אלגוריתמים תרגיל 9

ערד זולטי

14 בינואר 2018

שאלה 1

סעיף א

הסבר האלגוריתם:

אשתמש באלגוריתם של בלמנן־פורד.
אניח שבמצב נתון במהלך האלגוריתם נקבל את ה $d[v]$ הנתונים לנו.
כעת, כמו באלגוריתם, אבצע בדיקה להקלה על הקשתות הנתונות.
כפי שהוכחנו בתרגול, האלגוריתם מקיים את "תכונת החסם העליון". כלומר, תמיד $d[v]$ יהיה גדול מהמסלול הקצר ביותר מ s אליו. וכאשר הוא יהיה שווה למרחק הזה הוא לא ישתנה.
ולכן כאשר נבצע את בדיקת ההקלה. אם נצטרך לבצע הקלה על הקשתות, אז מתכונת החסם העליון נקבל שה $d[v]$ הנתונים לא היו נכונים.
לאחר מכן, נבצע בדיקה לתקינות ה $d[v]$ הנתונים.
לאחר שבדקנו האם צריך לבצע הקלה,
אנו יודעים $\forall v,u \in V \ when \ (u,v) \in E : d[v] \leq d[u] + W((u,v))$.
ולכן נותר לבדוק האם קיבלנו $d[v]$ הקטנים מהמסלול האמיתי. לכן נבדוק האם מתקיים $\forall v \in V \ \exists u \in V when \ (u,v) \in E : d[v] = d[u] + W((u,v))$.
כלומר האם קיים קודקוד u, שניתן להגיע ממנו ל v. כך שהמסלול מ s ל v הוא המסלול מ s ל u עם הקשת של u ו v.
מכיוון שהמסלול מ s ל v, חייב לעבור בקודקוד מראש.
ואחרת נקבל שה $d[v]$ הנתונים שגויים.

פסודו קוד:

for each $(u,v) \in E$:
    if $d[v] > d[u] + W((u,v))$:
        return false

for each $v \in V$:
    flag = false
    for each u which (u,v) inE:
        if $d[v] == d[u] + W((u,v))$:
            flag = true
            break
    if !flag:
        return false
return true

הוכחת נכונות:

באלגוריתם, אבצע בדיקה להקלה על הקשתות הנתונות.
כפי שהוכחנו בתרגול, האלגוריתם מקיים את "תכונת החסם העליון". כלומר, תמיד $d[v]$ יהיה גדול מהמסלול הקצר ביותר מ s אליו. וכאשר הוא יהיה שווה למרחק הזה הוא לא ישתנה.
ולכן כאשר נבצע את בדיקת ההקלה. אם נצטרך לבצע הקלה על הקשתות, אז מתכונת החסם העליון נקבל שה $d[v]$ הנתונים לא היו נכונים.
לאחר מכן, נבצע בדיקה לתקינות ה $d[v]$ הנתונים.
לאחר שבדקנו האם צריך לבצע הקלה,
אנו יודעים $\forall v, u \in V \ when \ (u, v) \in E : d[v] \leq d[u] + W((u, v))$.
ולכן נותר לבדוק האם קיבלנו $d[v]$ הקטנים מהמסלול האמיתי. לכן נבדוק האם מתקיים $\forall v \in V \ \exists u \in V when \ (u, v) \in E : d[v] = d[u] + W((u, v))$.
נניח שקיבלנו $d[v]$ תקינים.
כלומר, לכל v נקבל ש $d[v]$ הוא המרחק הקצר ביותר מ s ל v.
ולכן כמובן, שלכל v קיים u כך ש $d[v] = d[u] + W((u, v))$. מכיוון שלכל קודקוד, מגיעים מקודקוד כלשהו.
כעת, נניח שקיבלנו $d[v]$ לא תקינים.
מכיוון שבדקנו את ביצוע ההקלה, אנו יודעים ש $d[v] \leq d[u] + W((u, v))$.
ולכן קיים v כך שלכל u כך ש $(u, v) \in E$, מתקיים ש $d[v] < d[u] + W((u, v))$.
כי אחרת, ה $d[v]$ היו תקינים.
ולכן עבור ה v הזה, כאשר נבדוק את התנאי $d[v] == d[u] + W((u, v))$ לעולם לא נאשר אותו. ולכן נחזיר, שה $d[v]$ אינם תקינים.

