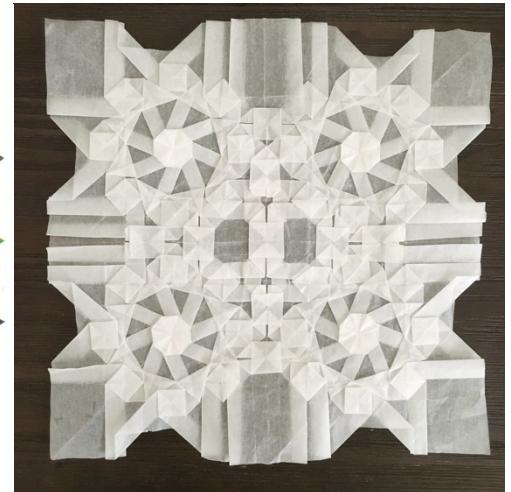
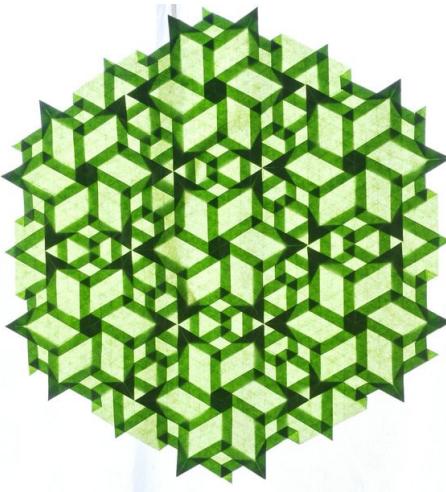


Mathematische Betrachtung der Symmetrien von Origami-Parkettierungen

Anouk Rehrauer

Betreut von Miro Estermann



Maturarbeit 2020
Kantonsschule Zürcher Oberland

Quellen von Titelbildern:
grosses Bild [bild5]
Bild unten links [bild4]
Bild unten mitte [bild7]
Bild unten rechts [bild3]

Abstract

Origami-Parkettierungen sind eine spezifische Art von Origami, die sich regelmässig in der Ebene ausbreiten. Origami-Parkettierungen sind unglaublich vielfältig und ästhetisch, besonders wenn sie Symmetrien enthalten. In dieser Maturarbeit werden Origami-Parkettierungen betrachtet, die aus sogenannten Twists aufgebaut sind. Ein Twist ist ein Grundbaustein, mit dem aus einer regelmässigen Unterteilung der Ebene, genannt Parkettierung, eine Origami-Parkettierung kreiert werden kann.

Diese Arbeit zeigt auf, wie die Symmetrien einer Twist-Parkettierung mit der zugrundeliegenden Parkettierung zusammenhängen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	6
2 Parkettierungen	8
2.1 Isometrien	9
2.2 Gruppendiagramme	10
3 Origami	13
3.1 Bezug zur Mathematik	14
3.1.1 Faltmuster	14
3.1.2 Operationsraum	15
3.2 Flache Faltbarkeit	16
3.2.1 Satz von Maekawa-Justin	16
3.2.2 Satz von Kawasaki-Justin	17
3.2.3 Satz der Drei Facetten	18
3.2.4 Satz vom Grossen-Kleinen-Grossen-Winkel	19
3.2.5 Satz vom Einzigsten Grössten Winkel	19
3.3 Twists	20
3.3.1 Zentrierte Twist-Fliesen	22
3.3.2 Versetzte Twist-Fliesen	24
4 Entstehung einer Origami-Parkettierung	26
5 Symmetriebetrachtungen	29
5.1 Resultate	29
5.1.1 Zentrierte Twist-Parkettierungen	32
5.1.2 Versetzte Twist-Parkettierungen	34
5.2 Offene Fragen	39
6 Dank	41
7 Anhang	42
7.1 Punkt der geschlossenen Rückseite	42
7.2 Weiteres	42
Literaturverzeichnis	44
Bildquellenverzeichnis	45
Index	46

1 Einleitung

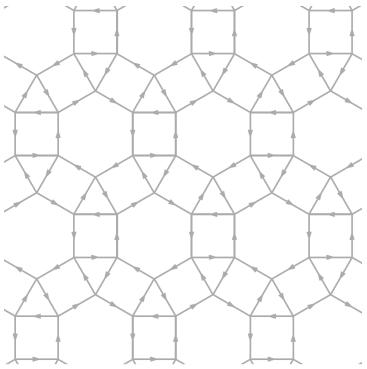
Die Welt des Origami ist eine unglaublich faszinierende Welt, deren Vielfalt vielen nicht bekannt ist. Origami beinhaltet nicht nur das Falten von Kranichen und Fröschen, sondern auch das Falten von abstrakten Formen. Diese Maturarbeit behandelt eine abstrakte Art von Origami und zwar Origami-Parkettierungen.

Origami-Parkettierungen sind gefaltete, geometrische Muster, die sich regelmässig in einer Ebene ausbreiten. Die Titelseite zeigt vier Beispiele, die unterschiedlich gefaltet, aber alle komplett flach sind. Das Falten solcher Muster gestaltet sich als besonders schwierig, weil alle Falten gleichzeitig gefaltet werden müssen. Die Muster haben einen regelmässigen Aufbau und ziehen ihre ästhetische Wirkung aus den Wiederholungen und den Symmetrien.

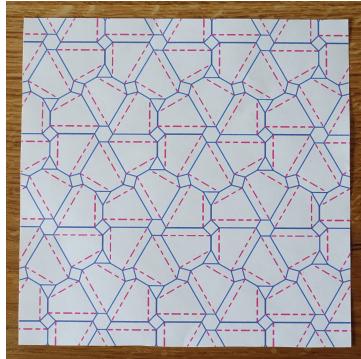
Die Gestaltung von Origami-Parkettierungen ist eine Aufgabe, die mit einem mathematischen Ansatz gut gelöst werden kann. Bei den "normalen" Origami können neue Figuren durch Ausprobieren und Veränderung der bestehenden Figuren gefunden werden. Aber weil bei Origami-Parkettierungen alle Falten gleichzeitig gefaltet werden müssen, ist diese Methode schlecht praktikabel. Ein geeigneter systematischer Ansatz ist die Verwendung von Twist-Fliesen als Grundbausteine, wie sie in Abbildung 1.1 gezeigt ist. Bild (a) zeigt eine regelmässige Unterteilung der Ebene, genannt Parkettierung der Ebene. Diese Parkettierung bildet das Grundgerüst für die Origami-Parkettierung. In Bild (b) wurden alle Teilflächen der Parkettierung durch Faltmuster von sogenannten Twist-Fliesen ersetzt. Diese Faltmuster kennzeichnen alle Linien, die gefaltet werden müssen, um die Twists zu erhalten. Bild (c) zeigt die Origami-Parkettierung, wenn alle Falten gefaltet sind. Bei dieser Origami-Parkettierung ist auch die Rückseite, Bild (d), interessant, weil sie anders aussieht wie die Vorderseite. Die gefaltete Origami-Parkettierung ist der gedruckten Ausgabe hinten beigelegt.

Die vier Aspekte dieser Origami-Parkettierung sind unterschiedlich, aber gewisse Grundzüge sind wiedererkennbar. Die Sechsecke aus der Parkettierung (a) sind in verkleinerter Form im Faltmuster (b) und auf der Vorderseite der Origami-Parkettierung (c) sichtbar, während die Rückseite (d) vergrösserte Sechsecke hat. Ein weiteres Beispiel sind die Spiegelachsen, die die Parkettierung (a) besitzt, und die vertikal durch die Sechsecke führen. Diese Spiegelachsen sind weder im Faltmuster (b), noch auf der Vorderseite der Origami-Parkettierung (c) vorhanden. Interessanterweise aber auf der Rückseite der Origami-Parkettierung (d). In dieser Maturarbeit untersuche und beschreibe ich das Verhalten von Symmetrien beim Entstehungsprozess von Twist-Parkettierungen.

Im Buch *Tilings and Patterns* von Grünbaum und Shephard werden Symmetrien von Parkettierungen und Parkettierungen selbst ausführlich behandelt. Das Buch ist



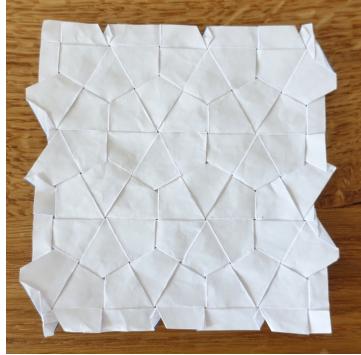
(a) Die ursprüngliche Parkettierung



(b) Das Faltmuster der Origami-Parkettierung



(c) Die Vorderseite der Origami-Parkettierung



(d) Die Rückseite der Origami-Parkettierung

Abb. 1.1: Der Entstehungsprozess einer Origami-Parkettierung

anspruchsvoll, aber trotzdem geeignet für ein Selbststudium, weil es Übungen enthält.

Robert J. Lang ist ein bekannter Origamikünstler und -Mathematiker. Er hat beispielsweise ein Programm geschrieben, mit dem sich ein Faltmuster für ein beliebiges "normales" Origami berechnen lässt. Sein Buch *Twists, Tilings and Tessellations* behandelt verschiedene mathematische Aspekte von Origami. Darunter auch die flache Faltbarkeit, ein Problem auf das hier ebenfalls eingegangen wird.

Diese Maturarbeit ist wie folgt strukturiert:

Kapitel 2 vermittelt einen Überblick über Parkettierungen. Ausführlich behandelt werden dabei Symmetrien von Parkettierungen und die Klassifizierung von Parkettierungen nach ihren Symmetrien. Das grosse Thema Origami wird in Kapitel 3 behandelt. In diesem Kapitel wird die flache Faltbarkeit, sowie der Aufbau von zentrierten und versetzten Twists erläutert. Die Zusammenführung der beiden Bereiche Origami und Parkettierungen erfolgt im Kapitel 4, welches die Konstruktion einer Origami-Parkettierung noch einmal ausführlich erklärt. Kapitel 5 beinhaltet meine Symmetrieuntersuchung an Origami-Parkettierungen. Die Resultate sind in Beobachtungen festgehalten und anschaulich begründet. Die Daten, aus denen ich meine Resultate erhoben habe, sind im digitalen Teil des Anhangs zu finden. Gefaltete Beispiele von Origami-Parkettierungen und Twists sind dieser Arbeit beigelegt.

2 Parkettierungen

Dieses Kapitel beinhaltet die Grundlagen von Parkettierungen und Symmetrien. Parkettierungen sind ein wichtiger Bestandteil bei der Betrachtung von Origami-Parkettierungen, weil alle Origami-Parkettierungen aus einer solchen Unterteilung der Ebene aufgebaut sind. Außerdem wird in diesem Kapitel erklärt, wie Symmetrien auf Parkettierungen angewendet werden können und wie sich Parkettierungen nach ihren Symmetrien klassifizieren lassen. Sämtliche Informationen dieses Kapitels stammen aus [1].

Eine ebene **Parkettierung** $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ besteht aus geschlossenen Mengen T_i , sogenannten **Fliesen**. Diese Fliesen decken eine Ebene so ab, dass weder Lücken noch Überlappungen vorhanden sind. Die Gesamtheit aller Fliesen bildet also die Ebene. In Abbildung 2.1 sind Beispiele von Parkettierungen dargestellt. Parkettierungen dürfen auch aus unterschiedlichen Fliesen bestehen.

Der Einfachheit halber behandeln wir endlich grosse, zusammenhängende Fliesen, die sich nicht selbst überschneiden. In Abbildung 2.2 sind Beispiele von Fliesen, die nicht behandelt werden.

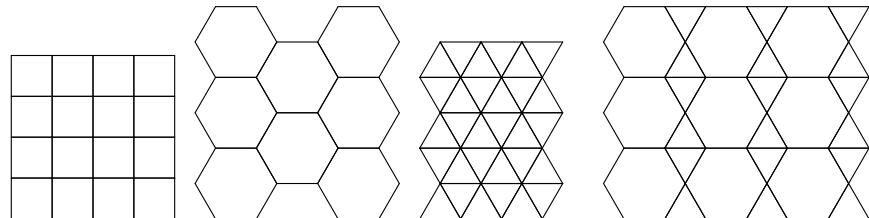


Abb. 2.1: Drei Beispiele von Parkettierungen, die aus regelmässigen Polygonen bestehen

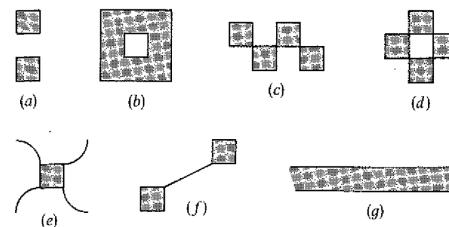


Abb. 2.2: Fliesen, die wir nicht betrachten [bild9]

Eine **Kante** ist eine zusammenhängende Linie, die zwei Fliesen berührt und von Knoten begrenzt wird. Ein **Knoten** ist ein Punkt, in dem mehrere Kanten zusammenkommen, der also mehr als zwei Fliesen berührt. Die Fliesen selbst werden von Kanten und Knoten begrenzt.

