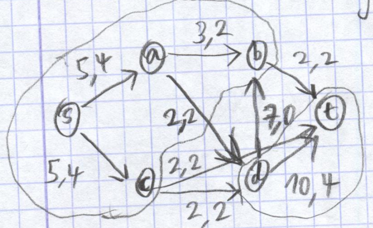
אורי ברודה
308043447

אלגוריתמים - תרגיל 8

1. א. נסמן את הקודקודים בגרף ב- a,b,c,d בצורה הבאה:



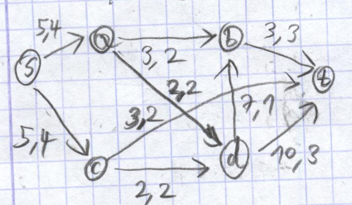
ונתבונן בחתך $(\{s,a,b,c\},\{d,t\})$. מתקיים:

$$C(\{s,a,b,c\},\{d,t\}) = \sum_{(u,v)\in\{s,a,b,c\}\times\{d,t\}} c(u,v) = 2+2+2+2=8$$

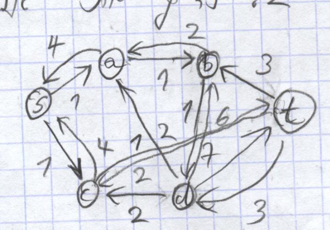
$$|f| = \sum_{u:(s,u)\in E} f(s,u) - \sum_{u:(u,s)\in E} f(u,s) = 4+4-0 = 8$$

כלומר מצאנו זרימה f וחתך (S,T) כך ש: $|f|=c(S,T)$
אז ממסקנה מהתרגול f זרימה מקסימלית.

2. נריץ את אלגוריתם Ford Fulkerson:

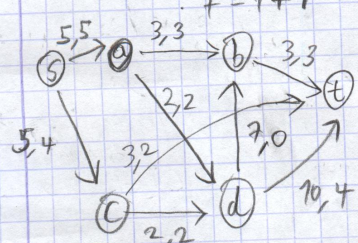


רשת שיורית G_f

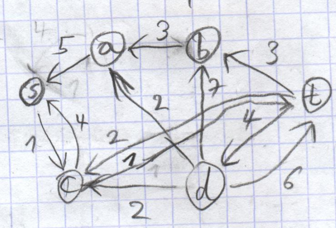


אז המסילה המשופרת שלנו תהיה: $s\to a\to b\to d\to t$

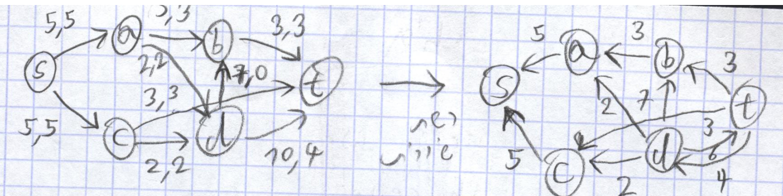
$\Leftarrow 1 = \Delta_p = \min_{e\in p}\{c_f(e)\}$ $\quad f=f+1$



רשת שיורית



אז המסילה המשופרת היא: $s\to c\to t$, $f=f+1$



כעת אין ברשת השיורית מסילה מ-s ל-t כיוון ש-s הוא קודקוד בודד ברשת זו ולכן האלגוריתם "עצר", קיבלנו $|f|=5+5=10$
וזו אכן הזרימה בעלת השטף המקסימלי (החתך מהסעיף הקודם מקיים $|f| = C(S,T) = 3+3+2+2 = 10$ ולכן מהמסקנה מהתרגול זו הזרימה המקסימלית)

2. נסמן את הצלעות שמבטיחות את קשירות הגרף G ב- $C(G)$.

<u>האלגוריתם</u>:

נמיר את הגרף הלא מכוון הנתון לגרף מכוון כך שעבור כל צלע מקורית ב-G (u,v) נפצל אותה ל-2 צלעות מכוונות: (u,v), (v,u). נגדיר קיבול 1 לכל צלע.
ניקח קודקוד כלשהו ונקרא לו s. עבור שאר קודקודי הגרף $t\in V\setminus s$ נמצא את הקיבול של החתך המינימלי (למשל ע"י הרצת EK) ברשת הזרימה כך ש-t הוא קודקוד הבור בה. נסמן את הקיבול ב-$h(t)$. <u>טענה</u>: $C(G)=\min_{t'\neq s} h(t')$

<u>הוכחה</u>: נראה שמתקיים $C(G)\geq \min_{t\neq s} h(t)$. מהגדרת $C(G)$, קיימות $|C(G)|$ צלעות בגרף המקורי שכשנסיר אותן נקבל גרף לא קשיר. נסיק שע"י הסרת שני הכיוונים של כל הצלעות ברשת הזרימה נקבל רשת זרימה לא קשירה. נסמן:

$S=\{v\in V \mid$ v באותו רכיב קשירות כמו $s\}$

T מוגדר להיות $V\setminus S$, נבחר $t\in T$ כלשהו. הקיבול $h(t)$ של החתך (S,T) ברשת הזרימה שהבור שלה הוא t חייב להיות לכל היותר $C(G)$. בסה"כ נקבל: $\min_{t'\neq s} h(t')\leq h(t)\leq k=C(G)$

נשאר להראות שלכל $t\neq s$ הקיבול של כל חתך (S,T) ברשת הזרימה שהבור שלה הוא t, הוא לפחות $C(G)$ ואז נקבל את הדרוש בטענה.

