Organización y Arquitectura de Computadoras

2912-2

Sistemas numéricos

Edgar Quiroz Castañeda

Fecha de entrega: 15 de febrero del 2019

1. Conversiones

Realiza las siguientes transformaciones

1. $101110011_2 \rightarrow_{16} \rightarrow_{10}$

   - $\rightarrow_{16}$
     Agrupando por grupos de cuatro dígitos, tenemos que

     $$\begin{aligned} 0011_2 &= 3_{16} \\ 0111_2 &= 7_{16} \\ 0001_2 &= 1_{16} \end{aligned}$$

     Por lo que $101110011_2 \rightarrow_{16} 173_{16}$

   - $\rightarrow_{10}$

     $$\begin{aligned} 101110011_2 &= (2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0)_{10} \\ &= (256 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1)_{10} \\ &= 371_{10} \end{aligned}$$

2. $347_8 \rightarrow_2 \rightarrow_{10}$

   - $\rightarrow_2$
     Llevando a cada dígito a su representación binaria de tres dígitos, tenemos que

     $$\begin{aligned} 7_8 &= 111_2 \\ 4_8 &= 100_2 \\ 3_8 &= 011_2 \end{aligned}$$

     Por lo que $347_8 \rightarrow_2 011100111_2$

   - $\rightarrow_{10}$

     $$\begin{aligned} 347_8 &= (3 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0)_{10} \\ &= (3 \times 64 + 4 \times 8 + 7)_{10} \\ &= (192 + 32 + 7) \\ &= 231 \end{aligned}$$

3. $45AF_{16} \rightarrow_8 \rightarrow_{10}$

   - $\rightarrow_8$
     Como paso intermedio, se pasa el número primero a binario.
     Entonces, llevando a cada dígito a su representación binaria de cuatro dígitos, tenemos que

     $$\begin{aligned} 4 &= 0100 \\ 5 &= 0101 \\ A &= 1010 \\ F &= 1111 \end{aligned}$$

Por lo que $45AF_{16} = 0100010110101111_2$.
Luego, agrupando por grupos de tres dígitos,

$$\begin{aligned}
111_2 &= 7_8 \\
101_2 &= 5_8 \\
110_2 &= 6_8 \\
010_2 &= 2_8 \\
100_2 &= 4_8
\end{aligned}$$

Por lo que $45AF_{16} = 0100010110101111_2 = 42657_8$

- $\rightarrow_{10}$

$$\begin{aligned}
45AF_{16} &= (4 \times 16^3 + 5 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0)_{10} \\
&= (4 \times 4096 + 5 \times 256 + 10 \times 16 + 15)_{10} \\
&= (16384 + 1280 + 160 + 15)_{10} \\
&= 17839_{10}
\end{aligned}$$

2. Números negativos

Transforma los siguientes números a su representaciones en signo y magnitud, complemento a 1, complemento a 2 y exceso a 128.

1. 87
   Primero, hay que obtener la representación binaria

$$\begin{aligned}
87 &= 43 \times 2 + 1 \\
43 &= 21 \times 2 + 1 \\
21 &= 10 \times 2 + 1 \\
10 &= 5 \times 2 + 0 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 2 \times 1 + 0 \\
1 &= 0 \times 0 + 1
\end{aligned}$$

   Por lo que $87_{10} = 1010111_2$.
   Las representaciones son

   - Signo y magnitud
     Sólo hay que agregar un bit para el signo.
     $$r = 01010111$$
   - Complemento a 1 y 2
     Como el número es positivo, entonces ya está en su forma de complemento a 1 y 2.
     $$r = 1010111$$
   - Exceso a 128
     $$r_{10} = 87 + 128 = 215$$
     Ahora hay que pasar eso a binario

$$\begin{aligned}
215 &= 107 \times 2 + 1 \\
107 &= 53 \times 2 + 1 \\
53 &= 26 \times 2 + 1 \\
26 &= 13 \times 2 + 1 \\
13 &= 6 \times 2 + 1 \\
6 &= 3 \times 2 + 0 \\
3 &= 1 \times 2 + 1 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}$$

Entonces

$$r = 11011111$$

2. -34
   Primero hay que pasar el número sin signo a binario.

$$\begin{aligned}
34 &= 17 \times 2 + 0 \\
17 &= 8 \times 2 + 1 \\
8 &= 4 \times 2 + 0 \\
4 &= 2 \times 2 + 0 \\
2 &= 2 \times 1 + 0 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}$$