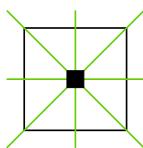
2.1 Isometrien

Als **Isometrie** wird eine Transformation bezeichnet, bei der die Abstände zwischen allen Punkten gleich bleiben. Keine Isometrien sind zum Beispiel Scherungen oder Skalierungen. In der Ebene gibt es vier verschiedene Arten von Isometrien:

1. **Rotation**: Eine Drehung um einen Punkt, genannt Rotationszentrum, um einen bestimmten Winkel. Die Punktspiegelung gehört auch zu den Rotationen, weil sie einer Rotation um den Rotationswinkel π entspricht.
2. **Verschiebung**: Eine Verschiebung in eine bestimmte Richtung um eine gewisse Distanz.
3. **Spiegelung**: Eine Spiegelung an einer Geraden, genannt Spiegelachse.
4. **Gleitspiegelung**: Eine Spiegelung an einer Geraden g , genannt Gleitspiegelachse, kombiniert mit einer Verschiebung parallel zu g .

Das Bild einer Isometrie σ , die auf die Menge S angewendet wurde, heisst σS . Falls $\sigma S = S$ gilt, ist σ eine **Symmetrie**. Eine Symmetrie ist also eine Isometrie, welche eine Menge auf sich selbst abbildet. Wenn zum Beispiel eine Rotation eine Menge auf sich selbst abbildet, heisst sie Rotationssymmetrie. Rotationssymmetrien enthalten ein n -zähliges Rotationszentrum, wobei n die Anzahl Rotationssymmetrien ist, die das Objekt besitzt, wobei Rotationen um die Winkel $0 \leq \alpha < 2\pi$ gezählt werden. Ein Quadrat besitzt somit ein 4-zähliges Rotationszentrum, allerdings nur drei Rotationssymmetrien. Das liegt daran, dass die Rotation um 0 keine Rotationssymmetrie ist, sondern die sogenannte **identische Symmetrie**. Die identische Symmetrie ist eine Isometrie, die alle Punkte auf sich selbst abbildet. Folglich besitzt jede beliebige Menge eine identische Isometrie.

Betrachten wir nun als Beispiel das Quadrat. Ein Quadrat besitzt acht Symmetrien: die identische Symmetrie, drei Rotationssymmetrien und vier Spiegelsymmetrien.



Wir definieren die Gruppe $S(T)$ als die Menge aller Symmetrien einer *Fliese* T . Diese Gruppen lassen sich nach folgenden Merkmalen klassifizieren:

- $c1$: Gruppen, welche aus nur einer Isometrie bestehen, und zwar der identischen.
- cn ($n \geq 2$): Genannt die zyklische Gruppe der Ordnung n . Die Gruppe besteht aus Rotationen um die Winkel $\frac{2\pi j}{n}$ wobei $j = \{0, 1, \dots, n-1\}$ um das Rotationszentrum. Die Gruppe enthält n Symmetrien, und zwar $n - 1$ Rotationssymmetrien und die identische Symmetrie.
- dn ($n \geq 1$): Genannt die dihedrale Gruppe der Ordnung $2n$. Die Gruppe beinhaltet alle Symmetrien von cn , sowie die Spiegelungen an n Geraden, welche den gleichen Winkel zueinander haben. Die Gruppe enthält $2n$ Symmetrien, und zwar n Spiegelungen, $n - 1$ Rotationen und die identische Symmetrie. Ein Quadrat z.B. besitzt die dihedralen Gruppe der Ordnung acht.

2.2 Gruppendiagramme

Ein Gruppendiagramm stellt die Symmetrien einer Parkettierung dar. Eine Isometrie σ einer Parkettierung \mathcal{T} ist eine Symmetrie der Parkettierung, falls $\mathcal{T} = \sigma\mathcal{T}$ gilt. Wenn also jede Fliese von \mathcal{T} flächendeckend auf eine andere Fliese abgebildet wird. Nun gibt es aber auch Fliesen, die eine sogenannte **Orientierung** enthalten (Abbildung 2.3). Ist dies der Fall, muss bei einer Symmetrie nicht nur beachtet werden, dass jede Fliese flächen-deckend auf eine gleiche Fliese abgebildet wird, sondern dass auch die Orientierungen übereinstimmen. Es muss immer noch $\mathcal{T} = \sigma\mathcal{T}$ gelten. Eine Parkettierung mit orientierten Fliesen hat weniger oder höchstens gleich viele Symmetrien wie die Parkettierung mit gleichen Fliesen, aber ohne Orientierung. Wenn die Fliesen keine Orientierungen haben, werden die Symmetrien nur durch die Form der Fliesen eingeschränkt. Besitzen die Fliesen eine zusätzliche Orientierung, fügt dies eine weitere Bedingung hinzu, was möglicherweise Symmetrien verhindert.

Inwiefern die Symmetrien einer Parkettierung durch die Orientierung der Fliesen eingeschränkt wird, hängt von der Anzahl der unterschiedlichen Orientierungen sowie von

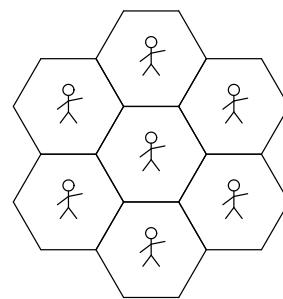


Abb. 2.3: Eine Sechseckige Parkettierung mit Orientierungen der Gruppe $c1$

den Symmetrien der Orientierung selbst ab. Wird eine Orientierung durch eine andere Orientierung mit denselben symmetrischen Eigenschaften ausgetauscht, bleiben die Symmetrien der Parkettierung gleich.¹

Die Menge aller Symmetrien einer Parkettierung \mathcal{T} ist die Symmetriegruppe $S(\mathcal{T})$. Im Gegensatz zur Symmetriegruppe einer Fliese $S(T)$ kann die Symmetriegruppe einer unendlich grossen Parkettierung $S(\mathcal{T})$ auch Verschiebungen und Gleitspiegelungen enthalten. Die Symmetriegruppe einer Parkettierung lässt sich mit einem sogenannten **Gruppendiagramm** darstellen. In Abbildung 2.5 sind drei Beispiele von solchen Gruppendiagrammen sichtbar. In jedem Bild ist links die Parkettierung dargestellt und rechts sind die Symmetrien der Parkettierung als Gruppendiagramm dargestellt.

Zur Erstellung von Gruppendiagrammen benötigen wir die Symbole, die in Abbildung 2.4 zu finden sind. In Abbildung 2.5 sind die Spiegelachsen jedoch durch doppelt durchgezogene Linien dargestellt.

Jedes Gruppendiagramm, und somit jede Parkettierung, lässt sich mithilfe des Gruppendiagramms einem sogenannten **Symmetriertyp** zuordnen. Damit zwei Gruppendiagramme zum selben Symmetriertyp gehören, müssen sie **isomorph** sein. Das heisst, es existiert eine affine Transformation, die die beiden Gruppendiagramme aufeinander abbildet. Eine **affine Transformation (Affinität)**[5] ist eine Transformation, bei der folgende Eigenschaften gewahrt werden:

- Kolinearität: Punkte, die vor der Transformation auf einer gemeinsamen Gerade liegen, liegen auch nach der Transformation auf einer gemeinsamen Gerade
- Teilverhältnistreue: Befinden sich drei Punkte auf einer Gerade, bleibt deren Teilverhältnis erhalten
- Parallelentreue: Parallelle Geraden sind auch nach der Transformation parallel

Beispiele von affinen Transformationen sind Scherungen, Skalierungen und Spiegelungen.

Es gibt nur eine begrenzte Anzahl Symmetriertypen. Enthält $S(\mathcal{T})$ keine Verschiebungen, gehört \mathcal{T} zum Symmetriertyp cn oder dn (siehe Kapitel 2.1). Enthält $S(\mathcal{T})$ genau eine Verschiebung, gehört \mathcal{T} zu einer der 7 **Streifengruppen**. Zwei der Streifengruppen sind in Abbildung 2.6 sichtbar. Enthält $S(\mathcal{T})$ zwei Verschiebungen, gehört \mathcal{T} zu einer der 17 **kristallographischen Gruppen**. In Abbildung 2.5 sind drei Beispiele sichtbar.

Hier wird noch eine weitere Eigenschaft von Parkettierungen erläutert, die in den Gruppendiagrammen auch sichtbar ist: die **Äquivalenz**. Die Fliesen T_1 und T_2 heissen äquivalent, wenn eine Symmetrie existiert, die T_1 auf T_2 abbildet. Die Gesamtheit aller Fliesen, die äquivalent zu T_1 sind, wird die **Bahn** von T_1 genannt.

Der Begriff der Bahn lässt sich auch auf Rotationszentren, Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen erweitern. Beinhaltet ein Gruppendiagramm Symmetrien gleichen Typs, die nicht zur selben Bahn gehören, werden die unterschiedlichen Bahnen mit unterschiedlichen Kleinbuchstaben oder Farben markiert.

¹Über das Symmetrieverhalten von orientierten Fliesen habe ich keine Literatur gefunden, weshalb obige Aussagen meinerseits sind.

Legende:

- Spiegelachse
- - Gleitspiegelachse
- ◊ 2-zähliges Rotationszentrum
- △ 3-zähliges Rotationszentrum
- 4-zähliges Rotationszentrum
- 6-zähliges Rotationszentrum
- ◆ 2-zähliges Rotationszentrum auf einer Spiegelachse
- ▲ 3-zähliges Rotationszentrum auf einer Spiegelachse
- 4-zähliges Rotationszentrum auf einer Spiegelachse
- 6-zähliges Rotationszentrum auf einer Spiegelachse
- Translationspfeil: zeigt die Richtung und Distanz der kleinsten Translation

Abb. 2.4: Die Symbole, die für Gruppendiagramme verwendet werden

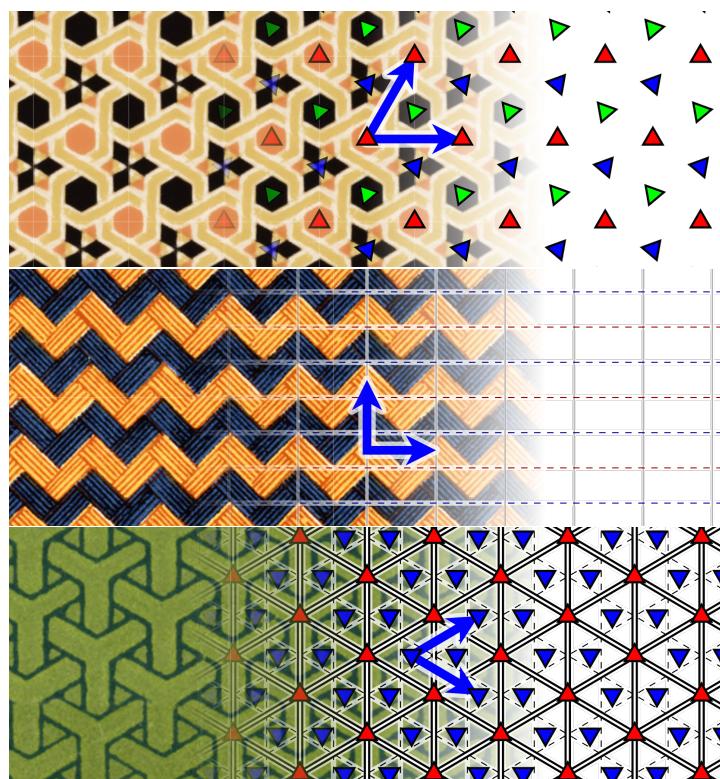


Abb. 2.5: Drei Beispiele von Gruppendiagrammen [bild11]

Von oben nach unten: p3, pg, p31m

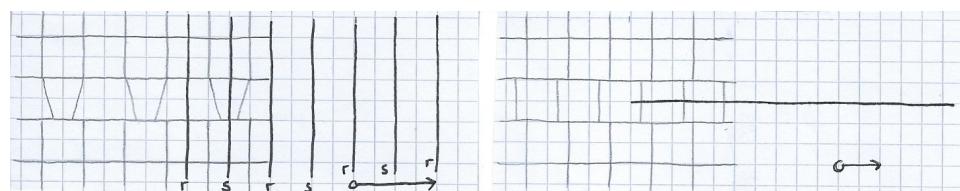


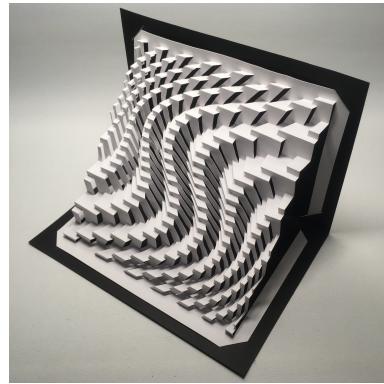
Abb. 2.6: Zwei Beispiele der Streifengruppen: links: p1m1, rechts: pm11

3 Origami

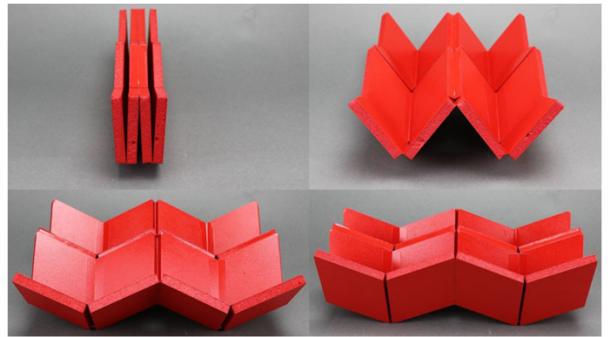
Ja, was ist eigentlich Origami? Dieses Kapitel behandelt einige Aspekte von Origami, wobei sämtliche Informationen aus [4] stammen, sofern keine anderen Quellen angegeben sind. Der Name wird zusammengesetzt aus dem Japanischen "Oru"(Falten) und "Kami"(Papier) und ist bezeichnend für gefaltete Objekte sowie für die Technik, solche Objekte herzustellen. Unter dem Objekt Origami wird oft eine Figur gemeint, die, ohne zu schneiden oder zu kleben, aus einem einzigen Stück Papier hergestellt wurde. Dies trifft auf das sogenannte klassische Origami zu, ist aber keine allgemein gültige Definition. Origami ist ein Sammelbegriff für verschiedene Techniken, die auf dem Falten von Papier beruhen. Eine paar Beispiele¹ sollen zeigen, wie vielfältig die Welt des Origami ist:

- Kirigami: Das Papier darf zusätzlich zur Faltung auch geschnitten werden. Beispiele sind Pop-Up-Karten (Abbildung 3.1a) oder Kinderbücher, bei denen die Figuren "aufstehen".
- Rigid Origami: Es wird kein Papier verwendet, sondern starres Material wie Metall oder Holz (Abbildung 3.1b). Die Teilstücke können deshalb nicht gebogen werden. Auch beim klassischen Origami enthält das Endprodukt meistens gerade Flächen, aber beim Falzprozess werden die Flächen oft gebogen. Diese Formen sind beim Rigid Origami nicht faltbar. Wird ein Rigid Origami entworfen, stellt sich deshalb die Frage, welche Objekte faltbar sind, wenn die Teilstücke starr sind.
- Modulares Origami: Das Objekt besteht aus mehreren bis sehr vielen oft identischen Modulen, wobei jedes Modul aus einem eigenen Papier gefaltet wird. Diese werden zusammengesteckt oder geklebt (Abbildung 3.1c).
- Wet-Folding: Das Papier wird angefeuchtet, bevor es verarbeitet wird. Mit dieser Technik lässt sich das Papier formen, ohne Falten zu kreieren. Die Ergebnisse fallen realistischer und individueller aus als beim klassischen Origami (Abbildung 3.1d).
- Origami-Parkettierung: Diese Art von Origami gleicht mehr einem Muster als einem Objekt. Eine Origami-Parkettierung ist aus einem Papier in wiederholende Segmente gefaltet (Beispiele siehe Titelseite). Die gefalteten Objekte können flach oder dreidimensional sein.

¹Beispiele aus [3]



(a) Kirigami [bild10]



(b) Rigid Origami [bild12]



(c) Modulares Origami [bild6]



(d) Wetfolding [bild2]

Abb. 3.1: Beispiele von verschiedenen Origami-Arten

3.1 Bezug zur Mathematik

Was hat Origami mit Mathematik zu tun? Mehr, als auf den ersten Blick sichtbar. Zum Beispiel ist das Designen von neuen Origami stark mathematisch geprägt. Es existieren Programme, die eine Grundstruktur für beliebige Objekte kreieren können. Ein weiteres Beispiel von Mathematik im Bereich des Origami ist das Problem der flachen Faltbarkeit (Kapitel 3.2). Dabei geht es darum zu entscheiden, ob ein bestimmtes Faltmuster flach faltbar ist. Wie so ein Faltmuster aufgebaut ist, wird im nächsten Kapitel erklärt.

3.1.1 Faltmuster

Bei klassischen Origami lässt sich der Faltvorgang meist mit Schritt-für-Schritt Darstellungen beschreiben. Für Origami-Parkettierungen ist dies selten möglich, weil mehrere oder alle Falten zeitgleich gebildet werden müssen. Deshalb wurde eine neue Art gefunden, um Faltanleitungen zu machen: **Faltmuster**. Ein Faltmuster ist das, was entsteht, wenn ein gefaltetes Origami auseinandergefaltet wird, Abbildung 3.3 zeigt das Faltmuster eines Kranichs. Umgekehrt entsteht der Kranich, indem alle eingezeichneten Linien

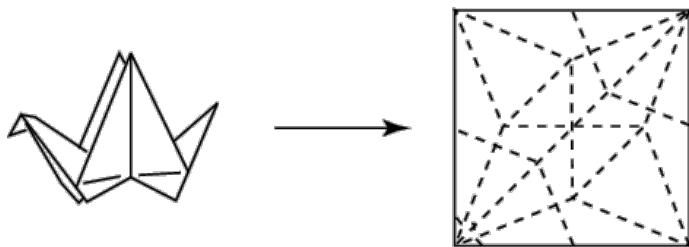


Abb. 3.3: Das Faltmuster eines klassischen Kranichs [bild1]

gefaltet werden.

Mathematisch formuliert ist ein Faltmuster eine eins-zu-eins Zuweisung eines gefalteten Objektes auf eine Ebene, wobei die Falten durch Strecken dargestellt werden. Diese Strecken werden immer noch **Falten** genannt, die Schnittpunkte der Falten **Knoten** und die Teilflächen zwischen den Falten **Facetten**.

Wenn ein Origami gefaltet und wieder geöffnet wird, ist ein weiteres Merkmal sichtbar: Es gibt Tal- und Bergfalten. Abbildung 3.2 zeigt links eine **Talfalte** und rechts eine **Bergfalte**. Die **Vorderseite** eines Papiers oder gefalteten Origami ist definiert als die Seite, auf der das Faltmuster aufgezeichnet wird. Bei einer Talfalte wird die Vorderseite auf die Vorderseite gefaltet, bei einer Bergfalte die Rückseite auf die Rückseite. Es gibt keine einheitliche Regel, wie Tal- und Bergfalten in Faltmustern gekennzeichnet werden. In dieser Arbeit sind Talfalten rot und Bergfalten blau eingefärbt, die Linien sind immer durchgezogen.

Nicht bei allen, aber bei den meisten Faltmustern werden Talfalten von Bergfalten unterschieden. Ist dies der Fall, heisst das Faltmuster **bestimmt**, es besitzt eine **Faltenzuordnung**. In Abbildung 3.3 sind die Falten nicht eingefärbt, also nicht zugeordnet. Das Faltmuster heisst deshalb **unbestimmt**.

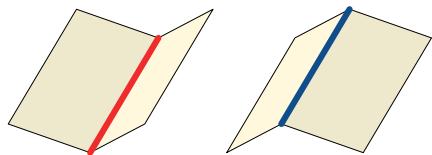


Abb. 3.2: Berg- und Talfalten

3.1.2 Operationsraum

Ein wichtiger Teil der Mathematik ist, die realen Objekte in den mathematischen Raum zu abstrahieren. Um Origami zu beschreiben, müssen zwei Eigenschaften von Papier berücksichtigt werden:

- *Undehnbares Papier*: Die gefaltete Form eines Origami ist eine Deformation einer Ebene ohne Streckungen oder Scherungen. Die Abstände zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Papier bleiben gleich. Papier ist **isometrisch**.

- *Keine Selbstüberschneidung:* Papier kann sich nicht durchdringen, das heisst keine zwei Punkte befinden sich an der gleichen Position. Papier ist **injektiv**. Die Injektivität wird allerdings nicht streng eingehalten. Es wird zwar berücksichtigt, dass sich Papier nicht durchdringen darf, aber da meistens mit einer Papierdicke von 0 gearbeitet wird, können unterschiedliche Papierschichten die gleiche Position einnehmen.

Das bedeutet, dass alle Modelle, die für die Beschreibung von Origami verwendet werden, diese zwei Grundbedingungen erfüllen müssen. Es gibt verschiedene solcher Modelle, die für unterschiedliche Betrachtungen geeignet sind. Da wir Origami-Parkettierungen aus Twist-Fliesen behandeln, reicht das Modell des flach-faltbaren Origami aus. Dieses Modell hat zusätzlich zu den beiden Grundbedingungen folgende Einschränkung: Alle Objekte müssen in einer Ebene liegen. Das bedeutet, dass alle Facetten ungekrümmt und koplanar sind. Alle Faltwinkel betragen 0 oder $\pm\pi$, wobei ein Faltwinkel von 0 einer ungefalteten Falte entspricht. Ausserdem beträgt die Papierdicke 0.

Mit diesem Modell existiert ein Origami nur in zwei Zuständen: ungefaltet und komplett gefaltet. Origami, die sich im Faltprozess befinden, sind in diesem Modell nicht enthalten. Für unsere Zwecke aber genügt dieses Modell.

3.2 Flache Faltbarkeit

In diesem Kapitel werden wir die **flache Faltbarkeit** diskutieren. Was bedeutet es, wenn ein Faltmuster flach faltbar ist? Das bedeutet, dass das gefaltete Objekt in einer Ebene liegt. Wir können also das Objekt flachdrücken ohne neue Falten zu kreieren. Das ist nicht immer möglich. Versuchen Sie es selbst: Zeichnen Sie auf ein Papier drei Strahlen, die im selben Punkt beginnen. Dann falten Sie das Papier entlang den Strahlen, wobei Berg- und Talfalten beliebig gewählt werden können. Schaffen Sie es, dass das gefaltete Objekt flach wird, ohne neue Falten zu kreieren? Nein? Warum das nicht möglich ist, zeigt Satz 1.

Die flache Faltbarkeit wird in zwei Phänomene aufgeteilt. Die lokale und die globale flache Faltbarkeit. Die **lokale** Faltbarkeit betrachtet jeden Knoten des Faltmusters isoliert, und prüft, ob dieser Knoten mit beliebig kleiner Umgebung flach faltbar ist. Die **globale** flache Faltbarkeit prüft, ob die Gesamtheit aller Knoten flach faltbar ist. Das Problem der globalen flachen Faltbarkeit ist im allgemeinen Fall NP-vollständig, das heisst, es gibt wahrscheinlich keine effiziente Lösung um es zu berechnen. Für Origami-Parkette wie sie in dieser Arbeit beschrieben werden, ist die globale Faltbarkeit durch die nachfolgenden Sätze trotzdem gewährleistet. Dies weil Twist-Parkettierungen so aufgebaut sind, dass keine unerwarteten Interferenzen möglich sind.

3.2.1 Satz von Maekawa-Justin

Der Satz von Maekawa-Justin gibt eine Bedingung für die Anzahl und Art der Falten eines flach faltbaren Knotens. Er erklärt, warum ein Knoten mit 3 Kanten unmöglich flach faltbar ist. Der Satz lautet:

Satz 1: Satz von Maekawa-Justin

Seien M die Anzahl Bergfalten und V die Anzahl Talfalten eines flach faltbaren Knotens. So gilt:

$$M - V = \pm 2 \quad (3.1)$$

Beweis. Der Querschnitt eines gefalteten Knotens entspricht einem degenerierten Polygon (Abbildung 3.4). Die Falten des gefalteten Knotens entsprechen den Ecken des Polygons. Die Bergfalten haben den Winkel 0 und die Talfalten 2π . Somit ergibt die Innenwinkelsumme des Polygons $0M + 2\pi V$. Die allgemeine Formel für die Innenwinkelsumme ist $(n - 2)\pi$ wobei $n = M + V$. Die Gleichsetzung der Formeln führt zu:

$$(n - 2)\pi = 0M + 2\pi V \implies ((M + V) - 2)\pi = 2\pi V \implies M - V = 2$$

Werden alle Bergfalten zu Talfalten und umgekehrt, ergibt obige Gleichung $M - V = -2$, womit die Aussage bewiesen ist.² \square

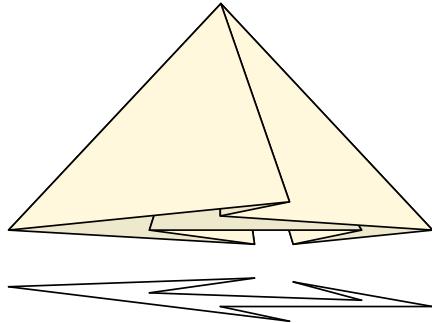


Abb. 3.4: Ein beliebiger Knoten mit seinem Querschnitt

Eine direkte Folgerung aus dem Satz von Maekawa-Justin ist, dass nur Knoten mit einer geraden Anzahl flach faltbar sind. Knoten mit einer ungeraden Anzahl können den Satz nicht erfüllen.

3.2.2 Satz von Kawasaki-Justin

Der Satz von Kawasaki-Justin stellt eine Bedingung an die Winkel zwischen den Falten.

²Beweis nach [2]

Satz 2: Satz von Kawasaki-Justin

Seien die Sektorwinkel eines flach faltbaren Knotens der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nummeriert, so gilt:

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_n = 0 \quad (3.2)$$

Beweis. Betrachten wir einen Kreis um einen flach faltbaren Knoten. Wenn wir den Knoten falten, entsteht aus dem Kreis ein Kreisbogen. Suchen wir uns einen Punkt P , der auf dem Kreisbogen und auf einer Falte liegt. Laufen wir von diesem Punkt P einmal der Kreislinie entlang, enden wir wieder bei P und haben dabei die Distanz $d = r * \alpha_1 - r * \alpha_2 + r * \alpha_3 - \dots - r * \alpha_n$ zurück. Die Vorzeichen alternieren, weil wir bei jeder Falte die Richtung wechseln und alle Falten einen Faltwinkel von $\pm\pi$ haben.

Wir landen am Ende wieder auf demselben Punkt P , weshalb gilt:

$$d = 0 = r * \alpha_1 - r * \alpha_2 + r * \alpha_3 - \dots - r * \alpha_n$$

Kürzen von r führt zu Gleichung (3.2).³ □

Der Satz von Kawasaki-Justin ignoriert, dass der volle Winkel, also die Summe aller Sektorwinkel eines Knotens, 2π beträgt. Beachten wir dies, erhalten wir folgende Gleichung für einen flach faltbaren Knoten:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n = \pi \quad (3.3)$$

Mit dieser Erkenntnis lässt sich der Satz von Kawasaki-Justin leichter anwenden.

