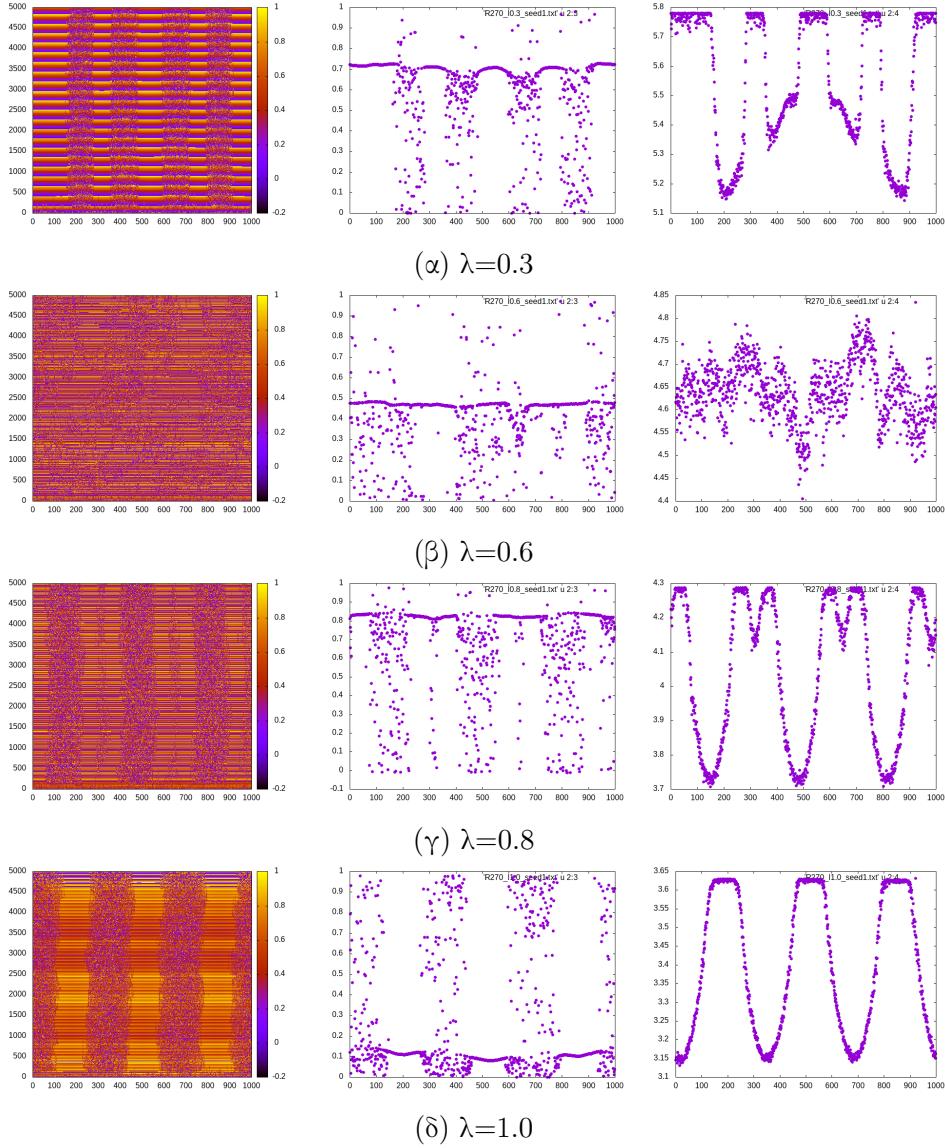
Για  $\lambda=1.2$  εμφανίζεται μια ενδιαφέρουσα κατάσταση, μιας και εμφανίζονται συγχρονισμένες και ασυγχρόνιστες περιοχές που διακόπτονται και μεταφέρονται στον χώρο, δίνοντας την αίσθηση πως είναι μια μεταβατική κατάσταση για τον αριθμό των χίμαιρων. Στο **σχήμα 6** φαίνεται το μεγενθυμένο χωροχρονικό διάγραμμα για περισσότερη ακρίβεια, όμως και στον υπόλοιπο χρόνο εμφανίζει όμοια συμπεριφορά.

Μεγαλώντας την μεταβλητή  $\lambda$  οι συγχρονισμένες και ασυγχρόνιστες περιοχές μπλέκονται μεταξύ τους, φτάνοντας σε τυχαία συγχρονισμένη συμπεριφορά για  $\lambda=1.6$ , με ελάχιστες αποκλίσεις στη συχνότητα.

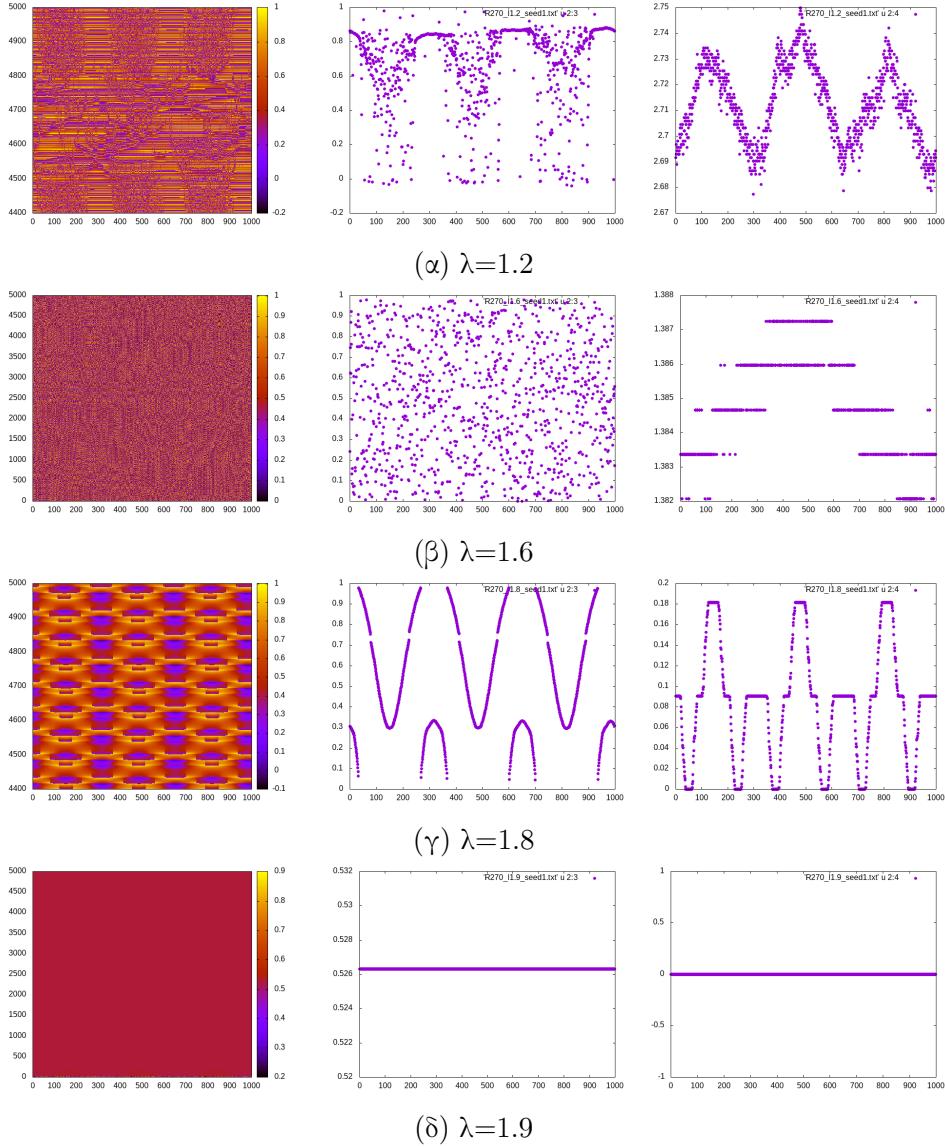
Στη συνέχεια αρχίζουν και σχηματίζονται ορισμένα περιοδικά μοτίβα στον συγχρονισμό.

