Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 2
Modelli di calcolo e metodologie di analisi

Camil Demetrescu, Irene Finocchi,
Giuseppe F. Italiano

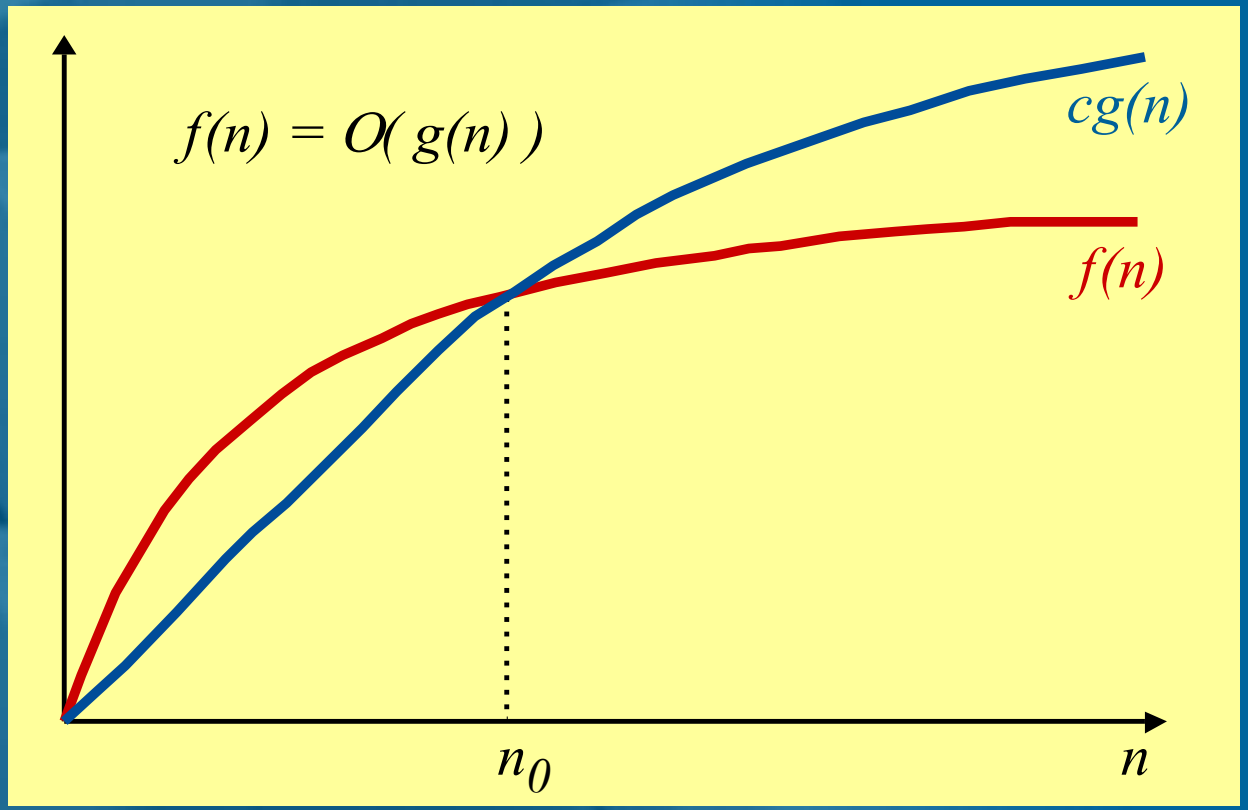
Notazione asintotica

Notazione asintotica

- f(n) = tempo di esecuzione / occupazione di memoria di un algoritmo su input di dimensione n
- La notazione asintotica è un'astrazione utile per descrivere l'ordine di grandezza di f(n) ignorando i dettagli non influenti, come costanti moltiplicative e termini di ordine inferiore