3.2.3 Satz der Drei Facetten

Der Satz der Drei Facetten⁴ bestimmt ein Stück weit die Faltenzuordnung. Dabei betrachtet der Satz zwei Falten, die durch eine Facette miteinander verbunden sind.

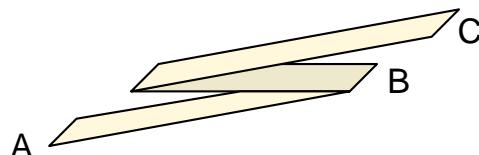


Abb. 3.5: Drei Facetten A , B und C .

³Beweis nach [2]

⁴Der Satz der Drei Facetten gehört zur globalen flachen Faltbarkeit und beruht auf den Justin Ordering Conditions, oft auch Justin Non-Crossing Conditions genannt, die in dieser Arbeit nicht erläutert werden. Die Justin Ordering Conditions vermeiden eine Durchdringung des Papiers.

Satz 3: Satz der Drei Facetten

Seien A, B und C drei Facetten, wobei in der gefalteten Form folgendes gelte: Die Facette C überlappt die Falte AB und die Facette A überlappt die Falte BC . Dann müssen die Facetten A und C auf unterschiedlichen Seiten von B liegen.

Mithilfe der Abbildung 3.5 sollte intuitiv klar sein, weshalb die Facetten auf unterschiedlichen Seiten liegen müssen. Der Versuch, beide Facetten auf die gleiche Seite zu falten, wird nur gelingen, wenn sich das Papier durchdringt, was nicht erlaubt ist. Oder wenn die Facette A bzw C gekürzt wird. Der Satz der Drei Facetten bedingt aber, dass die Facetten A und C grösser sind als die Facette B .

Die nächsten zwei Sätze sind Folgerungen des Satzes der Drei Facetten.

3.2.4 Satz vom Grossen-Kleinen-Grossen-Winkel

Betrachten wir drei benachbarte Sektoren B, A, D eines Knotens (Abbildung 3.6). Ist der mittlere Sektorwinkel A kleiner als die beiden anderen, gilt der Satz der Drei Facetten. Dieser bedingt, dass die Sektoren B und D auf unterschiedlichen Seiten von A liegen. Dies ist nur möglich, wenn die zwei Falten, die Sektor A begrenzen, eine entgegengesetzte Faltenzuordnung besitzen. Wir werden einen solchen Sektor mit **anto** bezeichnen. Ein Sektor, der von zwei gleichen Falten begrenzt wird, wird **iso** genannt.

Satz 4: Satz vom Grossen-Kleinen-Grossen-Winkel

Ist der Winkel eines Sektors kleiner als die Winkel der angrenzenden Sektoren, dann muss der Sektor anto sein.

3.2.5 Satz vom Einzigem Grössten Winkel

Dieser Satz gilt NUR für Knoten 4. Grades!

Satz 5: Satz vom Einzigem Grössten Winkel

Wenn es in einem Knoten 4. Grades einen einzigen grössten Sektor gibt, ist dieser Sektor iso.

Beweis. Betrachten wir einen beliebigen Knoten 4. Grades mit einem einzigen kleinsten Sektor A mit Sektorwinkel α . Dann ist Sektorwinkel γ des Sektors C nach dem Satz von Kawasaki-Justin⁵ der grösste.

⁵ $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$, siehe Kapitel 3.2.2

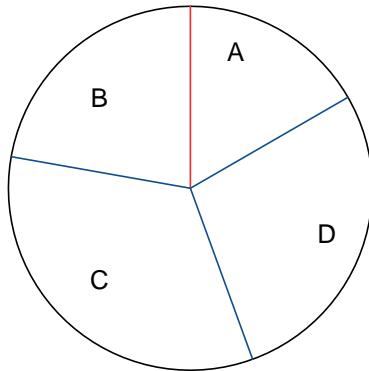


Abb. 3.6: Ein Knoten 4. Grades mit dem kleinsten Sektor A und dem grössten Sektor C .

Der Sektor A ist nach dem Satz vom Grossen-Kleinen-Grossen-Winkel anto, besitzt also eine Berg- und eine Talfalte. Um den Satz von Maekawa-Justin⁶ zu erfüllen, müssen die zwei noch unbestimmten Falten die gleiche Zuordnung haben. Diese beiden Falten begrenzen Sektor C , der somit iso ist. \square

3.3 Twists

Um Origami-Parkettierungen zu konstruieren, muss nicht das Rad neu erfunden werden. Es gibt verschiedene Grundbausteine, die dazu benutzt werden können. In dieser Arbeit werden flach faltbare Twists betrachtet, sie sind weit verbreitet und können vielfältig eingesetzt werden.

Ein flach faltbarer Twist besteht aus einem **zentralen Polygon**, das sich beim Faltprozess dreht, daher kommt der Name. Jeder Seite dieses Polygons wird ein Paar von parallelen Falten, genannt **Parallelfalten**, zugeordnet. Die Facetten zwischen den Parallelfalten werden **Klappen** genannt, die dreieckigen Facetten zwischen den Klappen sind **Keile**. Der Winkel α , genannt **Twistwinkel** ist der kleinere der zwei Basiswinkel und ist somit immer kleiner als π . Der Twistwinkel bleibt über den ganzen Twist konstant, ansonsten wäre der Twist nicht flach faltbar (siehe Satz von Kawasaki-Justin, Kapitel 3.2.2).

Wie bereits erwähnt, ist die Drehung des zentralen Polygons während des Faltprozesses charakteristisch für einen Twist, und zwar dreht sich das Polygon um den Winkel 2α (siehe Abbildung 3.7). Außerdem verschieben sich die Keile und die Klappen werden umgeklappt. Dieser Arbeit liegen hinten gefaltete Beispiele von Twists bei. Diese dürfen oder sollen für ein besseres Verständnis auseinander- und wieder zusammengefaltet werden.

⁶ $M - V = \pm 2$, siehe Kapitel 3.2.1

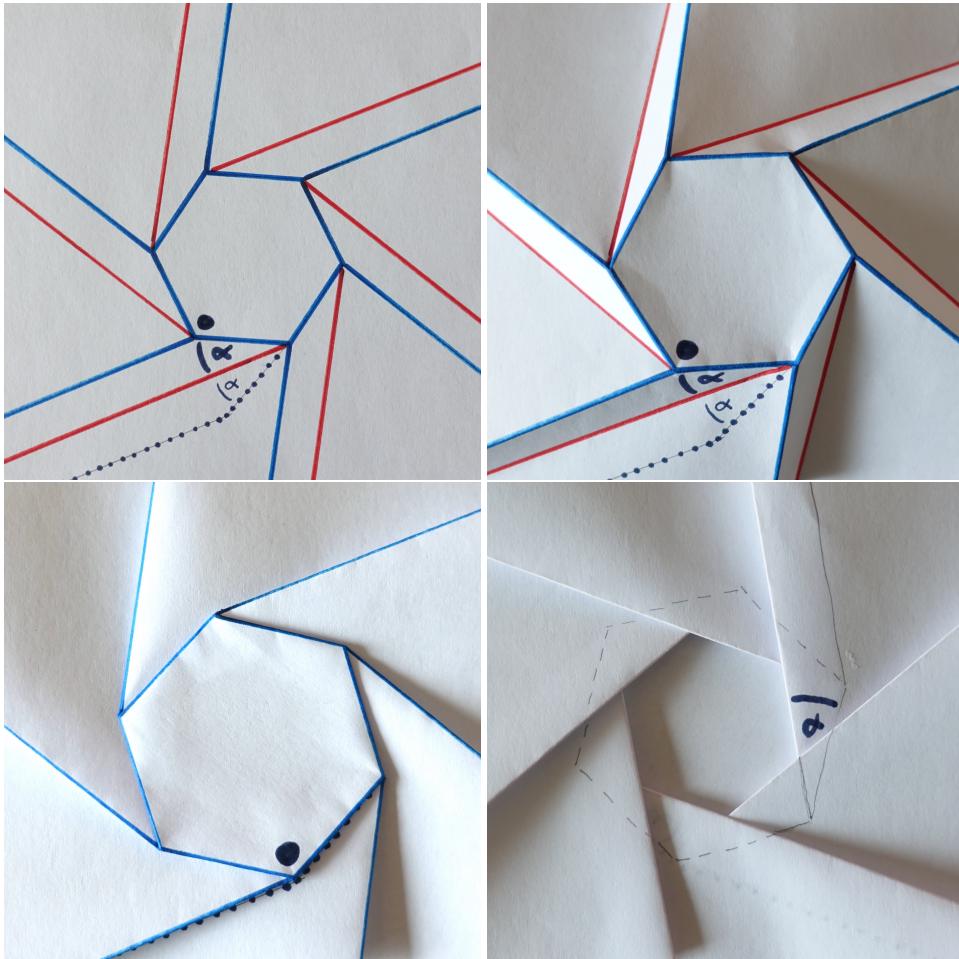


Abb. 3.7: Der Faltprozess eines Twists

Was passiert, wenn wir den Winkel α vergrössern? Das zentrale Polygon rotiert beim Faltprozess um den Winkel 2α , ein grösserer Winkel α resultiert somit in einer stärkeren Rotation. Wenn wir die Rückseite des Twists betrachten (Abbildung 3.7 unten rechts), sehen wir, dass die Klappen näher zusammenrücken und die Vertiefung in der Mitte kleiner wird, wird α grösser. Schrumpft die Vertiefung auf einen Punkt, hat die Parkettierung eine **geschlossene Rückseite**, ist die Vertiefung zu sehen heisst die Rückseite **offen**. Bei einer geschlossenen Rückseite ist der **kritische Winkel** α_{krit} erreicht. Wäre α grösser als der kritische Winkel, würden sich die Klappen in der Mitte überlagern. Weil aber jede Klappe über *und* unter einer anderen liegt, müssten sie sich durchdringen, was nicht möglich ist.

Der kritische Winkel hängt von der Anzahl Ecken n des zentralen Polygons und von der Faltenzuordnung ab. Der Einfachheit halber definieren wir aber den **sicheren Winkel** α_s , wobei alle Twists, für die $\alpha \leq \alpha_s$ gilt, flach faltbar sind. Unabhängig von der Faltenzuordnung, solange sie lokal flach faltbar ist.⁷

⁷Die Definition des Winkels α_s ist Teil der globalen flachen Faltbarkeit eines Twists. Für die totale

$$\alpha_s = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} & , n \leq 6 \\ \frac{2*\pi}{n} & , n \geq 6 \end{cases} \quad (3.4)$$

Nicht flach faltbare Twists

Neben den oben definierten flach faltbaren Twists gibt es andere Twists, die vom Aufbau her nicht flach faltbar sind. In Abbildung 3.8 ist ein Beispiel eines solchen Twists sichtbar. Der Twist ist in diesem Zustand stabil, er lässt sich nicht weiterdrehen und flach drücken. Vom Faltmuster her fällt dieser Twist nicht in unsere Definition, weil die Klappen keine parallelen Falten haben.

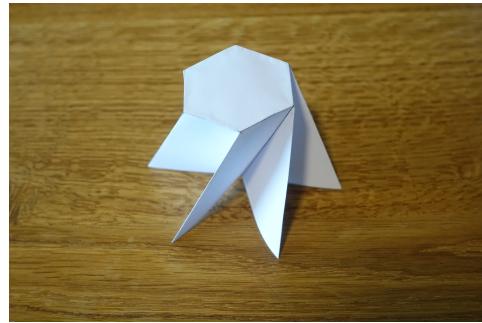


Abb. 3.8: Beispiel eines nicht flach faltbaren Twists

3.3.1 Zentrierte Twist-Fliesen

Um aus einem Twist eine Origami-Parkettierung zu gestalten, müssen mehrere Twists aneinanderfügt werden. Wir definieren einen Rand, um die Fläche eines Twists festzulegen. Wir begrenzen einen Twist immer auf eine vergrösserte Version des zentralen Polygons. Bei **zentrierten** Twist-Fliesen befindet sich die **Mitte der Klappe in der Mitte der Kante des Polygons**. Wenn wir zwei solche Fliesen verbinden, passen die Falten aufeinander, jedoch nicht die Faltenzuordnungen⁸ (in Abbildung 3.9 oben). Eine Falte ist aber nur faltbar, wenn die Faltenzuordnung nicht wechselt. Deshalb muss die Faltenzuordnung des einen Twists angepasst werden (in der Abbildung unten).

Die Faltenzuordnung einer Klappe ist unabhängig von der Faltenzuordnung der anderen Klappen desselben Twists. Die Zuordnung der Basisfalte (die des Polygons) ist im gefalteten Zustand gut erkennbar, siehe Abbildung 3.11. Wenn alle Basisfalten dieselbe Zuordnung haben heisst der Twist **zyklisch**.

Es passen nicht beliebige zyklische Twists zusammen, wie in Abbildung 3.10 sichtbar. Eine Falte muss beim Übergang von einer Fliese zur anderen in gleicher Richtung und mit der gleichen Zuordnung fortgesetzt werden. Dies ist der Fall, wenn die Breite der Klappe w (englisch width), definiert als Anteil der Fliesenkante, und der Winkel δ , mit

flache Faltbarkeit müssen die globale und die lokale flache Faltbarkeit erfüllt sein.

⁸Es ist möglich, dass die Faltenzuordnung passt, in diesem Beispiel tut sie das aber nicht.