ניתוח סיבוכיות מקום וזמן ריצה:

מקום

נשים לב שאנו כעקרון לא משתמשים במקום נוסף.
אבל נשים לב, שכאשר אנו מחפשים את כל הקודקודים הנכנסים לקודקוד v. לצורך פשטות ניתן ליצור את הגרף ההפוך מ G. כך שקיימים אותם הקודקודים כמו ב G, והקשתות ההפוכות.
ובכך יהיה קל למצוא את הקודקודים הללו, הנכנסים ל v.
ולכן נשתמש במקרה הגרוע בסיבוכיות מקום של $O(|E|)$.

זמן

בהתחלה אנו עוברים על כל הקשתות. ולוקח $O(|E|)$.
לאחר מכן עוברים על כל הקודקודים, ועל כל הקשתות הנכנסות לכל הקודקודים. וזה לוקח $O(|V| + |E|)$.

שאלה 1

סעיף ב

הסבר האלגוריתם:

נשים לב שאנו מקבלים גרף של המסלולים הקצרים ביותר.
תחילה נבדוק שהוא אכן עץ. אחרת נחזיר $false$.
לאחר מכן נבנה את העץ מסלולים שלנו. כלומר מכל קודקוד v, תיהיה רשימה של כל הקודקודים שהוא מוביל אליהם. כלומר כל הקודקודים, שקודם הצביעו ל v. כך ש s הוא שורשו של העץ.
כעת, ניתן לחשב בעזרת DFS את המרחקים המינימלים מ s לכל שאר הקודקודים.
וכעת נפעיל את האלגוריתם מסעיף א, לבדיקה של המרחקים, ונחזיר את תשובתו.

פסודו קוד:

1. נבנה את העץ מסלולים שלנו. כך ש s הוא שורשו, וכל קודקוד מכיל רשימה של בניו.
2. נבדוק שאכן הוא עץ, ע"י ריצת DFS.
3. אם הוא אינו עץ, כלומר יש לו מעגל, נחזיר $false$.
4. נרוץ מ s בעזרת DFS, ונחשב את המרחק מ s אליהם.
5. נפעיל את האלגוריתם מסעיף א, ונחזיר את תשובותו.

הוכחת נכונות:

נשים לב שאם נקבל גרף שהוא עץ, כמובן שנוכל לקבל את המרחקים מ s לשאר הקודקודים.
ומנכונות האלגוריתם מסעיף א, נקבל שנחזיר את התשובה הנכונה.

ניתוח סיבוכיות מקום וזמן ריצה:

מקום

אנו יוצרים את העץ שלנו. שהוא שומר בדיוק $|V|-1$ קשתות. וגם שומרים בכל קודקוד את המרחק שלו מ s.
ולכן אנו משתמשים ב $O(|V|)$ מקום.
נשים לב שהאלגוריתם מסעיף א, משתמש לכל היותר ב $O(|E|)$ מקום.
ולכן בסה"כ אני משתמש ב $O(|V|+|E|)$ מקום.

זמן

יצירת עץ המסלולים שלנו לוקחת $O(|V|)$ זמן. נבדוק שאכן הוא עץ, וגם שמירת מרחקי המסלולים מ s לוקח $O(|V|+|E|)$ זמן.
האלגוריתם מסעיף א, גם הוא לוקח $O(|V|+|E|)$ זמן.
ולכן בסה"כ זמן ריצת האלגוריתם הינה $O(|V|+|E|)$ זמן.