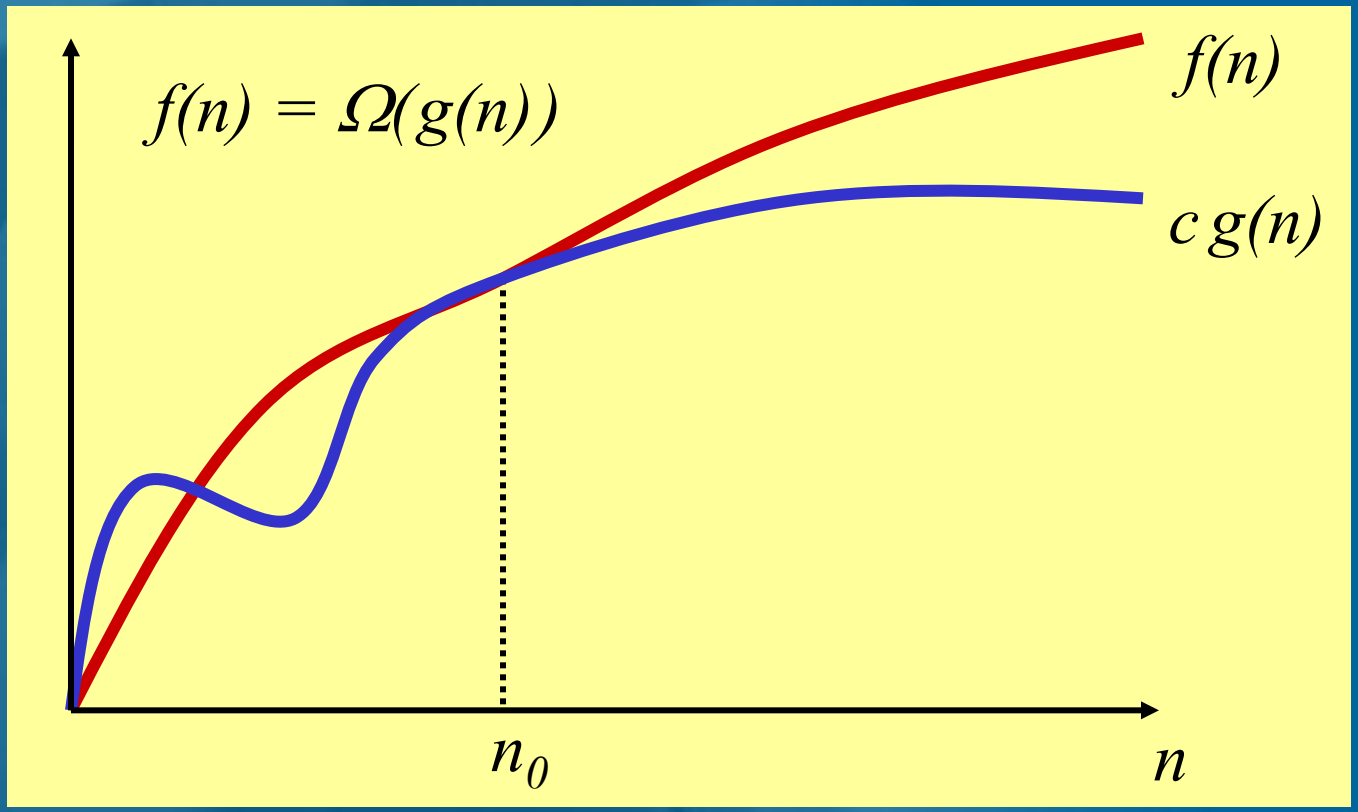
Notazione asintotica O

f(n) = O(g(n)) se ∃ due costanti c>0 e $n_0 \geq 0$ tali che f(n) ≤ c g(n) per ogni $n \geq n_0$