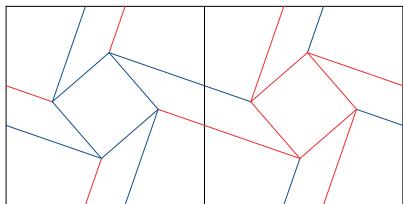
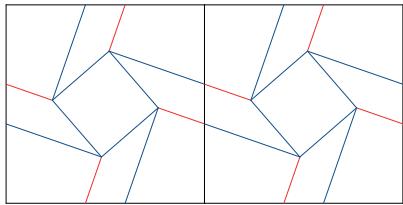


Abb. 3.9: zentrierte Twist-Fliesen mit $w = 0.2, \alpha = \pi/6$

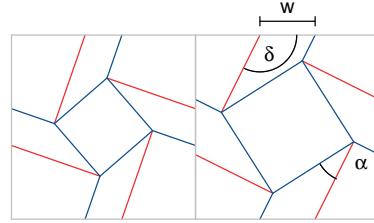


Abb. 3.10: Zwei Twists mit ungleichen α und w

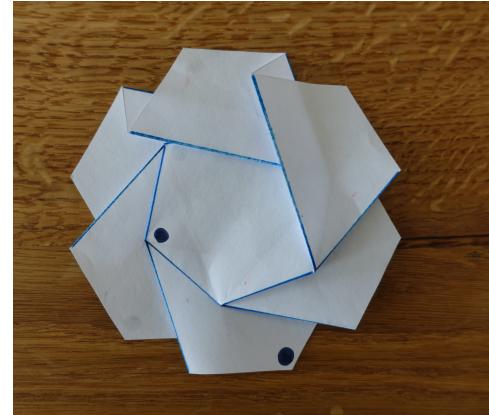
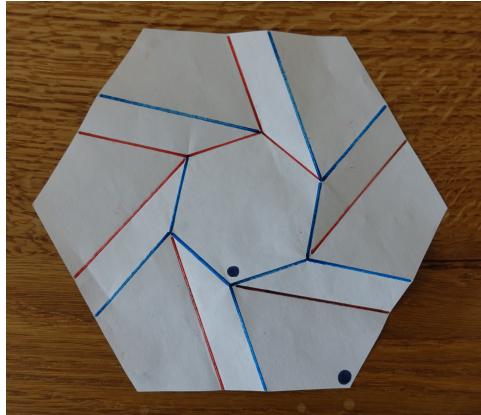


Abb. 3.11: Ein Beispiel eines nicht zyklischen Twists

dem die Falte auf die Fliesenkante trifft, gleich sind. Wenn w und δ gleich gewählt sind, können sogar unterschiedliche Polygone miteinander verbunden werden. Dies erweitert den Rahmen der möglichen Kombinationen von Fliesen sehr. Interessanterweise bleibt α bei allen Polygonen gleich, wenn δ gleich ist. Deshalb wird weiterhin der Winkel α und nicht der Winkel δ angegeben.

Doch aus welchen Polygonen können zentrierte Twists dieser Sorte entstehen? Die Fliese bzw. das zentrale Polygon muss ein **zyklisches Polygon** sein.⁹ Ein **zyklisches Polygon** ist ein Polygon, für welches ein Umkreis existiert. Dies trifft auf alle Dreiecke und alle regelmässigen Polygone zu. Außerdem auch für alle Polygone, die an-den-Ecken-geteilte-regelmässige-Polygone sind. Bei weiteren Polygonen muss geprüft werden, ob sie zyklisch sind.

⁹Begründung unbekannt

3.3.2 Versetzte Twist-Fliesen

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, zwei Fliesen zu verbinden. Wir drehen das zentrale Polygon relativ zur Fliese, sodass die Klappe im rechten Winkel zur Kante steht, wie in Abbildung 3.12. Nun stimmt der **Mittelpunkt der Klappe nicht mit dem Mittelpunkt der Kante überein**, weshalb wir den Twist **versetzt** nennen. Bei versetzten Twists wird der Versatz der Klappenmitte (KM) zur Fliesenmitte (FM), angegeben als Anteil der Kante, mit d bezeichnet (Abbildung 3.12). Der Winkel α ist nicht mehr relevant, aber w muss weiterhin angegeben werden. Da der Parameter α nicht angegeben wird, können wir nicht mit diesem Parameter kontrollieren, ob α_s überschritten wurde. Interessanterweise ist aber die Rückseite geschlossen, wenn $w = 2|d|$. Für einen flach faltbaren Twist muss¹⁰ also folgendes gelten:

$$w \leq 2|d| \quad (3.5)$$

Das Verbinden von zwei Twists funktioniert hier anders als bei den zentralen Twists. Werden die Twist-Fliesen wie vorhin aneinandergehängt, stimmt die Position der Falten nicht überein (Abbildung 3.12). Deshalb muss bei jedem Fliesenwechsel das Vorzeichen von d gewechselt werden.

Überlegen wir uns die Folgen dieser Bedingung. Bei einem Knoten mit 4 Kanten kann wechselt ohne Probleme bei jeder Kante das Vorzeichen. Bei einem Knoten mit 3 Kanten hat der erste Sektor $+d$, der zweite $-d$, der dritte $+d$. Zwischen dem dritten und benachbarten ersten Sektor haben wir kein Vorzeichenwechsel. Dieses Problem haben wir bei allen Knoten mit ungerader Kantenanzahl, also dürfen wir nur Knoten mit einer geraden Anzahl Kanten verwenden. Parkettierungen mit dieser Eigenschaft heißen **zweifärbbar**. Also wenn sich mit zwei Farben einfärben lässt, sodass zwei anliegende Fliesen nie dieselbe Farbe haben.

Die Verwendung versetzter Twist-Fliesen ist weiter eingeschränkt. Es können nicht beliebige Polygone als Fliese bzw. als zentrales Polygon verwendet werden. Das Polygon muss zyklisch sein und brocardsch. Ein **brocardsches Polygon** ist ein Polygon, für welches ein Punkt X existiert, sodass gilt: $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$. Dies ist für alle regelmässigen Polygone und alle Dreiecke [6] der Fall. Bei anderen Polygonen muss dies geprüft werden.

¹⁰Die Umgehung dieser Regel ist zu spezifisch, um hier aufgeführt zu werden.

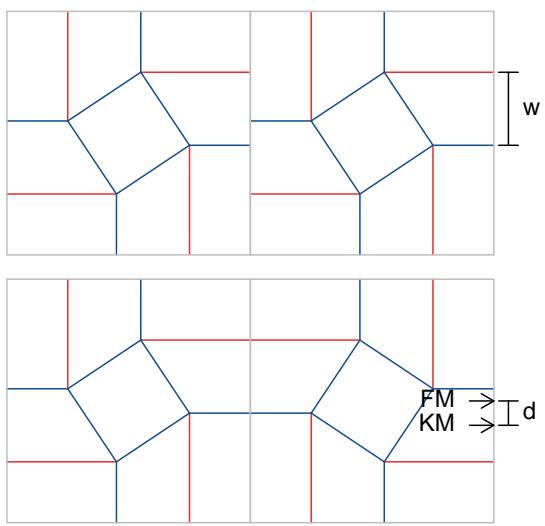


Abb. 3.12: Versetzte Twist-Fliesen mit
 $w = 0.3$, $|d| = 0.1$

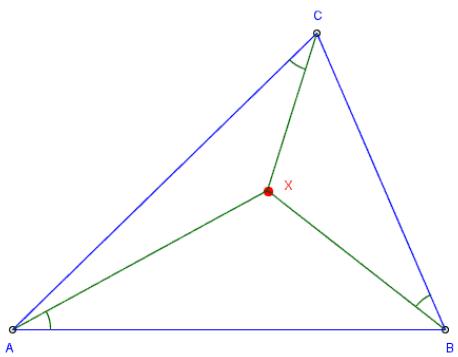


Abb. 3.13: Ein Dreieck mit dem brocard-schen Punkt X [bild8]

4 Entstehung einer Origami-Parkettierung

In den letzten Kapiteln haben wir uns mit Parkettierungen und Origami separat befasst. Dieses Kapitel erläutert nun, wie mit dem Wissen der beiden Teilbereiche eine eigene Origami-Parkettierung kreiert werden kann.

Zuerst muss entschieden werden, ob die Origami-Parkettierung aus versetzten oder zentrierten Twists bestehen soll und welche Parkettierung verwendet wird. Bei der Wahl der Parkettierung muss folgendes beachtet werden:

- Bei zentrierten Twists müssen die Fliesen der Parkettierung *zyklische* Polygone sein.
- Bei versetzten Twists müssen die Fliesen der Parkettierungen *zyklische, brocardsche* Polygone sein. Außerdem muss die Parkettierung zweifärbbar sein.
- Die Parkettierung muss **kantentreu** sein. Ein Negativbeispiel wäre eine Ziegelsteinmauer, bei der die Ziegel unterschiedlicher Reihen nicht am gleichen Ort aufhören.

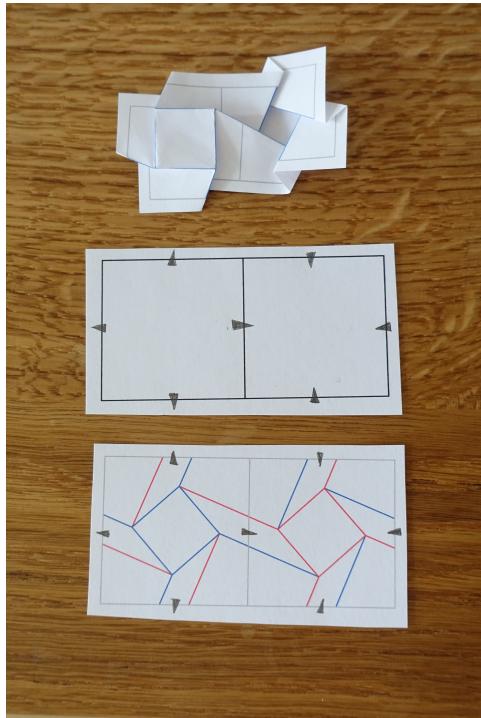
Ist die Parkettierung festgelegt, werden die Parameter w und α bzw d gewählt. Bei der Parameterwahl müssen die Gleichungen (3.4) bzw. (3.5) beachtet werden.

Für die Faltenzuordnung gibt es verschiedene Regeln, je nachdem ob zentrierte oder versetzte Twists verwendet werden:

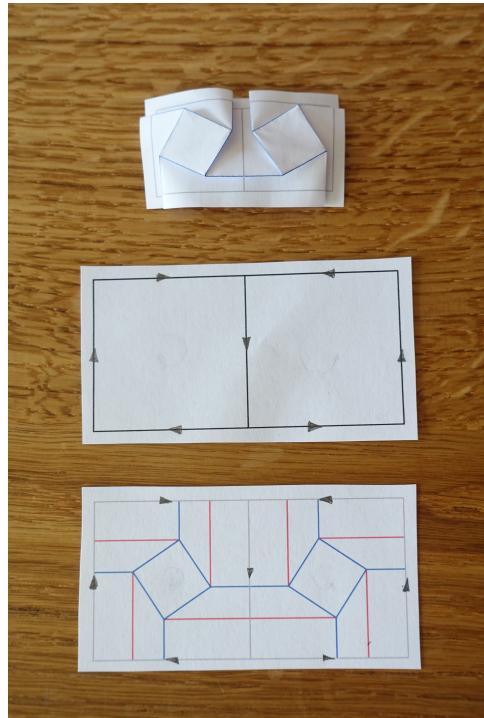
Zentrierte Twists

Betrachten wir zwei benachbarte zentrierte Twists (Abbildung 4.1a). Der linke Twist liegt "über" dem rechten, also von den Papierschichten her zwei Ebenen höher liegt. Das liegt daran, dass die Basisfalte des linken Twists eine Bergfalte ist und die des rechten Twists eine Talfalte. Um die Faltenzuordnung zu bestimmen, muss also zuerst festgelegt werden, welche Twists über welchen liegen sollen. Dies zeichnen wir in der Parkettierung mithilfe von Pfeilköpfen ein, die von "oben" nach "unten" zeigen. Da die Klappen unabhängig voneinander sind, kann für jede Fliesenkante individuell eine Richtung gewählt werden. Um zyklische Twists zu bekommen, müssen aber alle Pfeilköpfe entweder weg oder zu einer Fliese zeigen, wie in Abbildung 4.1a.

Sind die Pfeilköpfe bestimmt, wird das unbestimmte Faltmuster über die Parkettierung gelegt. Nun werden die Falten folgendermassen zugeordnet: Die Basisfalte des oberen



(a) Zwei zentrierte Twists; der linke Twist liegt "über" dem rechten



(b) Zwei versetzte Twists; beide Twists liegen "oben"

Abb. 4.1: Das Faltmuster und gefaltete Bild eines Twists

Knotens ist eine Bergfalte, die Basisfalte des unteren eine Talfalte. Die Parallelfalte beim spitzen Winkel hat eine entgegengesetzte Zuordnung zur Basisfalte, die Parallelfalte beim stumpfen Winkel hat die gleiche Zuordnung wie die Basisfalte.¹

Versetzte Twists

Da bei versetzten Twists die zwei Basisfalten einer Klappe die gleiche Zuordnung haben, liegen zwei anliegende Twists beide oben bzw. unten. Die Pfeile können deshalb nicht von einer Fliese zur anderen zeigen. Aber wenn wir der Twist-Kante folgen, können wir auch "hinunterfallen" bzw. "aufsteigen". Deshalb werden die Pfeilköpfe entlang der Twist-Kanten gezeichnet, wobei sie von oben nach unten zeigen. Sollen zyklische Twists entstehen, müssen die Pfeile einer Fliese im Kreis zeigen, wie in Abbildung 4.1b.