   Por lo que $34_{10} = 100010_2$ Las representaciones son

   - Signo y magnitud
     Sólo hay que agregar un bit para el signo.

$$r = 11010111$$

   - Complemento a 1
     Como el número es negativo, hay invertir sus dígitos para obtener su complemento.

$$r = 0101000$$

   - Complemento a 2
     Como el número es negativo, hay que encontrar su primer 1 desde la derecha e invertir todos los dígitos desde ese punto para obtener su complemento. Como su primer dígito desde la derecha es 1, entonces esto es lo mismo que invertir todos sus dígitos.

$$r = 0101000$$

   - Exceso a 128

$$r_{10} = -34 + 128 = 94$$

     Ahora hay que pasar eso a binario

$$\begin{aligned}
94 &= 47 \times 2 + 0 \\
47 &= 23 \times 2 + 1 \\
23 &= 11 \times 2 + 1 \\
11 &= 5 \times 2 + 1 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}$$

     Entonces

$$r = 1011110$$

3. 21
   Primero, hay que obtener la representación binaria

$$\begin{aligned}
21 &= 10 \times 2 + 1 \\
10 &= 5 \times 2 + 0 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}$$

   Por lo que $21_{10} = 10101_2$.
   Las representaciones son

   - Signo y magnitud
     Sólo hay que agregar un bit para el signo.

$$r = 010101$$

- Complemento a 1 y 2
  Como el número es positivo, entonces ya está en su forma de complemento a 1 y 2.

  $$r = 10101$$

- Exceso a 128

  $$r_{10} = 21 + 128 = 139$$

  Ahora hay que pasar eso a binario

  $$\begin{aligned}
  139 &= 69 \times 2 + 1 \\
  69 &= 34 \times 2 + 1 \\
  34 &= 19 \times 2 + 0 \\
  19 &= 9 \times 2 + 1 \\
  9 &= 4 \times 2 + 1 \\
  4 &= 2 \times 2 + 0 \\
  2 &= 1 \times 2 + 0 \\
  1 &= 0 \times 2 + 1
  \end{aligned}$$

  Entonces

  $$r = 10011011$$

4. -53
   Primero hay que pasar el número sin signo a binario.

   $$\begin{aligned}
   53 &= 26 \times 2 + 1 \\
   26 &= 13 \times 2 + 0 \\
   13 &= 6 \times 2 + 1 \\
   6 &= 3 \times 2 + 0 \\
   3 &= 1 \times 2 + 1 \\
   1 &= 0 \times 2 + 1
   \end{aligned}$$

   Por lo que $53_{10} = 110101_2$.
   Las representaciones son

   - Signo y magnitud
     Sólo hay que agregar un bit para el signo.

     $$r = 1110101$$

   - Complemento a 1
     Como el número es negativo, hay invertir sus dígitos para obtener su complemento.

     $$r = 001010$$

   - Complemento a 2
     Como el número es negativo, hay que encontrar su primer 1 desde la derecha e invertir todos los dígitos desde ese punto para obtener su complemento. Como su primer dígito desde la derecha es 1, entonces esto es lo mismo que invertir todos sus dígitos.

     $$r = 001010$$

   - Exceso a 128

     $$r_{10} = -53 + 128 = 75$$

     Ahora hay que pasar eso a binario

     $$\begin{aligned}
     75 &= 37 \times 2 + 1 \\
     37 &= 18 \times 2 + 1 \\
     18 &= 9 \times 2 + 0 \\
     9 &= 4 \times 2 + 1 \\
     4 &= 2 \times 2 + 0 \\
     2 &= 1 \times 2 + 0 \\
     1 &= 0 \times 2 + 1
     \end{aligned}$$

Entonces

$$r = 1001011$$

3. Números de punto flotante

1. Obtén los 32 bits a partir de número 12.358
   Primero hay que pasar la parte entera a binario

$$\begin{aligned} 12 &= 6 \times 2 + 0 \\ 6 &= 3 \times 2 + 0 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1 \\ 1 &= 0 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

   Por lo que $12_{10} = 1100_2$.
   Ahora hay que pasar la parte decimal a binario. Por simplicidad, hay que aproximarlo sólo a 5 decimales.

$$\begin{aligned} 0{,}358 \times 2 &= 0{,}716 \\ 0{,}716 \times 2 &= 1{,}432 \\ 0{,}432 \times 2 &= 0{,}864 \\ 0{,}864 \times 2 &= 1{,}728 \\ 0{,}728 \times 2 &= 1{,}456 \end{aligned}$$