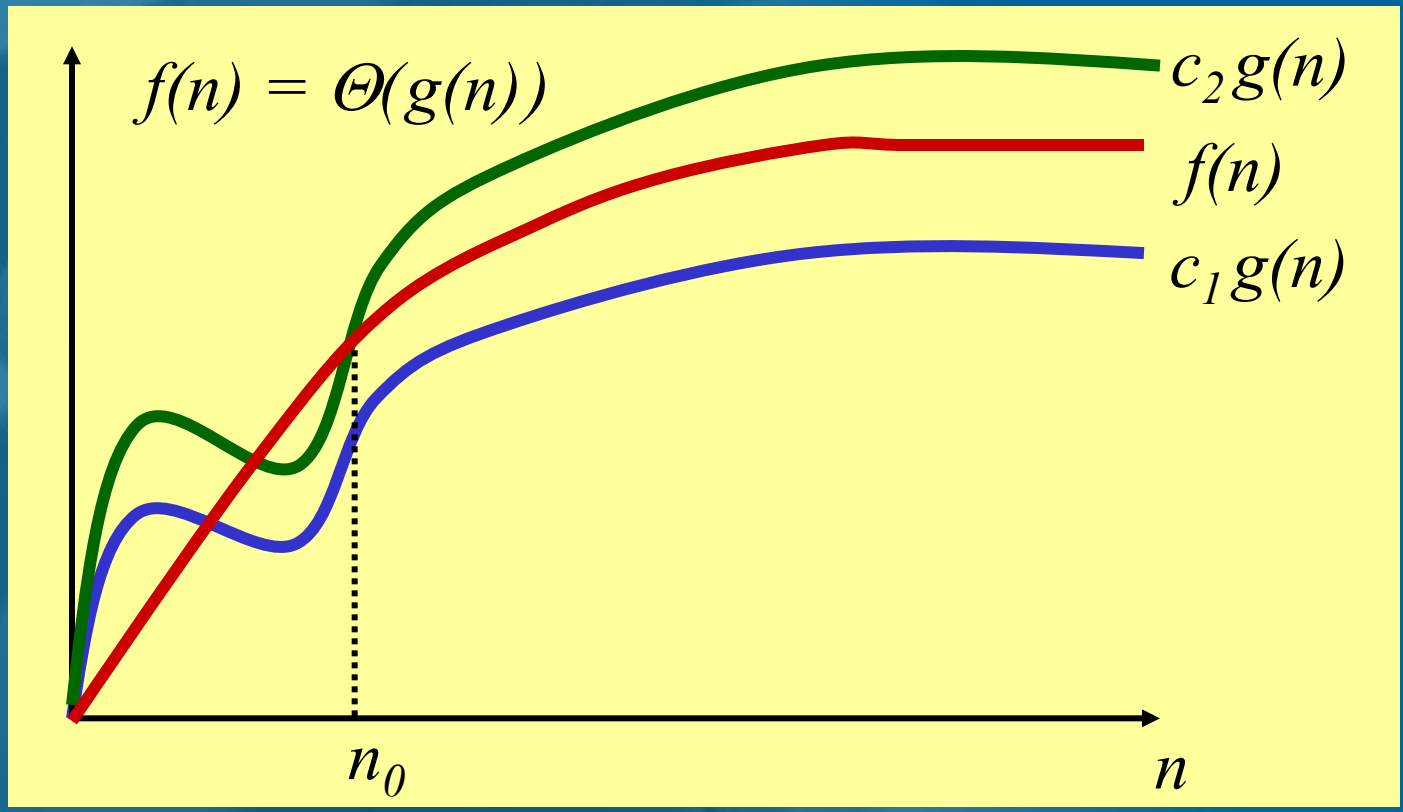
Notazione asintotica Ω

$f(n) = \Omega(g(n))$ se ∃ due costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $f(n) \geq c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Notazione asintotica Θ

$f(n) = \Theta(g(n))$ se $\exists$ tre costanti $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Notazione asintotica: esempi

- Sia $g(n)=3n^2+10$
- $g(n)=O(n^2)$: scegliere $c=4$ e $n_0=10$
- $g(n)=\Omega(n^2)$: scegliere $c=1$ e $n_0=0$
- $g(n)=\Theta(n^2)$: infatti $g(n)= \Theta(f(n))$ se e solo se $g(n)= O(f(n))$ e $g(n)= \Omega(f(n))$
- $g(n)=O(n^3)$ ma $g(n)\neq\Theta(n^3)$

Funzioni polinomiali

Se $g(n)=a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0$, allora
$g(n)=O(n^k)$

Dim:

$g(n) \leq |g(n)| = | a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0| \leq$

$\leq |a_k| n^k+|a_{k-1}| n^{k-1}+\ldots+|a_1| n+|a_0| =$

$= n^k (|a_k|+|a_{k-1}|/n+\ldots+|a_1|/n^{k-1}+|a_0|/n^k) \leq cn^k$

Delimitazioni inferiori e superiori

La notazione asintotica introdotta ci permette di esprimere delimitazioni inferiori e superiori alla complessità di un problema rispetto a una data risorsa di calcolo.