Για τιμές του  $\lambda$  μεγαλύτερες του 1.8 το σύστημα φτάνει σε κορεσμό και όλοι οι νευρώνες σταύρωσης σταύρωσης (παγώνουν) σε μία τιμή δυναμικού.

Ενδεικτικά αποτελέσματα φαίνονται στα **σχήματα 5** και **6**.



Σχήμα 5: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δωρτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\lambda \leq 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\sigma = 1.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$



Σχήμα 6: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δωρτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\lambda > 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\sigma = 1.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

### 3.2 Επίδραση του συντελεστή σύζευξης σ με συντελεστή απωλειών $\lambda$ μηδέν

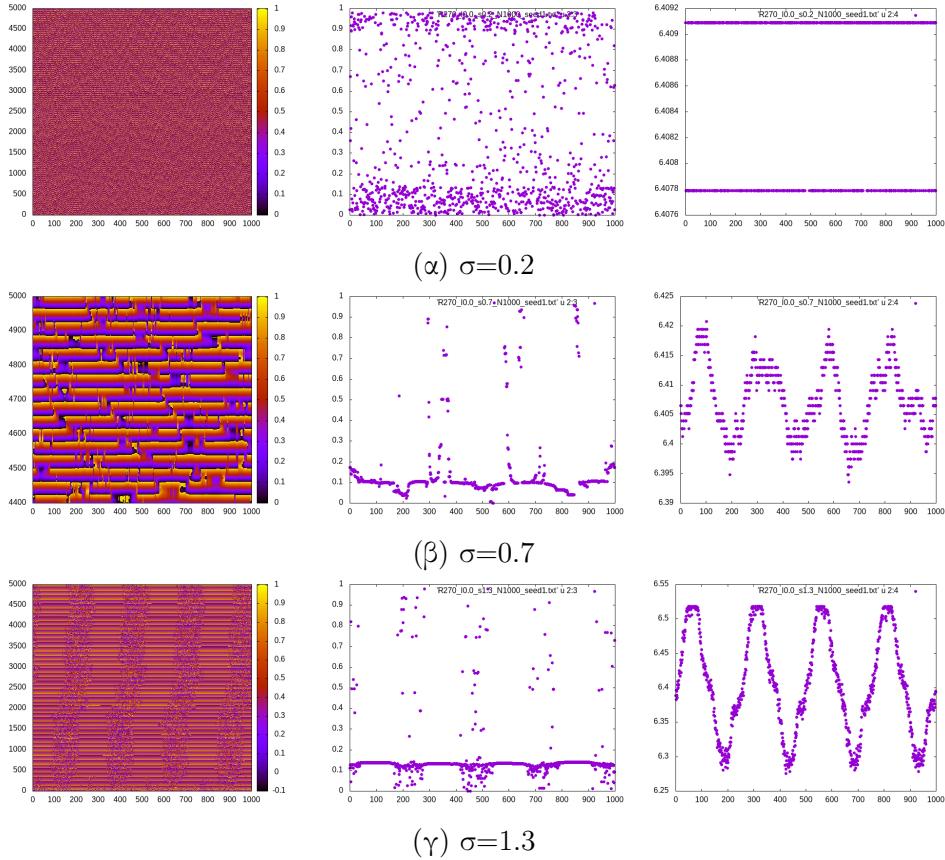
Για μικρές τιμές του σ έχουμε συγχρονισμό συχνοτήτων και ασυγχρόνιστες φάσεις μιας και το δυναμικό των νευρώνων εμφανίζεται να είναι αρκετά τυχαίο.

Αυξάνοντας το σ αρχίζουν και σταθεροποιούνται οι καταστάσεις των νευρώνων στο χώρο και για  $\sigma=1.3$  εμφανίζονται οι πρώτες ξεκάθαρες χιμαιρικές καταστάσεις.

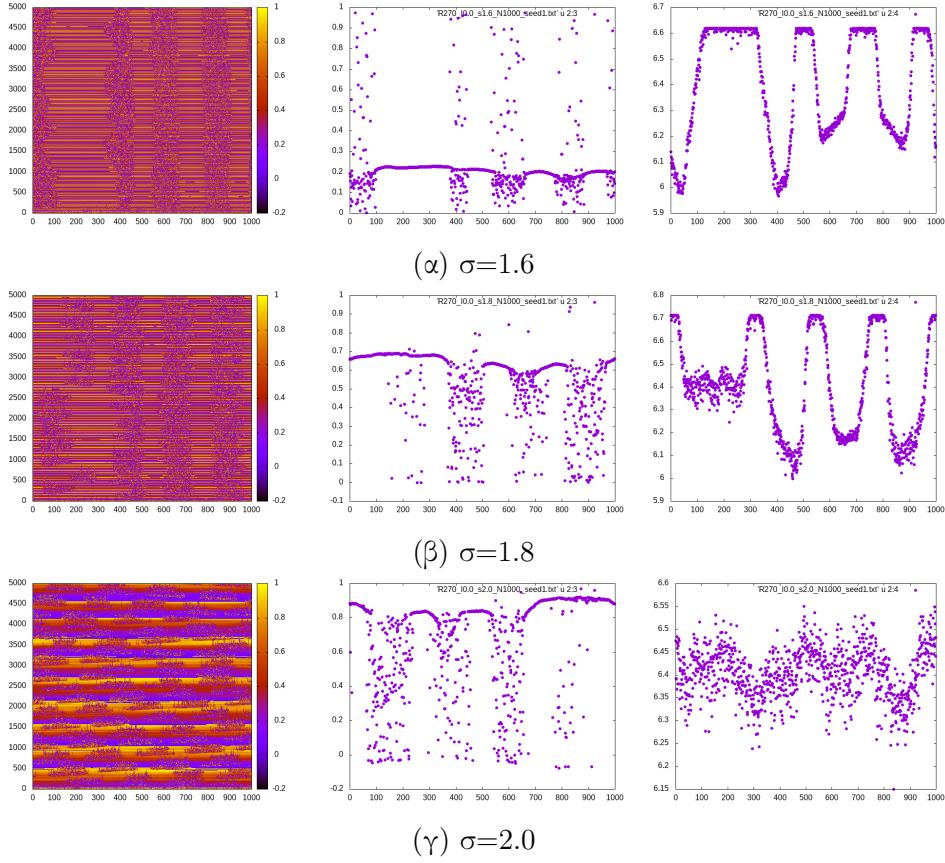
Για τιμές του  $\sigma=1.5$  και  $\sigma=1.6$  αλλάζει ο αριθμός και η απόσταση των χιμαιρικών καταστάσεων.

