Relazioni di ricorrenza svolte

10 agosto 2008

1. Risolvere la seguente ricorrenza (supponendo $n = 2^N$):

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + n^2 & n > 1 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned} T(2^N) &= T(2^{N-1}) + 2^{2N} \\ &= T(2^{N-2}) + 2^{2(N-1)} + 2^{2N} \\ &= T(2^{N-3}) + 2^{2(N-2)} + 2^{2(N-1)} + 2^{2N} \\ &= T(2^{N-4}) + 2^{2(N-3)} + 2^{2(N-2)} + 2^{2(N-1)} + 2^{2N} \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &= T(2^{N-N}) + \left(\sum_{i=0}^{N} 2^{2i}\right) - 1 \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha:

$$T(2^{N-N}) = T(2^0) = T(1) = 0$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} 2^{2i} - 1 = \sum_{i=0}^{N} 4^i - 1 &= \frac{4^{N+1} - 1}{3} - 1 = \frac{4^N \cdot 4 - 1}{3} - 1 \\ &= \frac{2^{2N} \cdot 4 - 1 - 3}{3} = \frac{(2^N)^2 \cdot 4 - 4}{3} = \frac{4n^2 - 4}{3} \end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{4n^2 - 4}{3} = \frac{4 - 4}{3} = 0 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 &= \frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 4}{3} + n^2 = \frac{4\frac{n^2}{4} - 4}{3} + n^2 = \\ &= \frac{n^2 - 4}{3} + n^2 = \frac{3n^2 + n^2 - 4}{3} = \frac{4n^2 - 4}{3} \end{aligned}$$

2. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n+2) = T(n) + n \\ T(0) = T(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned}
T(n+2) &= T(n) + n \\
T(n) &= T(n-2) + (n-2) \\
&= T(n-4) + (n-4) + (n-2) \\
&= T(n-6) + (n-6) + (n-4) + (n-2) \\
&= T(n-6) + 3n - 6 - 4 - 2 \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
k = n \ \Rightarrow \ &= T(n-n) + \frac{n}{2}n - 2\sum_{i=1}^{n/2} i \\
&= \frac{n^2}{2} - 2\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - 2n}{4} \\
&= \frac{n^2 - 2n}{4} = \frac{n(n-2)}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^2) \\
k = n-1 \ \Rightarrow \ &= T(n-n+1) + n\frac{n-1}{2} - 2\sum_{i=1}^{(n-1)/2} i \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - 2\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n-1}{2} \\
&= \frac{2n(n-1) - (n-1)^2 - 2(n-1)}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

3. Risolvere la seguente formula ricorsiva (supponendo n potenza di α):

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{\alpha}) + 1 & n \geq 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = \alpha^N$ si ha:

$$\begin{aligned} T(\alpha^N) &= T(\alpha^{N-1}) + 1 \\ &= T(\alpha^{N-2}) + 2 \\ &= T(\alpha^{N-3}) + 3 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ &= T(\alpha^{N-N}) + N \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha:

$$T(\alpha^{N-N}) = T(\alpha^0) = T(1) = 0$$

Si ha quindi: $T(\alpha^N) = N \qquad \Rightarrow \qquad T(n) = \log_\alpha(n)$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\log_\alpha(n) = \log_\alpha(1) = 0 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{\alpha}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{\alpha}\right) + 1 &= \log_\alpha\left(\frac{n}{\alpha}\right) + 1 \\ &= \log_\alpha(n) - \log_\alpha(\alpha) + 1 \\ &= \log_\alpha(n) - 1 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \log_\alpha(n) \end{aligned}$$

4. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Mostrare il procedimento. Qual'è l'ordine di crescita asintotica di $T(n)$?