   Por lo que $12{,}458_{10} \approx 1100{,}01011_2 = 1{,}10001011_2 \times 2^3$.
   Luego, hay que encontrar el valor en binario del exponente con exceso a 127.

$$\begin{aligned} 3 + 127 = 130 & \\ 130 &= 65 \times 2 + 0 \\ 65 &= 32 \times 2 + 1 \\ 32 &= 16 \times 2 + 0 \\ 16 &= 8 \times 2 + 0 \\ 8 &= 4 \times 2 + 0 \\ 4 &= 2 \times 2 + 0 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \\ 1 &= 0 \times 2 + 1 \end{aligned}$$

   Por lo que $130_{10} = 10000010_2$
   Y como es potivo, el bit del signo es 0.
   Por lo que la representación en 32 bits es

$$r = {\color{red}0}{\color{green}10000010}{\color{blue}10001011000000000000000}$$

2. Obtén los 32 bits a partir de número 0.1592
   Hay que pasar la parte decimal a binario. Por simplicidad, hay que aproximarlo sólo a 5 decimales.

$$\begin{aligned} 0{,}1592 \times 2 &= 0{,}3184 \\ 0{,}3184 \times 2 &= 0{,}6368 \\ 0{,}6368 \times 2 &= 1{,}2736 \\ 0{,}2736 \times 2 &= 0{,}5472 \\ 0{,}5472 \times 2 &= 1{,}0{,}944 \end{aligned}$$

   Por lo que $0{,}1592_{10} \approx 0{,}00101_2 = 1{,}01_2 \times 2^{-3}$.

Luego, hay que encontrar el valor en binario del exponente con exceso a 127.

$$
\begin{aligned}
-3 + 127 &= 124 \\
124 &= 62 \times 2 + 0 \\
62 &= 31 \times 2 + 0 \\
31 &= 15 \times 2 + 1 \\
15 &= 7 \times 2 + 1 \\
7 &= 3 \times 2 + 1 \\
3 &= 1 \times 2 + 1 \\
1 &= 0 \times 2 + 1
\end{aligned}
$$

Por lo que $124_{10} = 1111100_2$
Y como es positivo, el bit del signo es 0.
Por lo que la representación en 32 bits es

$$r = \color{red}{0}\color{green}{01111100}\color{blue}{01000000000000000000000}$$

3. Encuentra el número decimal a partir de 01000010010011001101001010001001
Como el primer dígito es 0, es positivo. Como la mantisa es 10000100, entonces el exponente es $10000100_2 - 127_{10} = (132 - 127)_{10} = 5_{10}$.
Por lo que el número es

$$1{,}10011001101001010001001 \times 2^5 = 110011{,}001101001010001001$$

Y esto en decimal es

$$
\begin{aligned}
&= 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-9} + 2^{-11} + 2^{-15} + 2^{-18} \\
&= 32 + 16 + 2 + 1 + 0{,}125 + 0{,}625 + 0{,}015625 + 0{,}001953125 \\
&+ 0{,}00048828125 + 0{,}000030517578125 + 0{,}000003814697265625 \\
&= 51{,}205600738525390625
\end{aligned}
$$

4. Encuentra el número decimal a partir de 0xbefbda51.
Hay que pasar el número a binario, agrupando por grupos de 4 dígitos.

$$
\begin{aligned}
b &= 1011 \\
e &= 1110 \\
f &= 1111 \\
b &= 1011 \\
d &= 1101 \\
a &= 1010 \\
5 &= 0101 \\
1 &= 0001
\end{aligned}
$$

Por lo que 0xbefbda51 = 10111110111110111101101001010001.
Como el primer dígito es 1, es negativo. Como la mantisa es 01111101, entonces el exponente es $01111101_2 - 127_{10} = (125 - 127)_{10} = -2_{10}$.
Por lo que el número es

$$-1{,}11110111101101001010001 \times 2^{-2} = -0{,}0111110111101101001010001$$

Que en decimal es

$$
\begin{aligned}
&= -(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-13} + 2^{-14} + 2^{-16} + 2^{-19} + 2^{-21} + 2^{-25}) \\
&= -(0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 + 0{,}03125 + 0{,}015625 + 0{,}00390625 + 0{,}001953125 + 0{,}0009765625 \\
&+ 0{,}00048828125 + 0{,}0001220703125 + 0{,}00006103515625 + 0{,}0000152587890625 \\
&+ 0{,}0000019073486328125 + 0{,}000000476837158203125 + 0{,}00000002980232238769531250) \\
&= -0{,}4918999969959259033203125
\end{aligned}
$$