La notazione asintotica O è adatta ad esprimere delimitazioni superiori, mentre la notazione Ω permette di esprimere le delimitazioni inferiori

Upper bound

- Un algoritmo A ha costo di esecuzione O(f(n)) su un'istanza di dimensione n, rispetto a una certa risorsa di calcolo, se la quantità r di risorsa sufficiente per eseguire A su una qualunque istanza di dimensione n verifica la relazione r(n)=O(f(n))

Upper bound di un problema

- Un problema P ha una complessità O(f(n)) rispetto a una data risorsa di calcolo se esiste un algoritmo che risolve P il cui costo di esecuzione rispetto a quella risorsa è O(f(n))

Lower bound

- Un algoritmo A ha costo di esecuzione $\Omega(f(n))$ su un'istanza di ingresso di dimensione n, rispetto a una certa risorsa di calcolo, se la quantità r di risorsa necessaria per eseguire A su una qualunque istanza di dimensione n verifica la relazione $r(n) = \Omega(f(n))$

Lower bound per un problema

Un problema P ha una complessità Ω (f(n)) rispetto a una data risorsa di calcolo se ogni algoritmo che risolve P ha costo di esecuzione Ω(f(n)) rispetto a quella risorsa.

Dato un problema P con complessità Ω (f(n)) rispetto a una data risorsa di calcolo, un algoritmo che risolve P è ottimo se ha costo di esecuzione O(f(n)) rispetto a quella risorsa

Metodi di analisi

Caso peggiore, migliore e medio

- Misureremo le risorse di calcolo usate da un algoritmo (tempo di esecuzione / occupazione di memoria) in funzione della dimensione n delle istanze
- Istanze diverse, a parità di dimensione, potrebbero però richiedere risorse diverse
- Distinguiamo quindi ulteriormente tra analisi nel caso peggiore, migliore e medio

Caso peggiore

- Sia tempo(I) il tempo di esecuzione di un algoritmo sull'istanza I
- $T_{worst}(n) = \max_{\text{istanze I di dimensione n}} \{\text{tempo}(I)\}$
- Intuitivamente, $T_{worst}(n)$ è il tempo di esecuzione sulle istanze di ingresso che comportano più lavoro per l'algoritmo

Caso migliore

- Sia tempo(I) il tempo di esecuzione di un algoritmo sull'istanza I
- $T_{best}(n) = \min_{\text{istanze I di dimensione n}} \{\text{tempo}(I)\}$
- Intuitivamente, $T_{best}(n)$ è il tempo di esecuzione sulle istanze di ingresso che comportano meno lavoro per l'algoritmo

Caso medio

- Sia $\mathcal{P}(I)$ la probabilità di avere in ingresso un'istanza I
- $T_{avg}(n) = \sum_{\text{istanze I di dimensione n}} \{\mathcal{P}(I)\ \text{tempo}(I)\}$
- Intuitivamente, $T_{avg}(n)$ è il tempo di esecuzione nel caso medio, ovvero sulle istanze di ingresso "tipiche" per il problema
- Richiede conoscenza di una distribuzione di probabilità sulle istanze

Esempio 1

Ricerca di un elemento x in una lista $\mathcal{L}$ non ordinata

```
algoritmo ricercaSequenziale(lista L, elem x) → booleano
1.    for each ( y ∈ L ) do
2.        if ( y = x ) then return trovato
3.    return non trovato
```

$T_{best}(n) = 1$ x è in prima posizione

$T_{worst}(n) = n$ $x \notin \mathcal{L}$ oppure è in ultima posizione

$T_{avg}(n) = (n+1)/2$ assumendo che le istanze siano equidistribuite

Esempio 2 (1/2)

Ricerca di un elemento x in un array $\mathcal{L}$ ordinato

```
algoritmo ricercaBinariaIter(array L, elem x) → booleano
1.    a ← 1
2.    b ← lunghezza di L
3.    while ( L[(a + b)/2] ≠ x ) do
4.        m ← (a + b)/2
5.        if ( L[i] > x ) then b ← m − 1
6.        else a ← m + 1
7.        if ( a > b ) then return non trovato
8.    return trovato
```

Confronta x con l'elemento centrale di $\mathcal{L}$ e prosegue nella metà sinistra o destra in base all'esito del confronto

Esempio 2 (2/2)

$T_{best}(n) = 1$ l'elemento centrale è uguale a x

$T_{worst}(n) = \log n$ $x \notin \mathcal{L}$ oppure viene trovato all'ultimo confronto