Τέλος, φαίνεται να αρχίζουν να σχηματίζονται κάποιες διακοπές στις χιμαιρες, φτάνοντας για  $\sigma=2.0$  να παρατηρούμε οδεύουσες χιμαιρες.

Ενδεικτικά αποτελέσματα φαίνονται στα **σχήματα 7 και 8**.



**Σχήμα 7:** LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\sigma$  (α). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$



Σχήμα 8: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $\sigma$  ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όρος απωλειών ( $-\lambda u_i(t)$ ) δεν είναι αναγκαίος για την δημιουργία των χιμαιρικών καταστάσεων, οι οποίες μπορούν να εμφανιστούν ακόμα και όταν ο όρος αυτός δεν συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς.

### 3.3 Μελέτη μετάβασης χιμαιρικών καταστάσεων για συντελεστή σύζευξης $\sigma=1.6$ και συντελεστή απωλειών $\lambda=1.2$

Στην παραπάνω υποενότητα είδαμε πως για τιμές  $\lambda=1.2$  και  $\sigma=1.6$  η κατάσταση συγχρονισμού των νευρώνων εμφάνισε μια συμπεριφορά που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως μεταβατική σε σχέση με τον αριθμό των χιμαιρικών καταστάσεων. Έτσι, μελετήθηκε η συμπεριφορά του δικτύου με αυτές τις παραμέτρους εάν

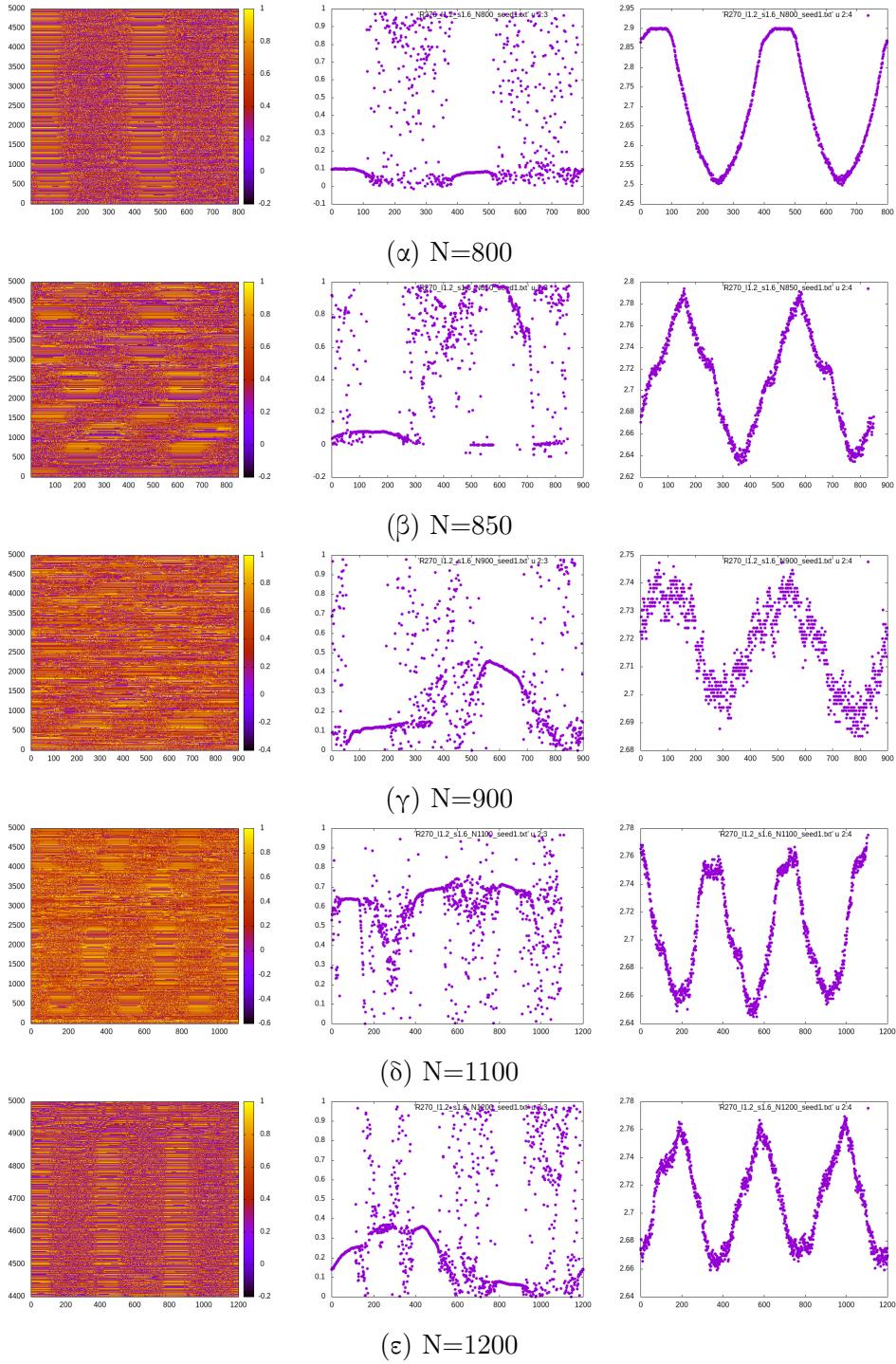
μεταβληθούν ο αριθμός  $N$  των νευρώνων στο δίκτυο και ο αριθμός  $R$  των γειτόνων κάθε νευρώνα, ώστε να διαπιστωθεί εάν συμβαίνει η εν λόγω μετάβαση.

### 3.3.1 Μεταβολή του αριθμού νευρώνων στο δίκτυο $N$

Μεταβάλλαμε το  $N$  από 800 μέχρι και 1200 με βήμα 50, ώστε να εντοπίσουμε την τιμή του  $N$  για την οποία είχαμε μετάβαση από διπλή σε τριπλή χιμαιρική κατάσταση.

Για  $N=800$  σχηματίστηκαν ξεκάθαρες χιμαιρικές καταστάσεις (με 2 συγχρονισμένες και 2 ασυγχρόνιστες περιοχές). Ανεβαίνοντας στα 850 παραμένουν ξεκάθαρες ορισμένες, χωρίς να είναι σταθερές ως προς τον χώρο. Στη συνέχεια εμφανίζεται ξανά η μεταβατική συμπεριφορά που εντοπίστηκε παραπάνω. Για  $N=1100$  και  $N=1150$  αρχίζουν να σχηματίζονται καθαρότερα οι χίμαιρες με 3 περιοχές, που σταθεροποιούνται προς το τέλος της προσομοίωσης.

Ενδεικτικά αποτελέσματα φαίνονται στο **σχήμα 9**.