Nun wird das unbestimmte Faltmuster über die Parkettierung gelegt. Wie oben erwähnt, muss sich das Vorzeichen von d bei benachbarten Fliesen unterscheiden. Dabei kann gewählt werden, ob die erste Fliese ein positives oder ein negatives d besitzt. Die Vorzeichen von d auf den anderen Fliesen ergeben sich dann daraus. So bekommt jede Fliese ihr unbestimmtes Faltmuster. Bei der Faltenzuordnung ist die Zuordnung der Parallelfalten fix (der Pfeilkopf zeigt von der Berg- zur Talfalte), und die Basisfalte nimmt

¹Die Zuordnung der Parallelfalten kann auch umgekehrt sein. Dies jedoch nur bei Spezialfällen, deren Ausführung hier nicht verhältnismässig wäre.

die Zuordnung der Parallelfalte an, die im stumpfen Winkel zu ihr steht. Ändert sich das Vorzeichen von d , ändert sich auch die Zuordnung der Basisfalte.

5 Symmetriebetrachtungen

Die vorigen Kapitel geben einen Überblick darüber, wie Symmetrien aufgebaut sind, dass Parkettierungen Symmetrien haben und wie eine Twist-Parkettierung konstruiert wird. Dieses Kapitel beantwortet nun die Fragestellung dieser Arbeit:

Wenn eine Parkettierung eine bestimmte Symmetrie enthält, welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit diese Symmetrie ebenfalls eine Symmetrie der Origami-Parkettierung ist?

Zur Beantwortung dieser Frage habe ich die Symmetriegruppe von verschiedensten Beispielen aus [4] bestimmt. Der ursprüngliche Ansatz, die Symmetriegruppe einer Origami-Parkettierung direkt aus der Symmetriegruppe der Parkettierung abzuleiten, funktionierte aber nicht. Deshalb reduzierte ich die Fragestellung auf einzelne Symmetrien. In einer Tabelle, die im digitalen Anhang zu finden ist, wurden alle vermutlich relevanten Eigenschaften der Symmetrien der Parkettierungen festgehalten. So konnte ich erfassen, welche Eigenschaften dazu beitragen, eine Symmetrie in der Origami-Parkettierung zu ermöglichen oder verhindern. Nach der Auswertung der Daten suchte ich mathematische Begründungen für die gefundenen Regelmässigkeiten.

5.1 Resultate

Die folgenden Beobachtungen gelten ausschliesslich für Twist-Parkettierungen, wobei es keine Rolle spielt, ob sie zentriert oder versetzt sind. Als Twist-Parkettierung gelten alle Parkettierungen, die wie in Kapitel 3.3 und 4 beschrieben aufgebaut sind. Für andersartige Origami-Parkettierungen sind diese Beobachtungen nicht garantiert.

Beobachtung 1

Alle Symmetrien des unbestimmten Faltmusters sind auch Symmetrien der Parkettierung.

Erklärung Für die Erklärung ist zentral, dass die Symmetriegruppe einer Twist-Fliese eine Teilmenge der Symmetriegruppe der Twistgrenze ist. Dies ist der Fall, weil eine Twist-Fliese eine orientierte Version derjenigen Fliese ist, die aus der Twistgrenze besteht.

Bei einem unbestimmten Faltmuster (Abbildung 5.1, links) lassen sich die Twistgrenzen einzeichnen (Abbildung mitte). Die Twistgrenzen sind eindeutig, weil die zentralen Polygone ähnlich zu den Twistgrenzen sind. Durch das Hinzufügen der Twistgrenzen

ändert sich die Symmetriegruppe des Faltmusters nicht, weil die Symmetriegruppe der Twistgrenze die Symmetriegruppe des Twists enthält. Und sich diese Symmetrien auf der Parkettierung an der gleichen Stelle befinden.

Das Faltmuster mit Twistgrenzen kann als Parkettierung mit orientiertem Flieseninhalt betrachtet werden, wobei die Orientierungen durch die Faltmuster der Twist-Fliesen gegeben sind. Nennen wir diese orientierte Parkettierung \mathcal{T}_O und die Parkettierung ohne Orientierungen \mathcal{T} (Abbildung rechts). So gilt $S(\mathcal{T}_O) \subseteq S(\mathcal{T})$ (siehe Kapitel 2.2). Das unbestimmte Faltmuster besitzt dieselben Symmetrien wie \mathcal{T}_O , also sind auch alle Symmetrien des unbestimmten Faltmusters in $S(\mathcal{T})$ enthalten, was zu begründen war.

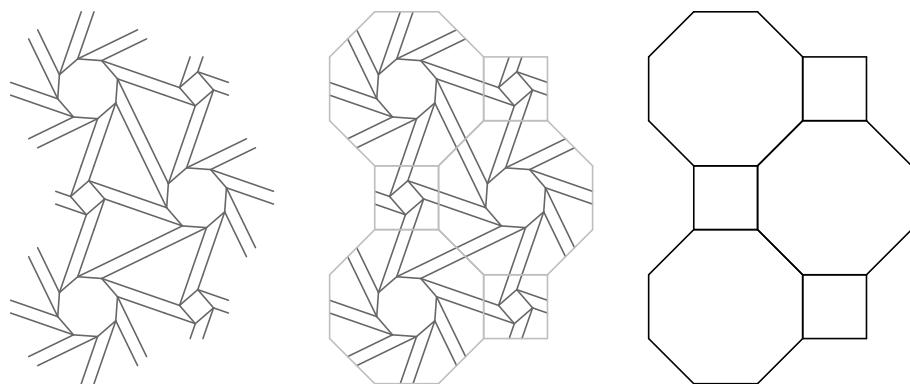


Abb. 5.1: *links:* ein unbestimmtes Faltmuster
mitte: ein unbestimmtes Faltmuster mit eingezeichneten Twistgrenzen bzw.
die zugrundeliegende Parkettierung mit orientierten Fliesen
rechts: die zugrundeliegende Parkettierung ohne Orientierung

Beobachtung 2

Alle Symmetrien des bestimmten Faltmusters sind auch Symmetrien des unbestimmten Faltmusters.

Oder anders gesagt: Die Symmetriegruppe des bestimmten Faltmusters ist eine Teilmenge der Symmetriegruppe des unbestimmten Faltmusters.

Erklärung Dieses Phänomen kann gleich angegangen werden wie die vorangegangene Beobachtung. Das bestimmte Faltmuster ist eine orientierte Variante des unbestimmten Faltmusters. Also sind die Symmetrien des bestimmten Faltmusters eine Teilmenge der Symmetrien des unbestimmten Faltmusters.

Beobachtung 3

Die Vorderseite der gefalteten Origami-Parkettierung besitzt dieselbe Symmetriegruppe wie das bestimmte Faltmuster

Erklärung Hierfür müssen wir uns nochmals mit einzelnen Twists befassen. Das Faltmuster eines Twists hat die gleiche Rotationssymmetrie wie der gefaltete Twist (Abbildung 5.2) und das Faltmuster sowie der gefaltete Twist haben keine Spiegelungen. Die Symmetriegruppen der beiden Objekte sind somit identisch. Wenn wir nun bei der Entstehung einer Origami-Parkettierung die Fliesen der Parkettierung durch das bestimmte Faltmuster von Twists ersetzen, erhalten wir das Faltmuster. Dieser Vorgang bewirkt eine Orientierung der Fliesen, welche die Symmetriegruppe der Parkettierung einschränkt.

Gehen wir zurück zur ursprünglichen Parkettierung und ersetzen die Fliesen diesmal nicht durch Faltmuster von Twists, sondern durch die Twists selber. Auf diese Weise erhalten wir die gefaltete Origami-Parkettierung. Dieser Vorgang bewirkt ebenfalls eine Orientierung der Fliesen, welche die Symmetriegruppe der Parkettierung einschränkt. Da beide Orientierungen, die des Faltmusters und die der Origami-Parkettierung, dieselbe Symmetriegruppe besitzen, werden die Symmetriegruppen der Parkettierungen in gleicher Weise eingeschränkt (Kapitel 2.2) und sind somit identisch.

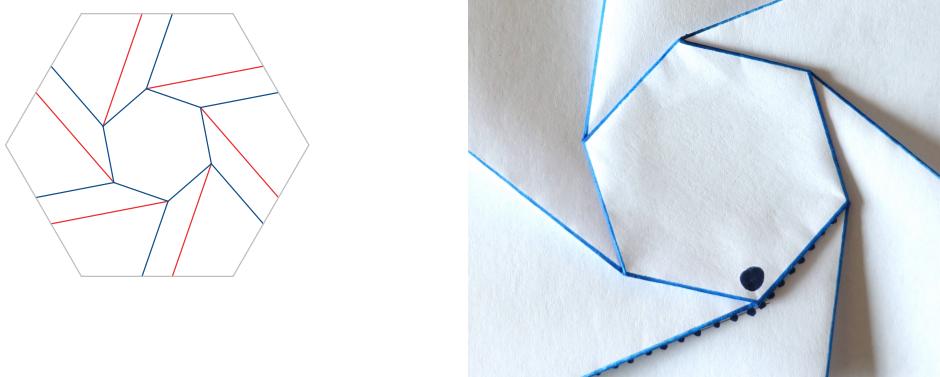


Abb. 5.2: Das Faltmuster und gefaltete Bild eines Twists

5.1.1 Zentrierte Twist-Parkettierungen

Die folgenden Beobachtungen gelten ausschliesslich für **zentrierte** Twist-Parkettierungen!

Beobachtung 4

Das unbestimmte Faltmuster enthält keine Spiegelungen.

Erklärung Betrachten wir das Faltmuster eines beliebigen zentrierten Twists: die Klappen entfernen sich in unserem Beispiel (Abbildung 5.3 links) vom zentralen Polygon im Uhrzeigersinn. Spiegeln wir den Twist, entfernen sich die Klappen im Gegenuhrzeigersinn. Durch den Wechsel der Umlaufrichtung wurde α verändert, und zwar zu $\pi - \alpha$, wie in Abbildung 5.3 dargestellt. Der Winkel α muss aber für alle Twist-Fliesen einer Origami-Parkettierung gleich sein (siehe Kapitel 3.3.1). Weil diese Bedingung nicht erfüllt wird, können diese zwei Fliesen nicht in der selben Origami-Parkettierung, und somit nicht im selben unbestimmten Faltmuster, existieren. Folglich besitzt ein unbestimmtes Faltmuster keine Spiegelungen, da eine Spiegelung eine unmögliche Fliese implementieren würde.

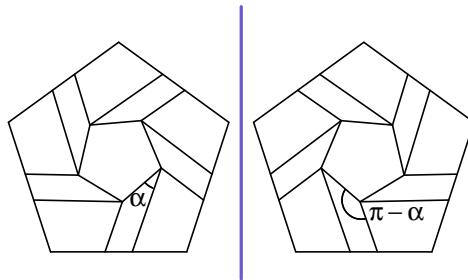


Abb. 5.3: zwei gespiegelte zentrierte Twists

Aus dieser Beobachtung folgt, dass unbestimmte Faltmuster auch keine Gleitspiegelungen enthalten, weil eine Gleitspiegelung eine Spiegelung beinhaltet. Diese Erkenntnisse gelten nach Beobachtungen 2 und 3 auch für bestimmte Faltmuster und für die Vorderseiten der Origami-Parkettierungen.

Rotationszentren

Beobachtung 5: Kantenmitte

Liegt ein Rotationszentrum der Parkettierung auf einer Kantenmitte, so ist es auch ein Rotationszentrum des unbestimmten Faltmusters. Jedoch nie ein Rotationszentrum des bestimmten Faltmusters.

Erklärung Die Kantenmitte ist auch die Mitte der Klappe. Das unbestimmte Faltmuster einer beliebigen Klappe ist ein Parallelogramm (siehe Abbildung 5.4) und Parallelogramme sind rotationssymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt. Die an die Klappe angrenzenden Elemente sind auch rotationssymmetrisch, sofern der Kantenmittelpunkt ein Rotationszentrum der zugrundeliegenden Parkettierung ist, was verlangt wird. Deshalb enthält das unbestimmte Faltmuster ein Rotationszentrum auf der Kantenmitte.

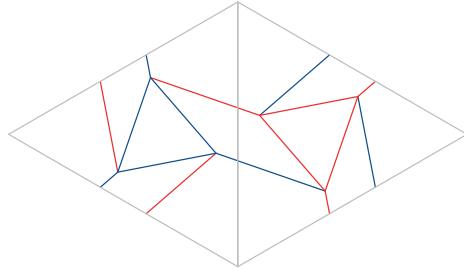


Abb. 5.4: Eine Klappe zwischen zwei dreieckigen Twists

Ein Rotationszentrum auf der Kantenmitte ist aber nie ein Rotationszentrum des bestimmten Faltmusters, weil die zwei Parallelfalten eine unterschiedliche Zuordnung haben (siehe Kapitel 3.3) und die Klappe somit nicht rotationssymmetrisch ist.

Beobachtung 6: Fliesenmitte

Liegt ein Rotationszentrum der Parkettierung auf einer Fliesenmitte, so ist es auch ein Rotationszentrum des unbestimmten Faltmusters.