בגלל שהקיבול של כל הצלעות הוא 1 אז הקיבול של (S,T)
הוא בדיוק מספר הצלעות מ-S ל-T. אם נסיר את כל
הצלעות הלא מכוונות של החתך בגרף המקורי נקבל גרף לא קשיר,
לכן $C(S,T) \geq C(G)$. נסמן את החתך המינימאלי שתואם
לכל $t^* \in \min_{t' \neq s} h(t')$ ע"י (S^*,T^*), נקבל:

$$\min_{t' \neq s} h(t') = h(t^*) = C(S^*,T^*) \geq k = C(G)$$

כנדרש.

<u>זמן ריצה:</u>

אנו נדרשים למצוא לכל היותר $O(|V|)$ חתכים מינימליים ברשתות זרימה
עם $|V|$ קודקודים ו- $2|E|$ צלעות. לכן זמן הריצה הוא $O(|V|^2|E|^2)$,

3. נבנה רשת זרימה בצורה הבאה: נסמן:

יהיו s,t קודקודים.

$$E' = \{(s,l) \mid l \in L\}$$
$$E'' = \{(r,t) \mid r \in R\} \qquad V_N = \{s\} \cup L \cup R \cup \{t\}$$
$$E_N = E' \cup \vec{E} \cup E''$$

צלעות מכוונות של הגרף המקורי

נגדיר $c(e)=1$ לכל $e \in E_N$, אז $\{V_N, E_N, s, t, c\}$
היא רשת זרימה בגרף. מכיוון שבגרף המקורי הדו"צ, יש
לכל קודקוד בדיוק d קשתות שיוצאות ממנו מתקיים
$d \cdot |L| = d \cdot |R| \iff |L| = |R|$.

ונתבונן בחתך הבא: $(S,T) = (\{s, |L|-m, |R|-k\}, \{t, m, k\})$ עבור $m,k \in \mathbb{N}$.

מכיוון ש: $|E'| = |L| = |R| = |E''|$ נקבל שיש m צלעות
שמחברות בין המקור s ל-m קודקודים ב-T ואלו צלעות בחתך.
בנוסף יש $|R|-k$ צלעות שמחברות בין קודקודים ב-R והבור t
וגם אלו צלעות בחתך. בנוסף "תפסנו" צלעות ב-$\vec{E}$ שהן צלעות בחתך,
כלומר $C(S,T) \geq m + |R| - k$. אם $m \geq k$ נקבל
$C(S,T) \geq |R| = |L|$ ואז ממשפט השטף והחתך קיים חתך מינימאלי
עבורו מתקיים $C(S,T) = |L|$ ואז קיימת זרימה חוקית $f: E \to \mathbb{R}$
שמקיימת $\sum_{e \in E'} c(e) = |f| = |L|$ ובאות מבניית E', כלומר f מקסימאלית.

אם $k>m$ ונתבונן בקבוצה $L'=L\cap S$ אז מ-L' יוצאות $(|L|-m)d$ קשתות ולקבוצה $R'=R\cap S$ נכנסות $(|R|-k)d$ קשתות

כלומר מ-L' יוצאות $(|L|-m)d-(|R|-k)d \underset{|R|=|L|}{=} (k-m)d$ קשתות

יותר מאלו שנכנסות ל-R' אז יש לפחות עוד $(k-m)d$ קשתות בחתך ולכן מתקיים:

$$C(S,T)\geq |R|+m-k+(k-m)d = |L|+(k-m)(d-1) \underset{\substack{G \text{ לא ריק} \Leftrightarrow d\geq 1 \\ k>m \text{ הנחנו } +}}{\geq} |L|$$

ולכן גם במקרה זה קיים חתך מינימאלי וקיימת זרימה חוקית f כך ש: $|f|=C(S,T)$.

נתבונן בחתך $(S,T)=(\{s\}, V_N\setminus\{s\})$. במקרה זה מ-$\{s\}$ יוצאות $|L|$ קשתות לקבוצה $L\subset T$ ואלו קשתות בחתך ולכן $C(S,T)=|L|$.