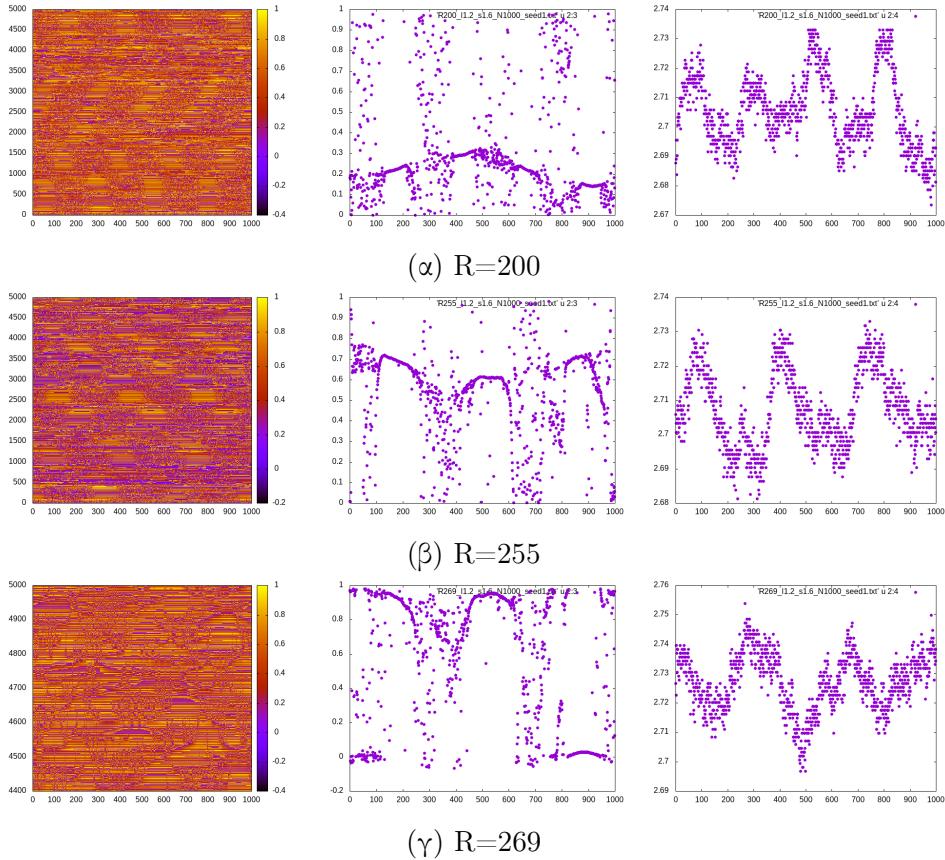


Σχήμα 9: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $N$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $R = 270$ ,  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $/\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

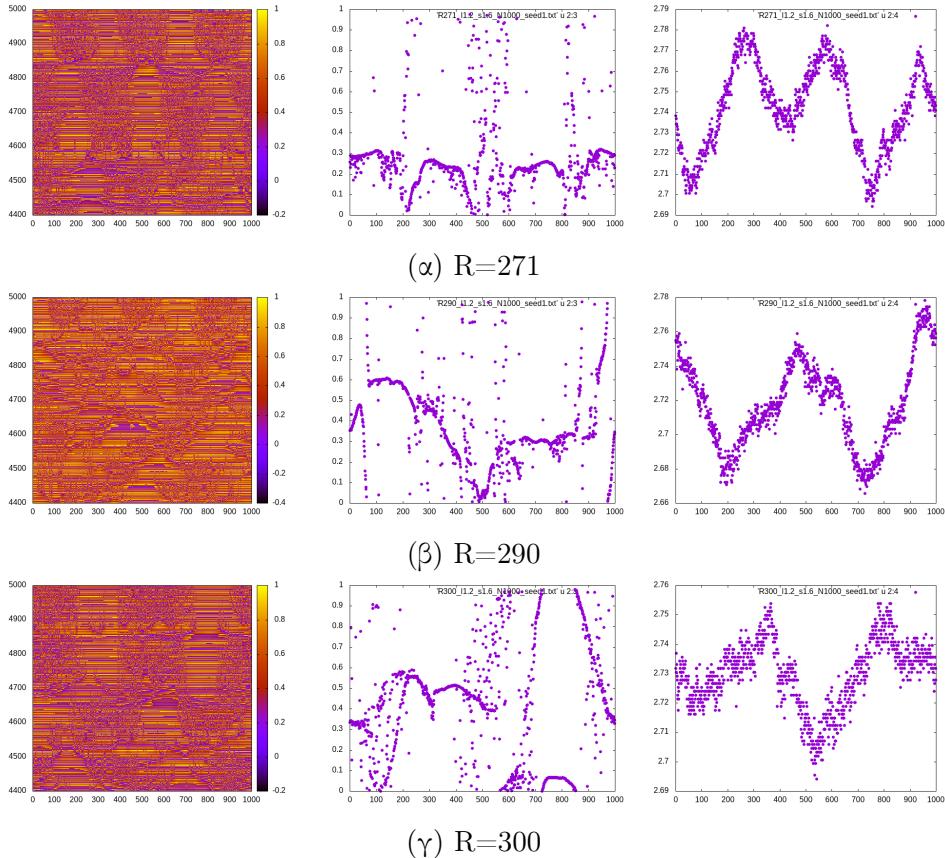
Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι αυξάνοντας το μέγεθος του συστήματος, του δίνουμε την δυνατότητα για αλλαγή μοτίβου και εγκατάσταση μεγαλύτερου αριθμού συγχρονισμένων και ασυγχρόνιστων περιοχών. Εδώ θα ήταν ενδιαφέρον να ελεγχθεί εάν ο αριθμός των ταλαντωτών που συμμετέχουν στις συγχρονισμένες ή στις ασυγχρόνιστες περιοχές παραμένει σταθερός, ή εάν μεταβάλλεται με το μέγεθος του συστήματος  $N$ .

### 3.3.2 Μεταβολή του αριθμού των γειτόνων $R$

Στην παρούσα ενότητα μεταβάλλουμε τον αριθμό των αλληλεπιδρώντων γειτόνων  $R$  κρατώντας σταθερό το μέγεθος του συστήματος  $N$ , με σκοπό να μελετήσουμε εάν η διαφορά στον αριθμό των γειτόνων μπορεί να προκαλέσει μετάπτωση στην πολλαπλότητα της χιμαρικής κατάστασης. Συγκεκριμένα, μεταβλήθηκε ο αριθμός των γειτόνων  $R$  σε κοντινές περιοχές του 270. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα 10 και 11.



Σχήμα 10: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R < 270$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$