Poiché la dimensione del sotto-array su cui si procede si dimezza dopo ogni confronto, dopo l'i-esimo confronto il sottoarray di interesse ha dimensione $n/2^i$
Risulta $n/2^i = 1$ per $i=\log_2 n$

$T_{avg}(n) = \log n - 1 + 1/n$ assumendo che le istanze siano equidistribuite

Analisi di algoritmi ricorsivi

Esempio

L'algoritmo di ricerca binaria può essere riscritto ricorsivamente come:

algoritmo `ricercaBinariaRic`$(array\ L,\ elemento\ x) \rightarrow booleano$

1. $n \leftarrow$ lunghezza di L
2. **if** $(\ n = 0\ )$ **then return** non trovato
3. $i \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
4. **else if** $(\ L[i] = x\ )$ **then return** trovato
5. **else if** $(\ L[i] > x\ )$ **then return** `ricercaBinariaRic`$(x, L[1; i-1])$
6. **else return** `ricercaBinariaRic`$(x, L[i+1; n])$

Come analizzarlo?

Equazioni di ricorrenza

Il tempo di esecuzione può essere descritto tramite una equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c + T(\lceil n-1 \rceil/2) & \text{se } n>1 \\ 1 & \text{se } n=1 \end{cases}$$

Vari metodi per risolvere equazioni di ricorrenza: iterazione, sostituzione, teorema Master...

Metodo dell'iterazione

Idea: "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione n del problema iniziale

Esempio: $T(n) = c + T(n/2)$

$T(n/2) = c + T(n/4)$ ...

$T(n) = c + T(n/2) = 2c + T(n/4) =$
$= (\sum_{j=1...i} c) + T(n/2^i) = i\,c + T(n/2^i)$

Per $i=\log_2 n$: $T(n) = c \log n + T(1) = O(\log n)$

Metodo della sostituzione

Idea: "indovinare" una soluzione, ed usare induzione matematica per provare che la soluzione dell'equazione di ricorrenza è effettivamente quella intuita

Esempio: $T(n) = n + T(n/2)$, $T(1)=1$

Assumiamo che la soluzione sia $T(n) \leq c\,n$ per una costante c opportuna

Passo base: $T(1)=1 \leq c\,1$ per ogni c

Passo induttivo: $T(n)= n + T(n/2) \leq n+c\,(n/2) = (c/2+1)\,n$

Quindi $T(n) \leq c\,n$ per $c \geq 2$

Teorema Master

Permette di analizzare algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione n) in a sottoproblemi di dimensione n/b
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia f(n) il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione n. La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ 1 & \text{se } n=1 \end{cases}$$

Teorema Master

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ 1 & \text{se } n=1 \end{cases}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ per $\varepsilon>0$
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ per $\varepsilon>0$ e $a\,f(n/b)\leq c\,f(n)$ per $c<1$ e n sufficientemente grande

Esempi

1) $T(n) = n + 2T(n/2)$

   $a=2,\ b=2,\ f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$ ➡ $T(n)=\Theta(n \log n)$

   (caso 2 del teorema master)

2) $T(n) = c + 3T(n/9)$

   $a=3,\ b=9,\ f(n)=c=O(n^{\log_9 3 - \varepsilon})$ ➡ $T(n)=\Theta(\sqrt{n})$

   (caso 1 del teorema master)

3) $T(n) = n + 3T(n/9)$

   $a=3,\ b=9,\ f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \varepsilon})$

   $3(n/9) \leq c\, n$ per $c=1/3$

   ➡ $T(n)=\Theta(n)$

   (caso 3 del teorema master)

Riepilogo

- Esprimiamo la quantità di una certa risorsa di calcolo (tempo, spazio) usata da un algoritmo in funzione della dimensione n dell'istanza di ingresso
- La notazione asintotica permette di esprimere la quantità di risorsa usata dall'algoritmo in modo sintetico, ignorando dettagli non influenti
- A parità di dimensione n, la quantità di risorsa usata può essere diversa, da cui la necessità di analizzare il caso peggiore o, se possibile, il caso medio
- La quantità di risorsa usata da algoritmi ricorsivi può essere espressa tramite relazioni di ricorrenza, risolvibili tramite vari metodi generali