Erklärung Das unbestimmte Faltmuster einer zentrierten Twist-Fliese ist zur Fliesenmitte M rotationssymmetrisch, weil α und w auf allen Seiten gleich sind (siehe Kapitel 3.3.1).

Beobachtung 7: Knoten

Liegt ein Rotationszentrum der Parkettierung auf einem Knoten, so ist es auch ein Rotationszentrum des unbestimmten Faltmusters.

Erklärung Knoten sind eigentlich auch Twists, beziehungsweise die Mittelpunkte von Twists. Im unbestimmten Faltmuster ist der Knoten umgeben von Klappen der fliesenfüllenden, vorhergesehenen Twists (Abbildung 5.5). Die dem Knoten näheren Parallelfalten der Klappen bilden das zentrale Polygon des neuen Twists. Jede Seite dieses Polygons wird von den ursprünglichen, parallelen Basisfalten begrenzt, die vom Polygon wegführen. Deshalb handelt es sich per Definition um einen Twist, womit für Knoten dieselben Regeln wie für Fliesenmitten gelten. Dass die Rotationszentren von Fliesenmitten

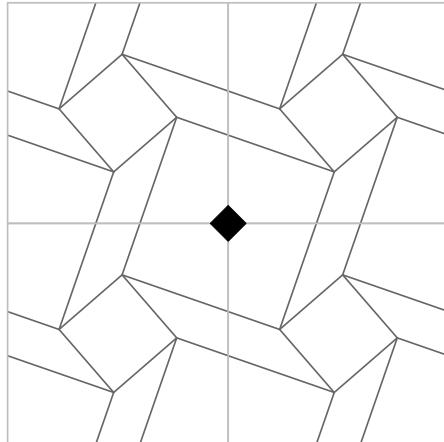


Abb. 5.5: Zwischen den vier offensichtlichen Twists verbirgt sich ein weiterer Twist.

auch Rotationszentren des unbestimmten Faltmusters sind, haben wir in Beobachtung 6 gezeigt.

Zu beachten ist, dass diese Beobachtung keine Aussage über das bestimmte Faltmuster und somit über die Origami-Parkettierung selbst macht, weil die Faltenzuordnung (in einem gewissen Rahmen) willkürlich gewählt werden kann.

5.1.2 Versetzte Twist-Parkettierungen

Die folgenden Beobachtungen gelten ausschliesslich für **versetzte, zyklische** Twist-Parkettierungen!

Beobachtung 8

Ist die Rückseite der Origami-Parkettierung nicht geschlossen, ist die Symmetriegruppe der Vorderseite der gefalteten Origami-Parkettierung identisch mit der Symmetriegruppe der Rückseite.

Erklärung Wie in Beobachtungen 1 und 3 beschrieben, lässt sich die gefaltete Origami-Parkettierung in die ursprüngliche Parkettierung unterteilen, ohne dass sich die Symmetriegruppe ändert. Dabei bleibt die Origami-Parkettierung gefaltet. Die Parkettierung mit **Orientierung**, die auf der **Vorderseite** entsteht, nennen wir $\mathcal{T}_{\mathcal{OV}}$, die der **Rückseite** $\mathcal{T}_{\mathcal{OR}}$. Die **nicht-orientierten** Parkettierungen nennen wir $\mathcal{T}_{\mathcal{NV}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{NR}}$. Nun stellen wir folgendes fest:

- Die Parkettierung $\mathcal{T}_{\mathcal{NR}}$, ist die Parkettierung $\mathcal{T}_{\mathcal{NV}}$ von der anderen Seite der Papierebene betrachtet. Also die gespiegelte Version von $\mathcal{T}_{\mathcal{NV}}$, meistens sogar dieselbe. Deshalb haben die beiden nicht-orientierten Parkettierungen die gleiche Symmetriegruppe.
 - Für jede Fliesenform existieren vier Orientierungen: der gefaltete Twist von vorne mit $+d$, mit $-d$ und die gefalteten von hinten mit $+d$ und $-d$. Diese Orientierungen haben alle die gleiche Symmetriegruppe (Abbildung 5.6).
- Weil die Symmetriegruppen der Orientierungen gleich sind, werden die Symmetriegruppen der beiden nicht-orientierten Parkettierungen durch die Orientierungen gleichermaßen eingeschränkt, wobei die beiden nicht-orientierten Parkettierungen isometrische Abbildungen voneinander sind. Deshalb ist $S(\mathcal{T}_{\mathcal{OV}})$ identisch mit $S(\mathcal{T}_{\mathcal{OR}})$.

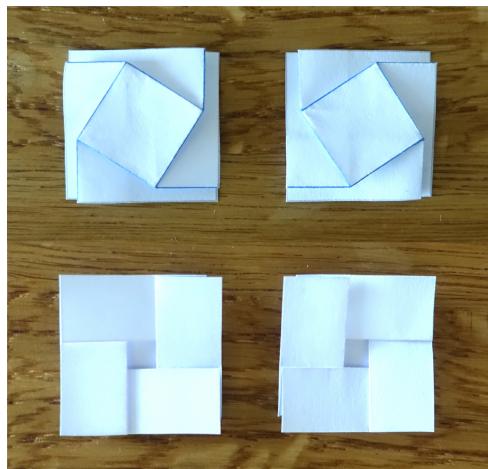


Abb. 5.6: Die vier Varianten desselben Twists, die alle dieselbe Symmetriegruppe haben

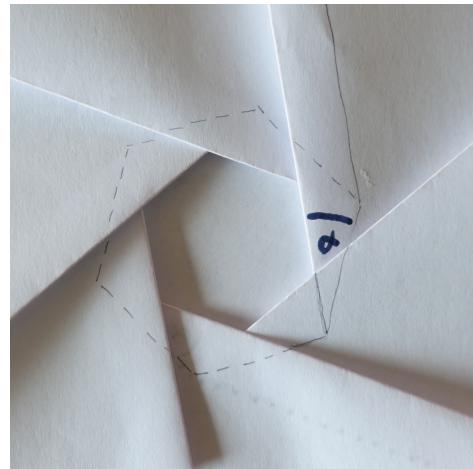


Abb. 5.7: Ein Twist mit geöffneter Rückseite

Beobachtung 9

Ist die Rückseite der Origami-Parkettierung geschlossen, ist dessen Symmetriegruppe identisch mit der Symmetriegruppe der Parkettierung.

Zu erwähnen ist nochmals, dass diese Beobachtung nur für zyklische, versetzte Origami-Parkettierungen gilt. Daraus folgt, dass *alle* Basisfalten die gleiche Faltenzuordnung haben. Deshalb befinden sich alle zentralen Polygone auf der einen Seite des Papiers, siehe Abbildung 5.8.

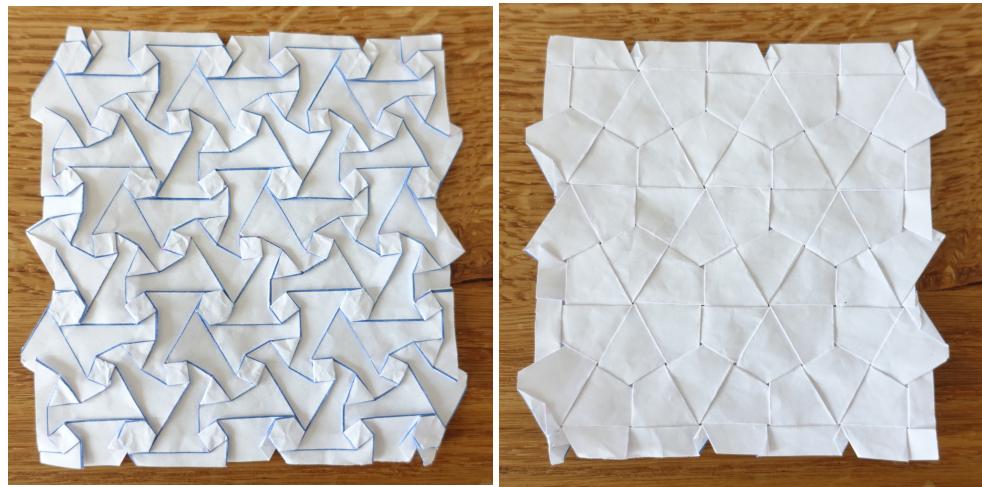


Abb. 5.8: *links* die Vorderseite einer Origami-Parkettierung mit geschlossener Rückseite *rechts* dessen Rückseite

Erklärung Ich fand keine Erklärung für dieses Phänomen. Diese Beobachtung bleibt deshalb als Vermutung stehen und wird nicht bewiesen.

Wir betrachten nun trotzdem die Entstehung der geschlossenen Rückseite. Ein zyklischer Twists (mit geöffneter Rückseite) ist von hinten hauptsächlich durch seine Vertiefung erkennbar (Abbildungen 5.6 und 5.7). Von dieser Vertiefung entfernen sich Falten, die zu den nächsten Vertiefung führen. Ist die Rückseite der Origami-Parkettierung geschlossen, reduziert sich jede einzelne Vertiefung auf einen Punkt. Die Falten führen nun von einem Punkt zum anderen (Abbildung 5.8, rechts).

Nun ist die entscheidende Frage: wo liegen diese Punkte? Diese Punkte liegen auf dem brocardschen Punkt des zentralen Polygons (Abbildung 5.7 oder Anhang, Kapitel 7.1). Bei regelmässigen Polygonen fällt dieser Punkt mit dem Umkreismittelpunkt¹ zusammen, also betrachten wir der Einfachheit halber nur Parkettierungen mir regelmässigen Polygonen. Ausserdem wurden für diese spezifische Beobachtung nur Parkettierungen mit regelmässigen Polygonen untersucht, also gilt diese Beobachtung für unregelmässige Polygone vielleicht nicht.

Um nun die geschlossene Rückseite aus der Parkettierung zu konstruieren, müssen die Umkreismittelpunkte von anliegenden Polygone miteinander verbunden werden und die Kanten der ursprünglichen Parkettierung entfernt werden. Mit diesem Wissen kann nun folgende Aussage formuliert werden:

Werden auf einer Parkettierung, die aus regelmässigen Polygone besteht, die Umkreismittelpunkte der anliegenden Polygone verbunden, bleibt die Symmetriegruppe dieselbe.

¹Der Punkt fällt auch mit dem Inkreismittelpunkt, den brocardschen und weiteren Punkten zusammen.

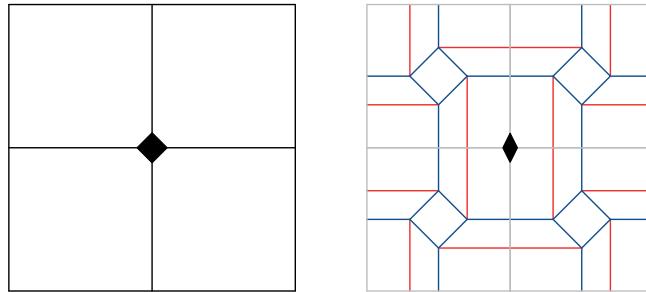


Abb. 5.9: links: ein 4-zähliges Rotationszentrum umgeben von vier Quadranten
rechts: ein Faltmuster, das auf der linken Parkettierung beruht

Rotationszentren

Beobachtung 10: Knoten

Liegt ein n -zähliges Rotationszentrum der Parkettierung auf einem Knoten mit n Kanten, so ist es ein $\frac{n}{2}$ -zähliges Rotationszentrum des Faltmusters.

Erklärung Von einem solchen Rotationszentrum laufen auf der Parkettierung n Kanten weg, ein Beispiel eines 4-zähligen Rotationszentrums mit vier wegführenden Kanten ist in Abbildung 5.9 zu sehen. Bei der Umwandlung der Parkettierung zur Origami-Parkettierung entsteht auf jeder Fliese ein Twist mit Klappen, die senkrecht zu den Kanten stehen. Also wird das ehemalige Rotationszentrum von einem n -gon umgeben sein, das aus Parallelfalten von Klappen besteht (Abbildung 5.9 rechts). Der Wert n ist immer gerade, weil die ursprüngliche Parkettierung zweifärbbar ist.² Nun alternieren die Seiten des n -gons zwischen den langen und kurzen Parallelfalten. Deshalb sind nicht n sondern $\frac{n}{2}$ Rotationen symmetrisch.

Beobachtung 11: Knoten

Liegt ein n -zähliges Rotationszentrum der Parkettierung auf einem Knoten mit $2n$ Kanten, so ist es auch ein n -zähliges Rotationszentrum des Faltmusters.

Erklärung Wir bauen auf der Erklärung von Beobachtung 10 auf. Ist ein n -zähliges Rotationszentrum auf der Parkettierung von $2n$ Kanten umgeben, so ist das Rotationszentrum auf dem Faltmuster $\frac{2n}{2}$, also n -zählig. Somit bleibt das Rotationszentrum vollständig erhalten. Ein Beispiel ist Abbildung 5.10.

²Dies ist eine Bedingung, die erfüllt sein muss, wenn versetzte Twist-Fliesen verwendet werden (siehe Kapitel 3.3.2).