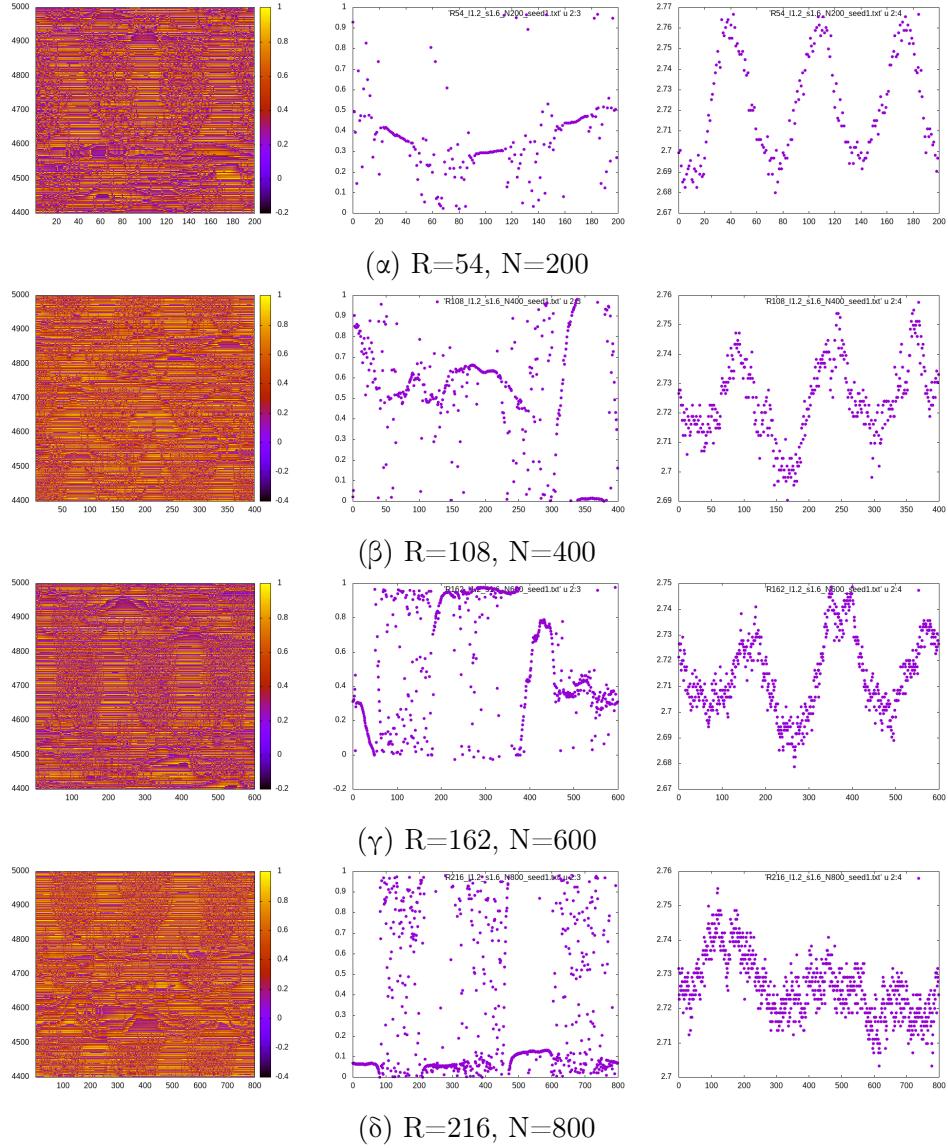
Σχήμα 11: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R > 270$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $N = 1000$ ,  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

Συμπερασματικά, μία μεταβολή της τάξης του  $+ \text{ } \text{ } - 10\%$  στον αριθμό των συζευγμένων γειτόνων δεν φάνηκε να σταθεροποιεί την δομή των χιμαιρικών καταστάσεων οι οποίες παραμένουν διαλλειπτικές (intermittent, οι συγχρονισμένες και ασυγχρόνιστες περιοχές αλλάζουν τυχαία την θέση τους με τον χρόνο) σε όλες τις τιμές του  $R$ . Λόγω της τυχαιότητας αυτής δεν είναι δυνατόν να ταυτοποιηθεί η πολλαπλότητα των χιμαιρικών καταστάσεων στις διάφορες τιμές του  $R$ .

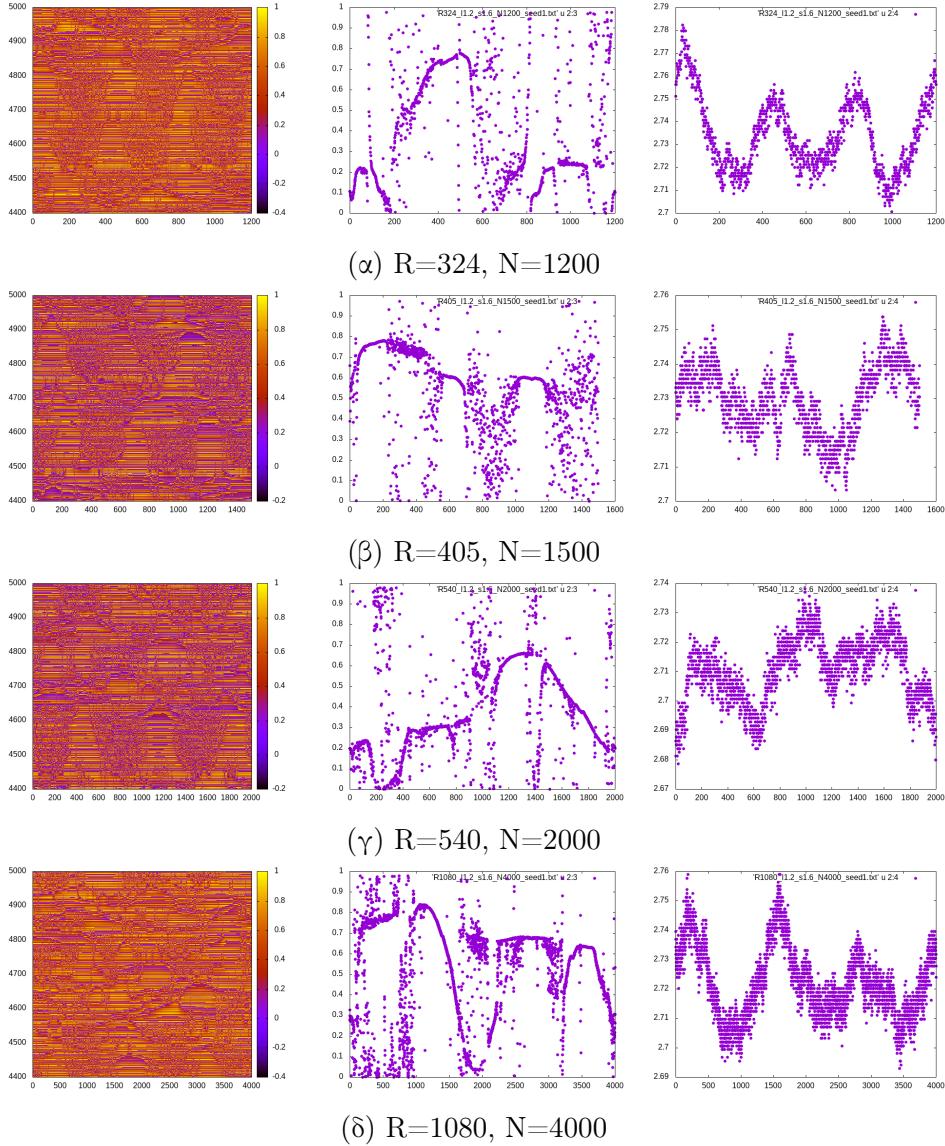
### 3.3.3 Μεταβολή των $N$ και $R$ με σταθερή αναλογία

Σε αυτό το σημείο μεταβλήθηκε ταυτόχρονα ο συνολικός αριθμός  $N$  των νευρώνων στο δίκτυο, καθώς και ο αριθμός των γειτόνων  $R$ , κρατώντας σταθερή την αναλογία  $R/N = 0.27$ . Ούτε και η μεταβολή αυτή φάνηκε να επηρεάζει την

εμφάνιση και πολλαπλότητα των χιμαρικών καταστάσεων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα **σχήματα 12** και **13**.