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{3} & n > 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$
\begin{aligned}
T(2^N) &= T(2^{N-1}) + \frac{2^N}{3} \\
&= T(2^{N-2}) + \frac{2^{N-1}}{3} + \frac{2^N}{3} \\
&= T(2^{N-3}) + \frac{2^{N-2}}{3} + \frac{2^{N-1}}{3} + \frac{2^N}{3} \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \\
&= T(2^{N-N}) + \left(\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{N} 2^i\right) - \frac{1}{3} \\
&= 1 + \frac{1}{3}\left(2^{N+1} - 1\right) - \frac{1}{3} \\
&= 1 + \frac{2^{N+1} - 1}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{3 + 2^{N+1} - 1 - 1}{3} = \frac{2 \cdot 2^N + 1}{3} \\
T(n) &= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}
$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{2n+1}{3} = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$
\begin{aligned}
T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{3} &= \frac{2\frac{n}{2} + 1}{3} + \frac{n}{3} \\
&= \frac{n+1}{3} + \frac{n}{3} \\
&= \frac{n+1+n}{3} = \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}
$$

5. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare inoltre l'esattezza della soluzione trovata e mostrare che tale valore è in accordo con la soluzione fornita dal master theorem.

$$
\begin{cases}
T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 1 & n > 1 \\
T(1) = 1
\end{cases}
$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$
\begin{aligned}
T(2^N) &= 4T(2^{N-1}) + 1 \\
&= 4\left(4T(2^{N-2}) + 1\right) + 1 \\
&= 4^2 + T(2^{N-2}) + 4 + 1 \\
&= 4^2\left(4T(2^{N-3}) + 1\right) + 4 + 1 \\
&= 4^3 T(2^{N-3}) + 4^2 + 4 + 1 \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&= 4^N T(2^{N-N}) + \sum_{i=0}^{N-1} 4^i = \sum_{i=0}^{N} 4^i \\
&= \frac{4^{N+1} - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^N - 1}{3} \\
&= \frac{4 \cdot 2^{2N} - 1}{3} = \frac{4 \cdot (2^N)^2 - 1}{3} \\
T(n) &= \frac{4n^2 - 1}{3}
\end{aligned}
$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{4n^2 - 1}{3} = \frac{4 - 1}{3} = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$
\begin{aligned}
4T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 &= 4\frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1}{3} + 1 \\
&= 4\frac{4\frac{n^2}{4} - 1}{3} + 1 \\
&= 4\frac{n^2 - 1}{3} + 1 \\
&= \frac{4n^2 - 4 + 3}{3} = \frac{4n^2 - 1}{3}
\end{aligned}
$$

Osservazioni

Si nota che il risultato ottenuto è in accordo con quanto espresso dal Master Theorem, infatti:

$$T(n) = a\ T\left(\frac{n}{c}\right) + b \qquad \Rightarrow \qquad T(n) = 4\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$\Theta(n^{\log_c(a)}) \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^{\log_2(4)}) = \Theta(n^2)$$

6. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n & n \geq 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n = T(n-3) - 3n - 2 - 1 \\
&= T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-4) + 4n - 3 - 2 - 1 \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
k = n-1 \quad \Rightarrow \quad &= T(n-n+1) + n(n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i \\
&= 1 + n^2 - n - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n - (n-1) \right) \\
&= \frac{2 + 2n^2 - 2n - n^2 - n + 4n - 2}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $(n-1)$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
T(n-1) + n &= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

7. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 & n \geq 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento
Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned} T(2^N) &= T(2^{N-1}) + 1 \\ &= T(2^{N-2}) + 2 \\ &= T(2^{N-3}) + 3 \\ &\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ &= T(2^{N-N}) + N \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale si ha:

$$T(2^{N-N}) = T(2^0) = T(1) = 1$$

Si ha quindi: $T(2^N) = 1 + N \qquad \Rightarrow \qquad T(n) = 1 + \log_2(n)$
Verifica
Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$1 + \log_2(n) = 1 + log_2(1) = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 &= 1 + \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\ &= 1 + \log(n) - \log(2) + 1 \\ &= 1 + \log(n) - 1 + 1 = 1 + \log(n) \end{aligned}$$

8. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n & n \geq 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento
Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned} T(2^N) &= 2T(2^{N-1}) + 2^N \\ &= 2\left(2T(2^{N-2}) + 2^{N-1}\right) + 2^N \\ &= 2^2T(2^{N-2}) + 2^N + 2^N \\ &= 2^2\left(2T(2^{N-3}) + 2^{N-2}\right) + 2^N + 2^N \\ &= 2^3T(2^{N-3}) + 2^N + 2^N + 2^N \\ &\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ &= 2^N + T(2^{N-N}) + N2^N = N2^N \\ T(n) &= n\ \log_2(n) \end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$n\ \log_2(n) = 1\ \log_2(1) = 0 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
2T\left(\frac{n}{2}\right) + n &= 2\left(\frac{n}{2}\ \log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n \\
&= 2\left(\frac{n}{2}\left(\log n - \log 2\right)\right) + n \\
&= \left(n\left(\log(n) - 1\right)\right) + n \\
&= n\ \log(n) - n + n = n\ \log(n)
\end{aligned}$$

9. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 & n \geq 2 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned}
T(2^N) &= 2T(2^{N-1}) + 1 \\
&= 2(2T(2^{N-2}) + 1) + 1 \\
&= 2^2T(2^{N-2}) + 2 + 1 \\
&= 2^2(2T(2^{N-3}) + 1) + 2 + 1 \\
&= 2^3T(2^{N-3}) + 2^2 + 2 + 1 \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= 2^N T(2^{N-N}) + \sum_{i=0}^{N-1} 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{N} 2^i = 2^{N+1} - 1 = 2 \cdot 2^N - 1 \\
T(n) &= 2n - 1
\end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$2n - 1 = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$
\begin{aligned}
2T\left(\frac{n}{2}\right)+1 &= 2\left(2\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)+1 \\
&= 2n-2+1 = 2n-1
\end{aligned}
$$

10. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare l'esattezza della soluzione trovata.

$$
\begin{cases}
T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 & n > 1 \\
T(1) = c
\end{cases}
$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$
\begin{aligned}
T(2^N) &= 4T(2^{N-1}) + 2^{2N} \\
&= 4(4T(2^{N-2}) + 2^{2N-2}) + 2^{2N} \\
&= 4^2T(2^{N-2}) + 2^{2N} + 2^{2N} \\
&= 4^2(4T(2^{N-3}) + 2^{2N-4}) + 2^{2N} + 2^{2N} \\
&= 4^3T(2^{N-3}) + 2^{2N} + 2^{2N} + 2^{2N} \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= 4^N T(2^{N-N}) + N2^{2N} \\
&= 2^{2N}c + N2^{2N} = 2^{2N}(c+N) \\
T(n) &= n^2(c + \log_2 n)
\end{aligned}
$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$n^2(c + \log_2 n) = c = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$
\begin{aligned}
4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 &= 4\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(c + \log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right) + n^2 \\
&= 4\left(\left(\frac{n^2}{4}\right)(c + \log n - \log 2)\right) + n^2 \\
&= n^2c + n^2\log n - n^2 + n^2 \\
&= n^2(c + \log n)
\end{aligned}
$$

11. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = 4T(n-1) + 2^n & n > 0 \\ T(n) = 6 & n = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n-1) + 2^n \\ &= 4(4T(n-2) + 2^{n-1}) + 2^n \\ &= 4^2T(n-2) + 2^{n+1} + 2^n \\ &= 4^2(4T(n-3) + 2^{n-2}) + 2^{n+1} + 2^n \\ &= 4^3T(n-3) + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &= 4^nT(n-n) + 2^n \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= 4^n \cdot 6 + 2^n(2^{n+1} - 1 - 2^n) \\ &= 2^{2n} \cdot 6 + 2^{2n+1} - 2^n - 2^{2n} \\ &= 2^{2n+1} \cdot 3 + 2^{2n+1} - 2^n - 2^{2n} \\ &= 4 \cdot 2^{2n+1} - 2^n - 2^{2n} \\ &= 2^2 \cdot 2^{2n+1} - 2^n - 2^{2n} = 2^{2n+3} - 2^n - 2^{2n} \end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 0$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$2^{2n+3} - 2^n - 2^{2n} = 2^3 - 1 - 1 = 6 = T(0)$$

Supposto vero per $n-1$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned} 4T(n-1) + 2^n &= 4(2^{2(n-1)+3} - 2^{n-1} - 2^{2(n-1)}) + 2^n \\ &= 2^2(2^{2n+1} - 2^{n-1} - 2^{2n-2}) + 2^n \\ &= 2^{2n+3} - 2^{n+1} - 2^{2n} + 2^n \\ &= 2^{2n+3} - 2^{2n} - 2^n \cdot 2 + 2^n \\ &= 2^{2n+3} - 2^{2n} - 2^n(2-1) = 2^{2n+3} - 2^n - 2^{2n} \end{aligned}$$

12. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare l'esattezza della soluzione trovata.

