Cursos de Estatística, Informática, Ciências de Informação Geográfica

ALGA, Ficha 1-1
Método de Gauss.

Forma escalonada (forma escada) da matriz:

1. *Todas as linhas não nulas estão acima das linhas nulas.*

2. *Cada elemento pivot a partir da segunda linha está a direita do pivot da linha antecedente.*

3. *Todos elementos da coluna em baixo do pivot são nulos.*

Forma escalonada reduzida é forma escalonada em que todos os pivots são nulos e todos os elementos da coluna em sima dos pivot são nulos.

Método de Gauss:

1. *Usando transformações elementares das linhas transformar a matriz correspondente ao sistema dado para forma escalonada.*

2. *Se ultima linha não nula tem pivot na ultima coluna então sistema é incompativel.*

3. *Se cada coluna excepto a última tem pivot então sistema tem única solução. Neste caso para obter solução é preciso transformar matriz à forma escalonada reduzida e escrever o sistema correspondente.*

4. *Se última coluna não tem pivot e existe pelo menos uma outra coluna alem de última que tambem não contem pivot, então o sistema tem infinidade das soluções . Para obter solução geral é preciso transformar matriz à forma escalonada reduzida e escrever o sistema correspondente. Depois atribuimos os valores paramétricos para incógnitas cujas colunas respectivas não têm pivots e expressamos as outras incógnitas atravez destes parámetros.*

Exercicios:

1. Determine quais das matrizes tem forma escalonada reduzida e quais so forma escalonada:

$$\text{a)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{c)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{d)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{f)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{g)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{d)}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Resolva sistemas usando transformação à forma escalonada:

a) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 4 \\ -2x_1 - 9x_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = -6 \\ 5x_1 + 7x_2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 9x_2 = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x_2 = 6 \\ x_1 - 6x_2 = 3 \end{cases}$

3. Transforme matriz dada para forma escalonada reduzida:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Transforme os sitemas dados para forma matricial e resolve-los usando método de Gauss:

a) $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = -3 \\ x_3 + 3x_4 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 7x_4 = -5 \end{cases}$

5. Ache soluções gerais dos sistemas qujas matrizes tem forma:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Seja que as matrizes seguintes correspondem aos sistemas lineares onde $\bullet$ representa o número não nulo e $*$ é qualquer numero real. Determine se sistemas são compatíveis. Caso *sim* determine se solução é única.

a) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}$

7. Determine os valores de h para que sistema correspondente seja compativel:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & h & -2 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & h \end{bmatrix}$

8. Determine os valores de h e k para que sistema a) seja incompativel, b) tenha única solução , c) tenha várias soluções :

a) $\begin{cases} x_1 + hx_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + hx_2 = k \end{cases}$

9. Resolva o sistema dado e verifique se existe a solução em que $u = 0$:

$$\begin{cases} x - y + 2z - u = 1 \\ -2x + y + z + 3u = -2 \\ -x - y + 3z + 2u = -2 \\ x - 2y + 5z + u = -1 \end{cases}$$

10. Encontre a operação elementar que transforma a primeira matriz para a segunda e depois encontre a operação inversa que transforma a segunda para a primeira:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

11. Nos exercícios a)-d) determine se os sitemas dados tem soluções não nulas. Justifique a sua resposta:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

12. Nos exercícios seguintes escreva as soluções dos sitemas dados:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0 \\ - 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

13. Escreva e compare os conjuntos das soluções de $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$ e de $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$.

14. Escreva e compare os conjuntos das soluções de $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0$ e de $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -2$.