Oscar Arévalo CU: 170507

Examen Final Análisis Aplicado

- 1 Gradiente Conjugado

1. Demuestre que si los vectores no nulos $p_1, p_2, \dots p_l$ satisfacen $p_i^T A p_j = 0 \; \forall i \neq j$ y A es simétrica y positiva definida, entonces los vectores son linealmente independientes.

2. Dado este resultado ¿Por qué el gradient conjugado converge en a lo más n iteraciones?

- Quasinewton

1. Muestre que la segunda condición de Wolfe implica la condición de curvatura $s_k^T y_k > 0$

2. Verifique B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra

1 Gradiente Conjugado

Supongamos $p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$ ①, A es pos. definida ②

Supongamos $k = n$. (Dimensión del Espacio)

Por Contradicción: Supongamos

$$p_k = \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$$

$\Rightarrow$ Por A pos. definida ②

$$0 < p_k^T Q p_k = p_k^T Q(\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1})$$

$$= \underbrace{\alpha_1 p_k^T Q p_1 + \alpha_2 p_k^T Q p_2 + \cdots + \alpha_{k-1} p_k^T Q p_{k-1}}_{=0 \text{ Por } ①}$$

$$0 < p_k^T Q p_k = 0$$

Por lo tanto p_i para $i \in \{1 \ldots n\}$ son LI. ■

2.

Dada la propiedad que demostramos en el ejercicio anterior

Podemos notar que al generar nuestras direcciones con el método de Direcciones Conjugadas.

$$x^* - x_0 = \sigma_0 p_0 + \sigma_1 p_1 + \cdots + \sigma_{n-1} p_{n-1}$$

Para una elección σ_K

Además sabemos de la propiedad de la conjugación

$$p_j^T A p_i = 0$$

$$\sigma_K = \frac{p_K^T A(x^* - x_0)}{p_K^T A p_K}$$

nuestra matriz del problema simplificado Ax

Entonces si σ_K es nuestro step a_K en el Método del Gradiente,

Tenemos que por la Independencia Lineal de los p_i's lo podemos resolver en n pasos máximo.

Strong Wolfe Condition

1. $f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$

2. $|\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

$$\boxed{\begin{aligned} s_k &= x_{k+1} - x_k \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \\ s_k &= \alpha_k p_k \\ y_k &= \nabla f_{k+1} - \nabla f_k \end{aligned}}$$

$\rightarrow |\nabla f_{k+1}^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

$<$ Por la condición fuerte de Wolfe

$\Rightarrow 0 \leq |\nabla f_{k+1}^T p_k| + c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

$\Rightarrow (\nabla f_{k+1}^T) p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k$

$(\nabla f_{k+1} - \nabla f_k)^T (1 - c_2) p_k \geq 0$

$>$

$(1 - c_2) y_k^T p_k > 0$

Ya que p_k es dirección de descenso

Cualquier número $c_2 \in (0,1)$ y $\alpha_k \in (0,1)$

$\therefore$

$$\frac{\alpha_k \cancel{(1 - c_2)}}{\cancel{(1 - c_2)}} y_k^T p_k > 0$$

$$= \alpha_k y_k^T p_k = \underbrace{\alpha_k p_k}_{s_k}{}^T y_k > 0$$

Utilizando la Propiedad

SHERMAN-Morrisson-WooDBury

Tenemos que para A cuadrada no-singular

$$\bar{A} = A + ab^T$$

$\Rightarrow$ Si $\bar{A}$ es invertible

$$\bar{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$$

$\Rightarrow$ Tenemos $H_{k+1} = \underbrace{(I-\rho_k s_k y_k^T) H_k (I-\rho_k y_k s_k^T)}_{A} + \underbrace{\rho_k s_k}_{a}\underbrace{s_k^T}_{b^T}$

Asimismo Podemos Considerar

$$\underbrace{I}_{A} - \underbrace{\rho_k s_k}_{a}\underbrace{y_k^T}_{b^T} \quad \text{y} \quad \underbrace{I}_{A} - \underbrace{\rho_k y_k}_{a}\underbrace{s_k^T}_{b^T}$$

A estos les Aplicamos la Misma fórmula

$\Rightarrow$ Notemos que

Por $H_{k+1} = \underbrace{(I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T)}_{A} + \underbrace{\rho_k s_k}_{a} \underbrace{s_k^T}_{b}$

Tenemos que $A^{-1} = \left(I - \frac{\rho_k s_k y_k^T}{1 + \rho_k y_k^T s_k}\right) B_k \left(I - \frac{\rho_k y_k s_k^T}{1 + s_k^T y_k \rho_k}\right)$

$H_k^{-1} = B_k$

$$\Rightarrow \boxed{H_{k+1}^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} s_k s_k^T \rho_k A^{-1}}{1 + s_k A^{-1} s_k^T \rho_k}}$$

Intenté terminar la deducción, pero sabemos que de este producto obtenemos

$$\boxed{H_{k+1}^{-1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} = B_{k+1}}$$

$\blacksquare$