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + \log_2(n) & n > 1 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned}
T(2^N) &= T(2^{N-1}) + N \\
&= T(2^{N-2}) + (N-1) + N \\
&= T(2^{N-3}) + (N-2) + (N-1) + N \\
&= T(2^{N-3}) + 3N - 2 - 1 \\
&= T(2^{N-4}) + 4N - 3 - 2 - 1 \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= T(2^{N-N}) + N^2 - \left(\sum_{i=0}^{N-1} i\right) - N \\
&= N^2 - \left(\frac{N(N+1)}{2} - N\right) \\
&= \frac{2N^2 - N^2 - N + 2N}{2} = \frac{N^2 + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \\
T(N) &= \frac{\log_2(n)(\log_2(n)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{\log_2(n)(\log_2(n)+1)}{2} = \frac{\log_2(1)(\log_2(1)+1)}{2} = 0 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2(n) &= \frac{\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\left(\log_2\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)}{2} + \log_2(n) \\
&= \frac{(\log n - \log 2)(\log n - \log 2 + 1)}{2} + \log n \\
&= \frac{(\log n - 1)(\log n)}{2} + \log n \\
&= \frac{\log^2 n - \log n + 2\log n}{2} \\
&= \frac{\log^2 n + \log n}{2} = \frac{\log n(\log n + 1)}{2}
\end{aligned}$$

13. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare l'esattezza della soluzione trovata.

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log_2(n) & n > 2 \\ T(2) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento
Ricordando che $\sqrt{n} = n^{1/2}$, ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned}
T(2^N) &= 2T(2^{N/2}) + N \\
&= 2(2T(2^{N/4}) + \frac{N}{2}) + N \\
&= 2^2 T(2^{N/4}) + N + N \\
&= 2^2(2T(2^{N/8}) + N/4)) + 2N \\
&= 2^3 T(2^{N/8}) + 3N \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= 2^{\log N} T(2^{N/N}) + N \log N \\
&= N + N \log N \\
T(n) &= \log(n) + \log(n) \log\log(n)
\end{aligned}$$

Verifica
Per $n = 2$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\log(n) + \log(n) \log\log(n) = \log(2) + \log(2) \log\log(2) = 1 = T(2)$$

Supposto vero per $\sqrt{n}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
2T(\sqrt{n}) + \log_2(n) &= 2\left(\log(\sqrt{n}) + \log(\sqrt{n}) \log\log(\sqrt{n})\right) + \log(n) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log n \cdot \log\frac{\log n}{2}\right) + \log n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log n \cdot (\log\log n - \log 2)\right) + \log n \\
&= \log n + \log n \log\log n - \log n + \log n \\
&= \log(n) + \log(n) \log\log(n)
\end{aligned}$$

14. Determinare l'ordine di grandezza della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + \log(n) & n > 1 \\ T(1) = c \end{cases}$$

Svolgimento

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + \log(n) \\
&= T(n-2) + \log(n-1) + \log(n) \\
&= T(n-3) + \log(n-2) + \log(n-1) + \log(n) \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
k = n-1 \quad \Rightarrow \quad &= T(n-n+1) + \sum_{i=2}^{n} \log(i) \\
&= c + \sum_{i=2}^{n} \log(i)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{1}^{n} \log(i) \leq \sum_{i=2}^{n} \log(i) \leq \int_{2}^{n+1} \log(i)
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{1}^{n} \log(i) &= [i \log i]_{1}^{n} - (n-1) \\
&= n \log n - n + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n \log n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{2}^{n+1} \log(i) &= [i \log i]_{2}^{n+1} - (n-1) \\
&= (n+1)\log(n+1) - 2\log 2 - n + 1 \\
&= (n+1)\log(n+1) - n - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n \log n)
\end{aligned}
$$