כלומר עבור כל חלוקה של קודקודי הגרף לקבוצות זרות נוכל למצוא חתך שקיבולו מינימאלי וזהה לשטף הזרימה החוקית המקסימאלית ממשפט השטף והחתך. נתבונן בזרימה זו שנסמנה f^* אז $|f^*|=|L|$ ומחוק שימור החומר ובנ"ת רשת הזרימה מתקיים:

$$|L| = \sum_{l:(s,l)\in E'} f^*(s,l) = \sum_{r:(l,r)\in\vec{E}} f^*(l,r) = d\cdot|L|$$

כלומר $d=1$ אזי לכל קודקוד ב-L יש שכן אחד ברשת הזרימה שלנו.

נניח בשלילה שקיימת קשת $\vec{(l',r')}\in\vec{E}$ כך ש: $f^*(l',r')\neq 1$.

אם $f^*(l',r')=0$ אז נקבל: $|L| = \sum_{r:(l,r)\in\vec{E}} f^*(l,r) = \sum_{r:(l,r)\in\vec{E}\setminus\{(l',r')\}} f^*(l,r)+\underbrace{f^*(l',r')}_{=0} < |L|$

בסתירה, ואם $f^*(l',r')>1$ נקבל סתירה לחוק הקיבול: $c(l',r')=1$.

בהינתן ש-$|R|=|L|$, נקבל את אותן תוצאות באופן סימטרי עבור צלעות שנכנסות ל-R, מאילוצי הקיבול וחוק שימור החומר של f^*.

כלומר f^* מצמידה בדיוק 1 דרך כל קודקוד ב-R וב-L, ומפני ש-$|L|=|R|$ נקבל התאמה חח"ע ועל בין קודקודי הגרף הדו"צ, כלומר זוהי התאמה מושלמת.

4. נייצור רשת זרימה כך שכל קבוצה S_i , $1\le i\le k$,
תיוצג ע"י קודקוד וגם כל מדריך g_j $1\le j\le n$
ייוצג ע"י קודקוד, ונוסיף קודקוד s וקודקוד t.
נחבר צלעות מקודקוד s לכל קודקוד S_i ונגדיר את
קיבול הצלעות האלו להיות s_i לכל צלע (s,S_i).
נחבר צלעות מכל קודקוד S_i לכל קודקוד שמייצג את המדריך
g_j שדובר את השפה i, ונגדיר את הקיבול על (S_i,g_j)
להיות ∞. נחבר את הצלעות מכל קודקוד g_j לקודקוד t
ונגדיר את הקיבול עליהן להיות c_j.
נטען שחלוקה של התיירים לקבוצות הדרכה כמתואר בשאלה חוקית
אמ"מ שטף הזרימה המקסימלית הוא $\sum_{i=1}^{k} s_i$.

$\Rightarrow$ נניח שקיימת זרימה כזו עם שטף $\sum_{i=1}^{k} s_i$ ונסמן את הזרימה
עם ערכים שלמים ב-f. לכל מדריך g_j נתאים $f(S_i,g_j)$
אנשים מכל קבוצה S_i. בגלל שיש צלע בין S_i לבין g_j
אמ"מ המדריך g_j דובר את השפה i אז אנחנו מתאימים
ל-g_j רק תיירים שדוברים את שפתו. מחק"ש $\sum_{i=1}^{k} f(S_i,g_j)=$
$= f(g_j,t)\le c_j$

ולכן מספר התיירים שהתאמנו לכל מדריך לא עולה על מספר
התיירים שהוא יכול להדריך, מספר התיירים שהתאמנו למדריך מכל קבוצה
S_i הוא $\sum_{j=1}^{k} f(S_i,g_j) = f(s,S_i)$. מכיוון שהשטף הזרימה הזו הוא
סכום הקיבולים של הצלעות שיוצאות מ-s, אנחנו מזרימים בכולן
את מלוא הקיבול ולכן $f(s,S_i)=s_i$ כלומר התאמנו את כל
התיירים למדריכים שדוברים את שפתם ולא חרגנו מהמכסה המותרת.

$\Leftarrow$ נניח שחלוקה כזו קיימת כך שכל מדריך g_j מדריך $t_{i,j}$
תיירים מקבוצה S_i. נבנה את הזרימה f כך:

$$f(S_i,g_j)=t_{i,j} \;,\quad f(g_j,t)=\sum_{i=1}^{k} f(S_i,g_j)=\sum_{i=1}^{k} t_{i,j}\le c_j$$

החלוקה היא חוקית

$$f(s,S_i)=\sum_{j=1}^{n} f(S_i,g_j)=\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}=s_i$$

מההנחה חילקנו מדריך לכל התיירים בקבוצה, לפי הדרישה בשאלה

כלומר קיבלנו שערך הזרימה הוא $\sum_{i=1}^{k} s_i$ ולכן היא מקסימלית, כנדרש.

<u>זמן ריצה</u>: אנחנו בונים רשת זרימה כך ש: $|V|=O(n+k)$
וגם $|E|=O(nk)$. מציאת הזרימה המקסימלית היא באמצעות
אלגוריתם EK שזמן הריצה שלו $O(E^2V)$ ולכן זמן
הריצה הכולל הוא: $\boxed{O(n^2k^2(n+k))}$.