**Σχήμα 12:** LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R$  και του  $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 (α). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$



Σχήμα 13: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R$  και του  $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μία ταυτόχρονη αλλαγή των παραμέτρων  $N$  και  $R$ , αλλά με διατήρηση σταθερού του λόγου  $r=R/N$  δεν επιτυγχάνει την σταθεροποίηση των διαλλειπτικών (intermittent) δομών που εμφανίζονται χωρικά στο σύζευγμένο σύστημα. Φαίνεται ακόμη ότι η πολλαπλότητα

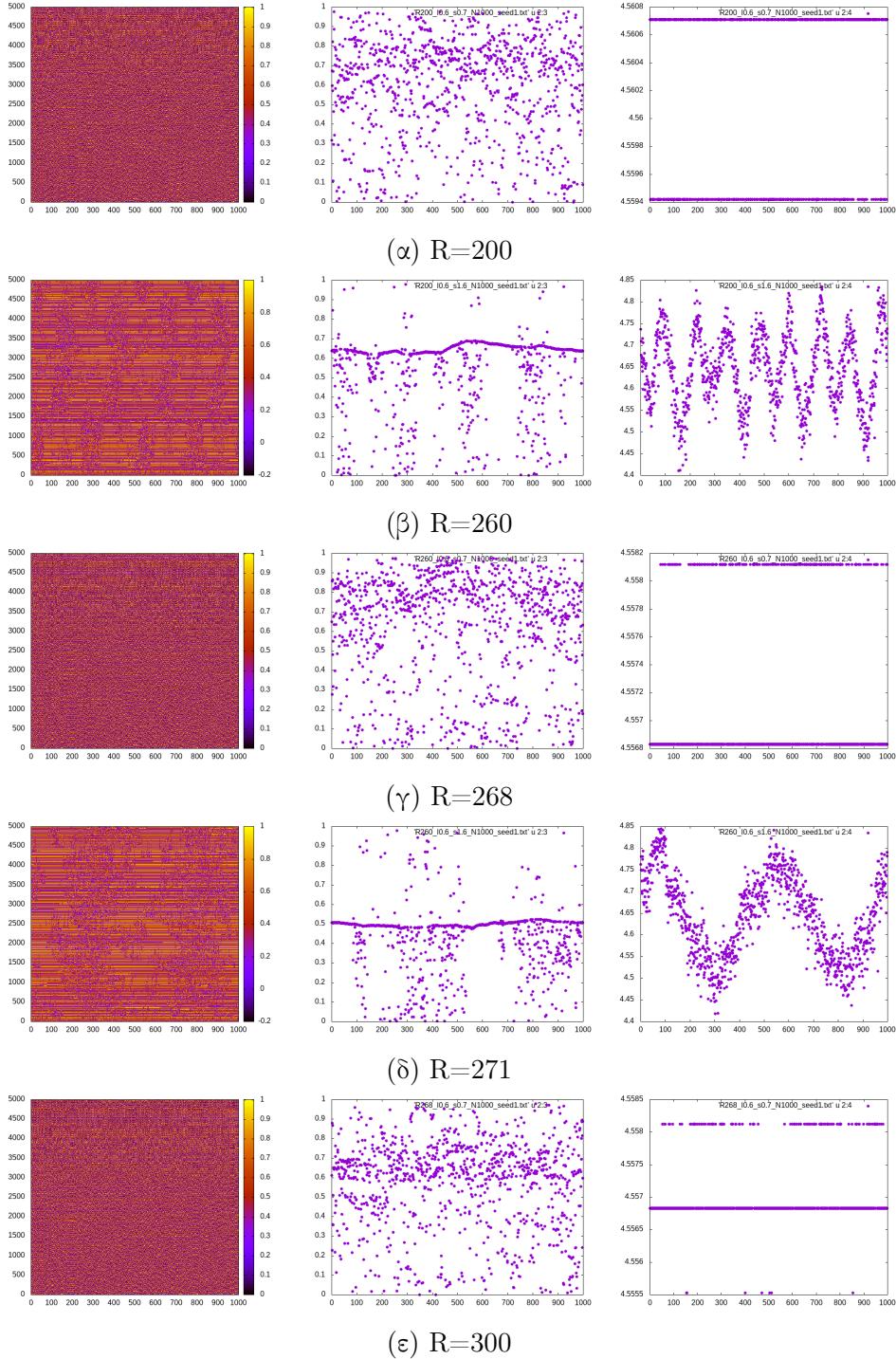
της χιμαιρικής κατάστασης δεν μεταβάλλεται.

### 3.4 Μελέτη μετάβασης χιμαιρικών καταστάσεων για διαφορετικα $R$

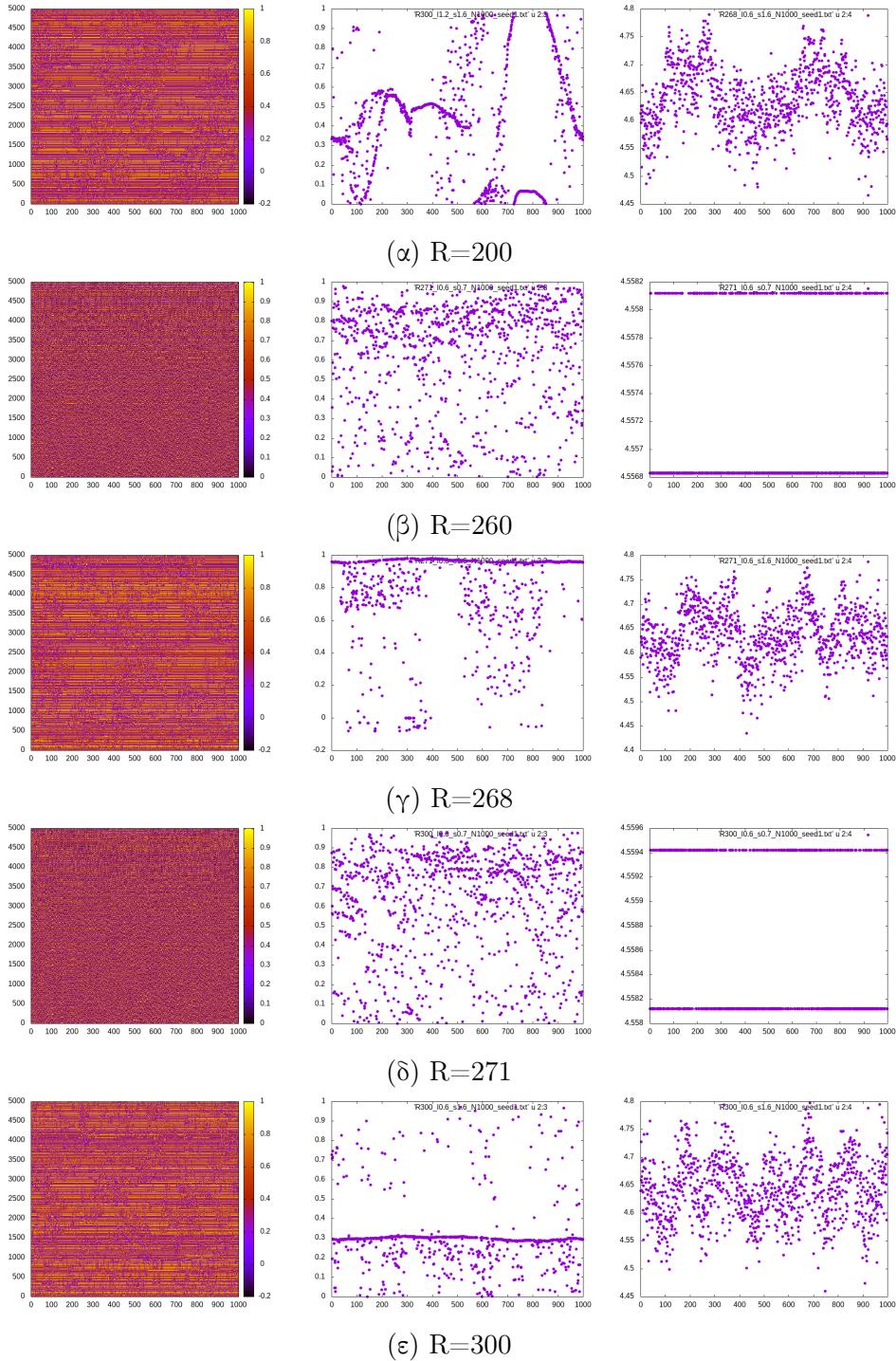
Μεταβλήθηκε ο αριθμός των γειτόνων  $R$  σε κοντινές περιοχές του 270 και για άλλες παραμέτρους. Συγκεκριμένα, μιας και παραπάνω μελετήθηκε για  $\lambda=1.2$  και  $\sigma=1.6$ , ερευνήθηκαν και για μικρότερο συντελεστή απόσβεσης  $\lambda=0.6$  και για τιμές συντελεστή σύζευξης  $\sigma=0.7$  και  $\sigma=1.6$ . Για  $\lambda=1.2$  και  $\sigma=0.7$  έχουμε ήδη εντοπίσει (και επιβεβαιώθηκε και υπολογιστικά) πως το σύστημα βρίσκεται σε κορεσμό, οπότε δεν το εξετάζουμε παρακάτω.