15. Risolvere la seguente ricorrenza:

$$
\begin{cases}
T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3 & n > 1 \\
T(1) = 1
\end{cases}
$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned}
T(2^N) &= 4T(2^{N-1}) + 2^{3N} \\
&= 4(4T(2^{N-2}) + 2^{3N-3}) + 2^{3N} \\
&= 4^2 T(2^{N-2}) + 2^{3N-1} + 2^{3N} \\
&= 4^2(4T(2^{N-3}) + 2^{3N-6}) + 2^{3N-1} + 2^{3N} \\
&= 4^3 T(2^{N-3}) + 2^{3N-2} + 2^{3N-1} + 2^{3N} \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= 4^N T(2^{N-N}) + 2^{2N} \sum_{i=1}^{N} 2^i \\
&= 2^{2N} + 2^{2N} \sum_{i=1}^{N} 2^i = 2^{2N} \sum_{i=0}^{N} 2^i \\
&= 2^{2N} \left(2^{N+1} - 1\right) \\
T(n) &= n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2
\end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$2n^3 - n^2 = 2 - 1 = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 &= 4\left(2\left(\frac{n}{2}\right)^3 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + n^3 \\
&= 4\left(\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{4}\right) + n^3 \\
&= n^3 - n^2 + n^3 = 2n^3 - n^2
\end{aligned}$$

16. Determinare l'ordine di grandezza della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n^2 & n \geq 1 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n^2 \\
&= T(n-2) + (n-1)^2 + n^2 \\
&= T(n-3) + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 \\
&\ \ \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= T(n-n) + \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^n i^2 \le \sum_{i=1}^{n} i^2 \le \int_1^{n+1} i^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\frac{i^3}{3}\right]_0^n \le \sum_{i=1}^{n} i^2 \le \left[\frac{i^3}{3}\right]_1^{n+1}
$$

$$
\frac{n^3}{3} \le \sum_{i=1}^{n} i^2 \le \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^3)
$$

17. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$
\begin{cases}
T(n) = T(n-1) + n^2 + n + 1 & \qquad n > 1 \\
T(1) = 0
\end{cases}
$$

Svolgimento

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n^2 + n + 1 \\
&= T(n-2) + (n-1)^2 + (n-1) + 1 + n^2 + n + 1 \\
&= T(n-3) + (n-2)^2 + (n-2) + 1 + \\
&\qquad + (n-1)^2 + (n-1) + 1 + n^2 + n + 1 \\
k = n-1 \quad \Rightarrow \quad &= T(n-n+1) + \sum_{i=2}^{n} i^2 + \sum_{i=2}^{n} i + (n-1) \\
&= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + (n-1) \\
&= \frac{(n^2+n)(2n+1) - 6 + 3n^2 + 3n - 6 + 6n - 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 3n^2 + 9n - 18}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 6n^2 + 10n - 18}{6} \qquad \Rightarrow \quad \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{2n^3 + 6n^2 + 10n - 18}{6} = \frac{2 + 6 + 10 - 18}{6} = 0 = T(1)$$

Supposto vero per $n - 1$ dimostriamolo per n.

$$T(n-1) + n^2 + n + 1 = \frac{2(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 10(n-1) - 18}{6} + n^2 + n + 1$$

$$= \frac{2(n^3 - 1 - 3n^2 + 3n) + 6(n^2 + 1 - 2n) + 10n - 10 - 18 + 6n^2 + 6n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 - 2 - 6n^2 + 6n + 6n^2 + 6 - 12n + 10n - 10 - 18 + 6n^2 + 6n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 10n - 18}{6}$$

18. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 2n & n > 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$\begin{aligned}
T(2^N) &= 4T(2^{N-1}) + 2^{N+1} \\
&= 4(4T(2^{N-2}) + 2^N) + 2^{N+1} \\
&= 4^2T(2^{N-2}) + 2^{N+2} + 2^{N+1} \\
&= 4^2(4T(2^{N-3}) + 2^{N-1}) + 2^{N+2} + 2^{N+1} \\
&= 4^3T(2^{N-3}) + 2^{N+3} + 2^{N+2} + 2^{N+1} \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
&= 4^N T(2^{N-N}) + 2^N \sum_{i=1}^{N} 2^i \\
&= 2^{2N} \cdot 2 + 2^N \sum_{i=1}^{N} 2^i \\
&= 2^{2N+1} + 2^N \sum_{i=1}^{N} 2^i = 2^N \sum_{i=1}^{N+1} 2^i \\
&= 2^N (2^{N+2} - 1 - 1) = 2^n (2^{N+2} - 2) \\
T(n) &= n(4n - 2) = 4n^2 - 2n
\end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$4n^2 - 2n = 4 - 2 = 2 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
4T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n &= 4\left(4\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2n \\
&= 4\left(n^2 - n\right) + 2n \\
&= 4n^2 - 4n + 2n = 4n^2 - 2n
\end{aligned}$$

19. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare l'esattezza della soluzione trovata.

