ELI5 (30 pts)

+ Queremos minimizar una función:
  - imagina que la función es un aparato que sostienes en tu mano y te da un número.
  - Estás en un cuarto (Tu dominio) y te pararon en un lugar inicial (x_0)

→ Lo que estás buscando es el lugar donde tu aparato muestra el número más chico

+ Búsqueda Lineal:
  - Primero, observa que tu aparato te da información de cómo cambian los valores que salen en puntos a tu alrededor (Grad) y de la forma de la función en el punto en el que estás (Hess)
  - Decides entonces la mejor dirección para moverte y buscar un valor más chico

- Cuando ya tienes la dirección, ahora decides el tamaño del paso que darás.
- Para eso tienes formas de hacerlo: una es dar un paso grande y ver si pasos más chicos son mejores. Luego decidir de tu paso.
- Si repites esto, te acercarás a un punto mínimo, las formas como decides la dirección y el paso modifican la vel. a la que te acercas.

+ Algoritmo de región de confianza:
- Ahora para decidir hacia donde y cuánto caminas, dibujas una bolita alrededor tuyo.
- Ahora sólo te importará irte al lugar donde tu aparato saca el número más chico en tu bolita.

- No te puedes parar en cada punto de la bolita. Esto sería muy tardado.

- Entonces con la información de Hess y Grad que te da tu aparato intentas Imaginarte Cómo son los números de tu aparato en la bolita.

- Haces un "modelo" que es como un bowl para tu bolita y das el paso al lugar más profundo de ese bowl en tu bolita

- Haciendo esto y repitiendo, te vas acercando al lugar donde tu aparato saca el número más chiquito. Las formas en las que haces tu bowl, y dibujas la bolita cambian qué tan exitosamente te acercas a un mínimo.

Dem (30 puntos)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$$

$$f(x + \alpha p_k) = \frac{1}{2}(x + \alpha p_k)^T Q(x+\alpha p_k) - \nabla f^T (x + \alpha p_k)$$

Nótese que como $f(x)$ es Cuadrática, su aproximación de Taylor de segundo orden es Exacta $\Rightarrow$

$$f(x+\alpha p_k) = f(x) + \nabla f^T \alpha p_k + \frac{1}{2}\alpha p_k^T Q \alpha p_k$$

$$\min_{\alpha} \; f(\alpha) = f(x) + \nabla f^T \alpha p_k + \frac{1}{2}\alpha^2 p_k^T Q p_k$$

C.P.O

$$f'(\alpha) = 0 \qquad \nabla f^T p_k + \alpha p_k^T Q p_k = 0$$

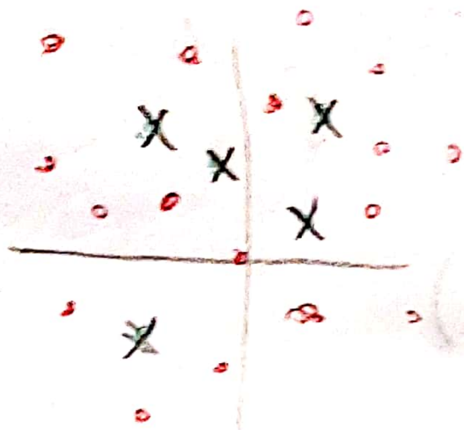
$$\alpha \, p_k^T Q p_k = -\nabla f^T p_k$$

$$\alpha = \frac{-\nabla f^T p_k}{p_k^T Q p_k} \qquad \square$$

8

3. El problema de los cámaras

Tenemos N Cámaras, M Crímenes,
Ambos son conjuntos de puntos en el plano:



¿Cuál es la pos. Óptima de las Cámaras para Cubrir los Crímenes?

→ Enfoque Elegido:

Función Costos: a minimizar

$$\boxed{F(\vec{c}) = \delta \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d(c_i, \underbrace{x_j}_{\text{Crímenes}})^{2} + \sigma \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{M} d(c_i, c_j)^{-2}}$$

En Este caso Se aprecia una menor distancia entre Cámaras y Crímenes y Una Mayor distancia entre Cámaras.

Decidí utilizar esta función, ya que apesar de tener singularidades cuando $c_i = c_j$, $i \neq j$.

Es continua y suave en cualquier otro caso, lo que permite utilizar los algoritmos vistos En clase.

Esto no es cierto para Funciones distintas que pensé como:

$$F(\vec{c}) = \sum_{i=1}^{N} \min_{j} (d(c_i, x_j))$$

ó

$$F(\vec{c}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d(c_i, x_j)^2 \, \mathbb{I}_{\{x_j \in B_\delta(c_j)\}}$$

$$+ C \, \mathbb{I}_{\{x_j \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_\delta(c_j)\}}$$

Ninguna de Estos es Suave

Por otro lado

$$F(\vec{c}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d(c_i, x_j)^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} d(c_i, c_j)^2$$ No es Acotada por Abajo.