Παρατηρήθηκαν και στις δύο περιπτώσεις μεταβάσεις ανάμεσα σε συγχρονισμό συχνοτήτων και διαλλειπτική συμπεριφορά, χωρίς όμως να σταθεροποιούνται χωρικά οι συγχρονισμένες και ασυγχρόνιστες περιοχές.

Συγκεκριμένα, για  $\lambda=0.6$ ,  $\sigma=0.7$  (**σχήμα 14**), για  $R=200$  παρατηρήθηκε συγχρονισμός στο ω με ασυγχρόνιστες φάσεις. Αυξάνοντας το  $R$  σε 260, ο συγχρονισμός συχνοτήτων έδωσε τη θέση του σε διαλλειπτική συμπεριφορά όπου μία 8πλή χιμαιρική κατάσταση εμφανίζεται και εξαφανίζεται τυχαία στο χώρο. Αυξάνοντας περαιτέρω την τιμή του  $R$  σε 268 επανήλθε η κατάσταση συγχρονισμού συχνοτήτων ενώ για  $R=271$ , είχαμε επανεμφάνιση της διαλλειπτικής χιμαιρικής κατάστασης με πολλαπλότητα 2. Τέλος αυξάνοντας το  $R$  σε 300 επανεμφανίστηκε η κατάσταση συγχρονισμού συχνοτήτων. Ανάλογα φαινόμενα παρατηρούνται και για τιμές των παραμέτρων  $\lambda=0.6$  και  $\sigma=1.6$  (**σχήμα 15**).



Σχήμα 14: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $\sigma = 0.7$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$



Σχήμα 15: LIF μοντέλο δικτύου με μη τοπική συνδεσμολογία δακτυλίου: χωροχρονικό διάγραμμα στην πρώτη στήλη, στιγμιότυπο των δυναμικών στην δεύτερη και οι μέσες συχνότητες στην τρίτη για διαφορετικές τιμές του  $R$  και του  $N$ , με σταθερή αναλογία 0.27 ( $\beta$ ). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $\sigma = 1.6$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $u_{th} = 0.98$  33

## 4 Συμπεράσματα και Ανοιχτά Προβλήματα

Από τα παραπάνω αποτελέσματα εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ο συντελεστής απόσβεσης λ παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο.

Σύμφωνα με την εξίσωση (6) έχουμε:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \mu + (\sigma - \lambda)u_i(t) - \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} u_j(t)$$

Έτσι, όπως ήδη παρατηρήσαμε στη θεωρία, ο συντελεστής απόσβεσης λ επηρεάζει τον συντελεστή του δυναμικού του νευρώνα  $u_i(t)$ , που είναι άμεσα συνδεδεμένος και με τον συντελεστή σύζευξης σ.

Σε γενικές γραμμές γύρω από το  $\lambda=1$  εμφανίζονται χιμαιρικές καταστάσεις. Για μικρότερες τιμές του σ ο συντελεστής λ έχει μεγαλύτερη επίδραση, ξεκινώντας από συγχρονισμό συχνοτήτων αλλά όχι απαραίτητα φάσης, και καταλήγοντας σε χιμαιρικές καταστάσεις. Επίσης για μεγαλύτερες τιμές του λ καταλήγει γρήγορα σε κορεσμό. Για μεγαλύτερες τιμές του σ η επιρροή του λ είναι μικρότερη, ενώ εμφανίζονται συχνότερα χιμαιρικές καταστάσεις και επαναμβανόμενες περιοχές με όμοια συμπεριφορά.

Ομοίως, για μηδενική τιμή του συντελεστή απόσβεσης λ, για μικρές τιμές του σ (και άρα μικρό συνολικό συντελεστή του δυναμικού  $u_i(t)$ ) έχουμε κοντινές συχνότητες μεταξύ των νευρώνων, ενώ μεγαλώνοντας το σ εμφανίζονται ‘καθαρές’ χιμαιρικές καταστάσεις και επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Ακόμη, εντοπίζοντας μεταβατικές καταστάσεις των χιμαιρικών καταστάσεων για  $\sigma=1.6$  και  $\lambda=1.2$ , μελετήσηκαν αν μικρές αλλαγές στις υπόλοιπες παραμέτρους καταλήγουν σε ‘καθαρότερες’ χίμαιρες.

Παρατηρήθηκε πως ο συνολικός αριθμός των νευρώνων στο δίκτυο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, μιας και για μικρότερες τιμές του N είχαμε χιμαιρικές καταστάσεις με δύο ασυγχρόνιστες και συγχρονισμένες περιοχές ενώ και για μεγαλύτερες είχαν σχεδόν σταθεροποιηθεί σε τρεις.

Παρατηρήθηκε επίσης πως η αναλογία γειτόνων  $R$  και νευρώνων  $N$  δεν επηρεάζει σημαντικά την πολλαπότητα των χιμαιρικών καταστάσεων, ούτε και συντελεί στην σταθεροποίηση στο χώρο των διαλειπτικών χιμαιρικών καταστάσεων. Άλλάζοντας τις παραπάνω τιμές διατηρώντας την αναλογία τους σταθερή είχαμε πολύ μικρές διαφορές στα αποτελέσματα, όπου επαναλαμβανόντουσαν για διαφορετικές τιμές των N και R.

Παράλληλα, μικρές μεταβολές στον αριθμό γειτόνων  $R$  είχαν όμοιο αποτέλεσμα με τα παραπάνω, μιας και υπήρχαν μικρές διαφορές ενώ κυριαρχούσαν δύο επαναλαμβανόμενα αποτελέσματα για διαφορετικές παραμέτρους.