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n-2) & n > 1 \\ T(0) = 3 \\ T(1) = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned}
& & T(n) &= 2T(n-2) \\
& & &= 2(2T(n-4)) = 2^2T(n-4) \\
& & &= 2^2(2T(n-6)) = 2^3T(n-6) \\
& & &= 2^3(2T(n-8)) = 2^4T(n-8) \\
k & \Rightarrow & &= 2^kT(n-2k) \\
n = 0 \quad k = \frac{n}{2} & \Rightarrow & &= 2^{\frac{n}{2}}T\left(n - 2\frac{n}{2}\right) = 3\sqrt{2^n} \\
n = 1 \quad k = \frac{n-1}{2} & \Rightarrow & &= 2^{\frac{n-1}{2}}T\left(n - 2\frac{n-1}{2}\right) = \sqrt{2^{n-1}}3\sqrt{2} = 3\sqrt{2^n}
\end{aligned}$$

20. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 2n\log_2(n) & n > 2 \\ T(2) = 4 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 2^N$ si ha:

$$
\begin{aligned}
T(2^N) &= 2T(2^{N-1}) + 2^{N+1}N \\
&= 2(2T(2^{N-2}) + 2^N(N-1)) + 2^{N+1}N \\
&= 2^2T(2^{N-2}) + 2^{N+1}(N-1) + 2^{N+1}N \\
&= 2^2(2T(2^{N-3}) + 2^{N-1}(N-2)) + 2^{N+1}(N-1) + 2^{N+1}N \\
&= 2^3T(2^{N-3}) + 2^{N+1}(N-2) + 2^{N+1}(N-1) + 2^{N+1}N \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
k = n-1 \quad \Rightarrow \quad &= 2^{N-1}T(2^{N-N+1}) + 2^{N+1}\sum_{i=2}^{N} i \\
&= 2^{N-1} \cdot 2^2 + 2^{N+1}\sum_{i=2}^{N} i = 2^{N+1} + 2^{N+1}\sum_{i=2}^{N} i \\
&= 2^{N+1}\sum_{i=1}^{N} i = 2^{N+1}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) \\
&= 2^{N+1}\left(\frac{N^2+N}{2}\right) = \frac{2^{N+1}N^2 + 2^{N+1}N}{2} \\
&= 2^N N^2 + 2^N N \\
T(n) &= n\log^2 n + n\log n
\end{aligned}
$$

Verifica

Per $n = 2$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$
n\log^2 n + n\log n = 2\log 2 + 2\log 2 = 2 + 2 = 4 = T(2)
$$

Supposto vero per $\frac{n}{2}$ dimostriamolo per n.

$$
\begin{aligned}
2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n\log_2(n) &= 2\left(\left(\frac{n}{2}\right)\log^2\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2n\log_2(n) \\
&= \left(n\log^2\left(\frac{n}{2}\right) + n\log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2n\log n \\
&= n\left(\log\left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n\left(\log n - 1\right) + 2n\log n \\
&= n\left((\log n - 1)(\log n - 1)\right) + n\left(\log n - 1\right) + 2n\log n \\
&= n\left((\log^2 n - 2\log n + 1\right) + n\left(\log n - 1\right) + 2n\log n \\
&= n\log^2 n - 2n\log n + n + n\log n - n + 2n\log n \\
&= n\log^2 n + n\log n
\end{aligned}
$$

21. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = 9T(\frac{n}{2}) + n^3 & n > 1 \\ T(1) = d \end{cases}$$

Svolgimento

Applicando il Master Theorem generalizzato si ha:

$$T(n) = a\ T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \qquad \Rightarrow \qquad T(n) = 9\ T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$k = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a > c^k \qquad \Rightarrow \qquad 9 > 2^3$$

$$\Theta(n^{\log_c(a)}) \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^{\log_2(9)})$$

22. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3 & n > 1 \\ T(1) = d \end{cases}$$

Svolgimento

Applicando il Master Theorem generalizzato si ha:

$$T(n) = a\ T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \qquad \Rightarrow \qquad T(n) = 8\ T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$k = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a = c^k \qquad \Rightarrow \qquad 8 = 2^3$$

$$\Theta(n^k \log_c(n)) \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(n^3 \log_2(n))$$

23. Determinare l'ordine di grandezza $\Theta(T(n))$ della seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + \sqrt{n} & n > 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

$$\begin{aligned} & T(n) = T(n-1)\sqrt{n} \\ & \qquad = T(n-2) + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \\ & \qquad = T(n-3) + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \\ & \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k = n-1 \quad \Rightarrow \quad & \qquad = T(n-n+1) + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \end{aligned}$$

$$1 + \int_0^n \sqrt{i} \quad \leq \quad 1 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \quad \leq \quad 1 + \int_1^{n+1}$$

$$1 + \left[\frac{i^{3/2}}{3/2}\right]_0^n \quad \leq \quad 1 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \quad \leq \quad 1 + \left[\frac{i^{3/2}}{3/2}\right]_1^{n+1}$$

$$1 + \frac{2}{3}n^{3/2} \quad \leq \quad 1 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \quad \leq \quad 1 + \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \Theta(n^{3/2})$$

24. Risolvere la seguente formula ricorsiva esattamente, ovvero, identificare la funzione $T(n)$ che la soddisfa. Verificare inoltre l'esattezza della soluzione trovata.

$$\begin{cases} T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + 1 qquad n > 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

Ponendo $n = 4^N$ si ha:

$$\begin{aligned} T(4^N) &= 3T(4^{N-1}) + 1 \\ &= 3(3T(4^{N-2}) + 1) + 1 \\ &= 3^2 T(4^{N-2}) + 3 + 1 \\ &= 3^2(3T(4^{N-3}) + 1) + 3 + 1 \\ &= 3^3 T(4^{N-3}) + 3^2 + 3 + 1 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &= 3^N T(4^{N-N}) + \sum_{i=0}^{N-1} 3^i \\ &= 3^N + \sum_{i=0}^{N-1} 3^i = \sum_{i=0}^{N} 3^i \\ &= \frac{3^{N+1} - 1}{2} = \frac{3 \cdot 3^N - 1}{2} \\ T(n) &= \frac{3 \cdot 3^{\log_4(n)} - 1}{2} \end{aligned}$$

Verifica

Per $n = 1$ la soluzione è verificata in quanto si ottiene:

$$\frac{3 \cdot 3^{\log_4(n)} - 1}{2} = \frac{3 \cdot 3^{\log_4(1)} - 1}{2} = 1 = T(1)$$

Supposto vero per $\frac{n}{4}$ dimostriamolo per n.

$$\begin{aligned}
3T\left(\frac{n}{4}\right)+1 &= 3\left(\frac{3\cdot 3^{\log_4\left(\frac{n}{4}\right)}-1}{2}\right)+1 \\
&= 3\left(\frac{3\cdot 3^{\log_4(n)-1}-1}{2}\right)+1 \\
&= \frac{3\cdot 3^{\log_4(n)}-3}{2}+1 = \frac{3\cdot 3^{\log_4(n)}-1}{2}
\end{aligned}$$

1 Master Theorem

$$T(n) = \begin{cases} a\ T\left(\frac{n}{c}\right)+bn & n>1 \\ d & n=1 \end{cases}$$

- $a < c \quad \Rightarrow \quad \Theta(n)$
- $a = c \quad \Rightarrow \quad \Theta(n\log_c n)$
- $a > c \quad \Rightarrow \quad \Theta(n^{\log_c a})$

$$T(n) = \begin{cases} a\ T\left(\frac{n}{c}\right)+f(n) & n>1 \\ d & n=1 \end{cases}$$

Sia $f(n) = \Theta(n^k)$, allora:

- $a < c^k \quad \Rightarrow \quad \log_c a < k \quad \Rightarrow \quad \Theta(n^k)$
- $a = c^k \quad \Rightarrow \quad \log_c a = k \quad \Rightarrow \quad \Theta(n^k \log_c n)$
- $a > c^k \quad \Rightarrow \quad \log_c a > k \quad \Rightarrow \quad \Theta(n^{\log_c a})$