Όμοιες αλλαγές στο  $R$  μελετήθηκαν και για διαφορετικές τιμές τον  $\lambda$  και σε και προέκυψαν τα ίδια αποτελέσματα.

Στη μελέτη μας αυτή παρατηρήσαμε ότι ο αριθμός των συγχρονισμένων (και ασυγχρόνιστων) περιοχών εμφανίζεται να είναι ζυγός στις περισσότερες σταθεροποιημένες περιπτώσεις, ενώ οι μονές περιπτώσεις τείνουν να μεταπίπτουν σε ζυγές. Αυτό, βάση άλλων δημοσιεύσεων που μελετούν χιμαρικές καταστάσεις, αποδίδεται στο γεγονός ότι οι συγχρονισμένες περιοχές εμφανίζονται σε ζεύγη με αντίθετες φάσεις [10].

Αν και η επιρροή του συντελεστή  $\lambda$  είναι φανερή με βάση τα παραπάνω, είναι σημαντικό να μελετηθεί και σε άλλα μοντέλα. Στη συγκεκριμένη μελέτη αγνοήθηκε η περίοδος εφησυχασμού που θα μπορούσε να επηρεάσει τα αποτελέσματα. Ακόμη, μένει να εξεταστεί η αλλαγή στον συντελεστή απόσβεσης και για διαφορετικά μοντέλα προσομοίωσης νευρώνων, καθώς και για διαφορετικές, περισσότερο περίπλοκες τοπολογίες δύο ή τριών διαστάσεων.

Στην παρούσα μελέτη θεωρήσαμε πως όλοι οι νευρώνες είχαν όμοια συμπεριφορά και κοινό συντελεστή σύζευξης σε όλες τις συζεύξεις. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξετάσουν μοντέλα με διαφοροποιημένους νευρώνες.

Τέλος, η έρευνα αυτή επικεντρώθηκε στους ανασταλτικούς νευρώνες. Επόμενες μελέτες μπορούν να εστιάσουν στην επιρροή του συντελεστή απόσβεσης και σε διεγερτικούς νευρώνες, μιας και στην σχέση (6) θα είχαμε δύο αρνητικούς όρους στον συντελεστή του δυναμικού στο δεξί μέρος.

## 5 Βιβλιογραφία

- [1] Καστωρίνης Αντώνης, Κωστάκη-Αποστολοπούλου Μαρία, Μπαρώνα-Μάμαλη Φωτεινή, Περάκη Βασιλική και Πιαλόγλου Περικλής. *Βιολογία (Α' Γενικού Λυκείου)*. ΟΕΔΒ (ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ), ΥΠ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ - ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, 2015.
- [2] Cambell Neil and Reece Jane. *Βιολογία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.
- [3] Θεόδωρος Κασιμάτης. Φαινόμενα συγχρονισμού σε δίκτυα νευρώνων. Master's thesis, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Θετικών Επιστημών-Τμήμα Φυσικής, Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, 2016.
- [4] Purves, Dale. Williams, Stephen Mark. *Neuroscience*. Sinauer Associates, 2001.
- [5] Nefeli Dimitra Tsigkri-DeSmedt, Ioannis Koulierakis, Georgios Karakos, and Astero Provata. Synchronization patterns in LIF neuron networks: merging nonlocal and diagonal connectivity. *European Physical Journal B*, 91(12), dec 2018.
- [6] Nefeli Dimitra Tsigkri-DeSmedt, Johanne Hizanidis, Eckehard Schöll, Philipp Hövel, and Astero Provata. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities. *European Physical Journal B*, 90(7), jul 2017.
- [7] N. D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, P. Hövel, and A. Provata. Multi-chimera states and transitions in the Leaky Integrate-and-Fire model with nonlocal and hierarchical connectivity. *European Physical Journal: Special Topics*, 225(6-7):1149–1164, sep 2016.
- [8] Felix P. Kemeth, Sindre W. Haugland, Lennart Schmidt, Ioannis G. Kevrekidis, and Katharina Krischer. A classification scheme for chimera states. *Chaos*, 26(9), sep 2016.
- [9] Yoshiki Kuramoto and Dorjsuren Battogtokh. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, oct 2002.

- [10] Nikos E. Kouvaris, Rubén J. Requejo, Johanne Hizanidis, and Albert Díaz-Guilera. Chimera states in a network-organized public goods game with destructive agents. *Chaos*, 26(12):1–8, 2016.
- [11] David F. Griffiths and Desmond J. Higham. Euler’s Method. In *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, pages 19–31. Springer, London, 2010.

## 6 Παράρτημα: Κώδικας Προσομοίωσης

Εδώ παρατίθεται αναλυτικά ο κώδικας σε  $C++$  που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <algorithm>
#include <iomanip>
#include <string>
#include <cstring>
using namespace std;
double mydouble(double threshold) {
    return threshold*((double)rand()/(double)
                      RAND_MAX);
}
int mod(int a, int b){
    int r = a % b;
    return r < 0 ? r + b : r;
}

int main(int argc, char *argv[]){
    string N1 = argv[4];
    int N = atoi(argv[4]);
    string R1 = argv[1];
    int R = atoi(argv[1]);
    int wth = 200;
    int nstep = 1000;
    int it = 0;
    int seed_array [4] = {395849566, 63789869,
                         572907421, 749107355};
    string seed1 = argv[5];
    int seed = seed_array[atoi(argv[5])-1];

    double dt=0.001;
    double pi=3.14159265;
    string l1 = argv[2];
```

```

double l = atof(argv[2]);
double uth=0.98;
double m = 1.0;
string s1 = argv[3];
double s = atof(argv[3]);
double sim_time = 5000.0;

double u[N] , unext[N] , cycles[N];

int sign = atoi(argv[6]);
string strr = "R" + R1 + "_l" + l1 + "_s" +
s1 + "_N" + N1 + "_seed" + seed1 + ".out";

ofstream outfile (strr.c_str());

srand(seed);
for(int i=0;i<N;i++){
    // initialization with random
    // numbers
    u[i] = mydouble(uth);
    cycles[i] = 0.0;
    //outfile<< 0.0 <<"\t"<<i<<"\t"<<u[i]
    //<< 0.0 <<"\n";
}
for(double time=0; time<=sim_time; time =
time + dt){
    it++;

    for(int i = 0; i<N; i++){
        // create the sum in ring
        double sum = 0.0;

        for(int j = 1 ; j<=R; j++){
            int aristeros = mod(
                i-j,N); // we
            // need module not
            // remainder in case
            // it's negative
            int dexis = ((i+j) %
N);

```

```

        sum += u[aristeros]
        + u[dexis] - 2*u[
        i]; // u[j] - u[i]
        ] for 2 neighbors
    }

    unext[i] = u[i] + dt*(m - 1*
    u[i] + sign*(s/(2*R))*sum
    );
}

for(int i=0; i<N; i++){
    // discharge and compute
    // cycles
    if(unext[i] > uth) {
        u[i] = 0.0;
        if(it > wth) cycles
            [i] += 1.0;
    }
    else u[i] = unext[i];

    // print results
    if(it%nstep==0){
        outfile << fixed <<
        setprecision(5)
        << time << "\t" << i
        << "\t" << u[i] <<
        "\t" << (2.0*pi*
        cycles[i]/(time -
        dt*wth)) << endl;
    }
}
}

```