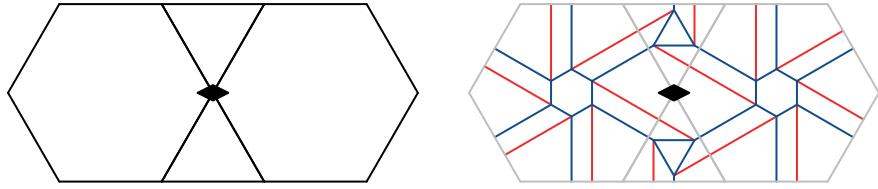


Abb. 5.10: *links:* ein 2-zähliges Rotationszentrum auf einem Knoten mit vier Kanten
rechts: ein 2-zähliges Rotationszentrum auf einem Faltmuster, entstanden aus der Parkettierung links

Beobachtung 12: Kantenmitte

Liegt ein Rotationszentrum der Parkettierung auf einer Kantenmitte, so ist es kein Rotationszentrum des Faltmusters.

Erklärung Die Kante der Parkettierung wird auf dem Faltmuster von einer einzelnen Klappe durchschnitten. Diese Klappe liegt aber erstens nicht mittig über der ehemaligen Kantenmitte (wo sich das Rotationszentrum befinden würde), weil es eben *versetzte* Twists sind. Und zweitens ist die Klappe eines versetzten Twists an sich nicht rotationssymmetrisch, wie z.B. in Abbildung 5.10 sichtbar. Deshalb existiert auf dem Faltmuster an dieser Stelle kein Rotationszentrum.

Beobachtung 13: Fliesenmitte

Liegt ein Rotationszentrum der Parkettierung auf einer Fliesenmitte, so ist es auch ein Rotationszentrum des Faltmusters.

Erklärung Nennen wir das Rotationszentrum R . Das Faltmuster der Twist-Fliese ist rotationssymmetrisch zu R , weil R der Mittelpunkt des Twists ist und w und d auf allen Seiten gleich sind (siehe Kapitel 3.3.2).

Achsen

Beobachtung 14

Wenn und nur wenn eine Spiegelachse einer Parkettierung ausschliesslich auf Kanten liegt, ist sie auch eine Spiegelachse des Faltmusters.

Erklärung Auf der Fliesenkante zwischen zwei verbundenen, versetzten Twists (mit gleichem zentralen Polygon) existiert eine Spiegelachse, weil d beim einen Twist positiv und

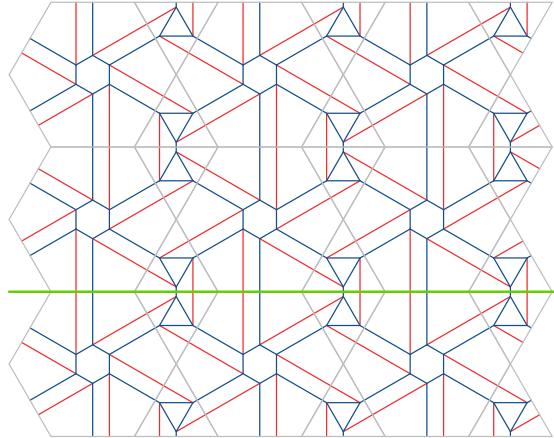


Abb. 5.11: Ein Faltungsmuster, das eine Spiegelachse enthält

beim anderen negativ ist. Folglich existiert eine Spiegelachse, wenn sie nur aus Fliesenkanten besteht (Abbildung 5.11).

Wenn eine Spiegelachse nicht ausschliesslich auf Kanten liegt, führt sie durch eine Fliese durch. Jede Fliese enthält einen Twist, der nicht Spiegelsymmetrisch ist. Darum existiert keine Spiegelachse, die durch Fliesen hindurchführt.

Beobachtung 15

Führt durch oder entlang einer Fliese T eine Gleitspiegelachse und sei T' die Fliese, auf die T bei einer Gleitspiegelung abgebildet wird. So ist die Gleitspiegelachse keine Symmetrie des Faltungsmusters, wenn zwischen T und T' eine ungerade Anzahl Fliesen liegen.

Erklärung Zwischen T und T' liegen eine ungerade Anzahl Fliesen, wenn T und T' bei einer Zweifärbung der Parkettierung dieselbe Farbe haben (Abbildung 5.12, links). Dieselbe Farbe bedeutet, die Twist-Fliesen besitzen dasselbe Vorzeichen bei d . (siehe Kapitel 3.3.2) Wird eine Twist-Fliese mit negativem d gespiegelt wird, entsteht eine Twist-Fliese mit positivem d . Im Falle einer Gleitspiegelachse auf dem Faltungsmuster würde der Twist T durch eine Spiegelung auf T' abgebildet werden. Weil aber T' und T dasselbe Vorzeichen haben, sind sie keine Spiegelbilder voneinander. Somit kann keine Gleitspiegelachse existieren.

5.2 Offene Fragen

Die folgende Fragen sind im Verlauf meiner Arbeit aufgetaucht, ohne dass ich sie beantworten konnte.

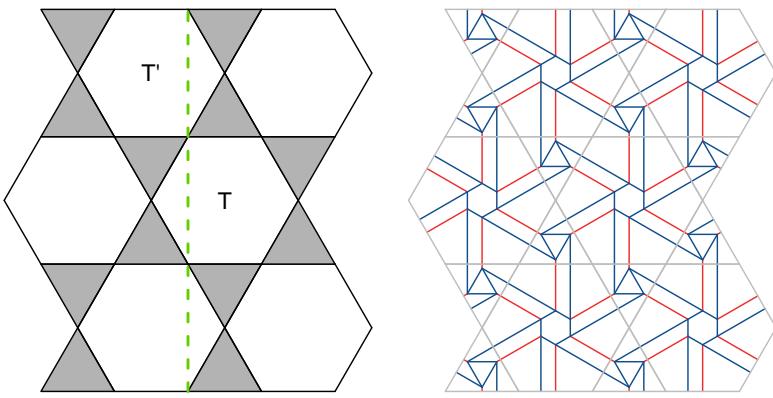


Abb. 5.12: *links:* eine zweigefärbte Parkettierung mit einer Gleitspiegelachse
rechts: die daraus resultierende Origami-Parkettierung

- Wann unterscheidet sich die Symmetrietypen des unbestimmten und des bestimmten Faltmusters?
- Wann wird eine Spiegelachse zur Gleitspiegelachse?

6 Dank

An dieser Stelle möchte ich einen herzlichen Dank aussprechen an die Personen, die mir geholfen haben, diese Maturarbeit zu schreiben.

Herrn Estermann danke ich dafür, dass er meine Maturarbeit betreut hat. Er hat sich dazu bereiterklärt, obwohl ich noch nicht wusste, was das Thema sein wird, obwohl er noch nie eine Maturarbeit betreut hat und obwohl er nicht viel über Origami wusste.

Als nächstes bedanke ich mich bei Prof. Hungerbühler. Er hat mir bei der Themenwahl geholfen und konnten mir sagen, welche Projekte realisierbar sind und welche nicht.

Zuletzt danke ich meinem Vater. Ich konnte ihm stets Fragen stellen und er hat meine Arbeit mehrmals durchgelesen. Ausserdem zeigte er mir, wie die Programme RStudio und LaTeX funktionieren, deren Gebrauch ich für diese Maturarbeit gelernt habe.

7 Anhang

7.1 Punkt der geschlossenen Rückseite

In Abbildung 7.1 ist die Konstruktion des Punktes P sichtbar. In P treffen sich die Klappen, wenn die Rückseite geschlossen ist. Was in dieser Arbeit nicht erklärt wurde, ist, dass das zentrale Polygon nicht zwingend innerhalb der Fliese liegen muss, wie es in der Abbildung zu sehen ist.

Bei der Konstruktion ist erkennbar, dass der Punkt P ein brocardscher Punkt des zentralen Polygons ist. Dieser Punkt fällt nicht mit dem Umkreismittelpunkt der Fliese zusammen und auch nicht mit einem brocardschen Punkt der Fliese.

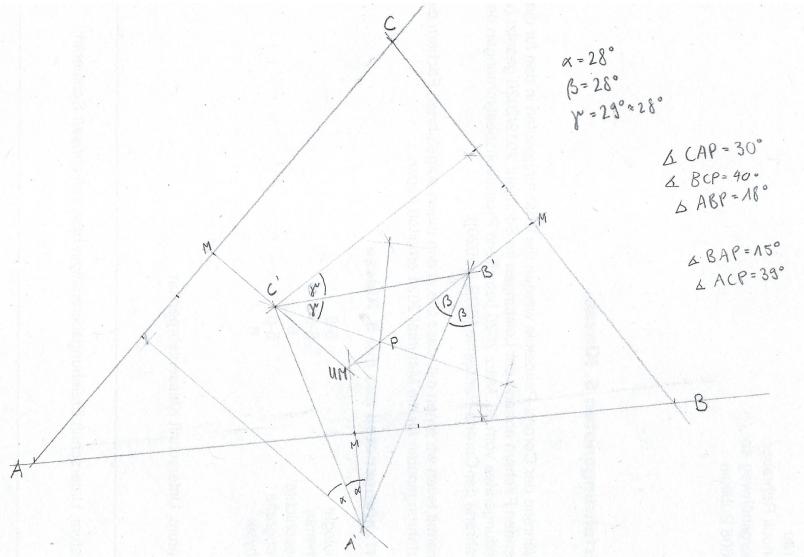


Abb. 7.1: P ist der Punkt der geschlossenen Rückseite, UM der Umkreismittelpunkt

7.2 Weiteres

Der Rest meines Anhangs ist digital zu finden unter:

https://github.com/origami-parkettierung/Maturarbeit_Anhang

Der digitale Teil meines Anhangs beinhaltet die wichtigsten Funktionen, die ich mit R geschrieben habe, um die Graphiken in dieser Arbeit zu zeichnen. Des weiteren ist die Excel-Datei vorhanden, in welcher ich die erhobenen Daten festgehalten und ausgewer-

tet habe. Die Parkettierungen und Origami-Parkettierungen, aus denen ich die Daten erhoben habe, sind ebenfalls vorhanden sowie ein PDF dieser Maturarbeit.

Literaturverzeichnis

- [1] G. B. Shephard Branko Grünbaum. *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Company, 1987.
- [2] Georg Eberharter. *Mathematischer Zugang zum Papierfalten*. Diplomarbeit eingereicht an der Technischen Universität Graz, 2017.
- [3] Norbert Hungerbühler. *Origami - von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens*. 2013.
- [4] Robert J. Lang. *Twists, Tilings and Tesselations. Mathematical Methods for Geometric Origami*. Taylor and Francis group, 2018.
- [5] Affinität. [https://de.wikipedia.org/wiki/Affinitat_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Affinitat_(Mathematik)).
- [6] A. Zaslavsky A. Akopyan P. Kozhevnikov A. Zaslavsky. *Brocard points*.

Bildquellenverzeichnis

- [bild1] Margherita Barile. Kawasaki's theorem. <https://mathworld.wolfram.com/KawasakiTheorem.html>.
- [bild2] Dainius. Difficult wet folding technique allows this vietnamese artist to create curved origami. <https://www.boredpanda.com/origami-wet-folding-animals-hoang-tien-quyet/>.
- [bild3] Flickr. https://live.staticflickr.com/65535/48931966351_b39cc67a7a_b.jpg.
- [bild4] Eric Gjerde. Arms of shiva. https://www.ericgjerde.com/wp-content/uploads/2013/03/Deltoidal-Trihexagonal-Tiling+-Stars-Crazy-Delicious_97899680_o.jpg?w=545&h=513&crop=1.
- [bild5] Eric Gjerde. Pinwheel tessellation, version 2, reverse, backlit. <https://www.ericgjerde.com/portfolio/pinwheels/#jp-carousel-304>.
- [bild6] Jonathan Grzywacz. Modular origami. <https://www.jonathangrzywacz.com/modular-origami>.
- [bild7] Pinterest. <https://i.pinimg.com/originals/8f/18/c4/8f18c46f2b7cd4e151d0dfbd32594ad5.jpg>.
- [bild8] Deko Dekov Sava Grozdev, Hiroshi Okumura. First brocard point. https://www.ddekov.eu/e2/img2/01_definitions/01_points/b1_First_Brocard_Point.gif.
- [bild9] Branko Grünbaum G.B. Shephard. Tilings and patterns, p.17, figure 1.1.1.
- [bild10] Twitter. https://pbs.twimg.com/media/Dct9Ll_U8AAEAHR?format=jpg.
- [bild11] Martin von Gagern. Wallpaper groups. <http://www.morenements.de/gallery/exampleDiagrams/>.
- [bild12] Lang R.J. Tolman K. Yellowhorse, A. Creating linkage permutations to prevent self-intersection and enable deployable networks of thick-origami, figure 6. <https://rdcu.be/b8ET0>.

Alle Bilder, deren Quellen nicht angegeben sind, wurden von mir mit RStudio erstellt.

Index

- Äquivalenz, 12
- Affinität, 12
- anto, 20
- Bahn, 12
- Bergfalte, 16
- bestimmtes Faltmuster, 16
- brocardsches Polygon, 25
- Facette, 16
- Falten, 16
- Faltenzuordnung, 16
- Faltmuster, 15
 - bestimmtes, 16
 - unbestimmtes, 16
- flache Faltbarkeit, 17
 - globale, 17
 - lokale, 17
- Fliese, 9
- geschlossene Rückseite, 22
- Gleitspiegelung, 10
- Gruppendiagramm, 12
- identische Symmetrie, 10
- iso, 20
- Isometrie, 10
- isomorph, 12
- Kante, 9
- kantentreu, 27
- Keile, 21
- Klappe, 21
- Knoten, 9, 16
- kristallographische Gruppen, 12
- kritischer Winkel, 22
- offene Rückseite, 22
- Orientierung, 11
- Parallelfalten, 21
- Parkettierung, 9
- Polygon
 - brocardsches, 25
 - zentrales, 21
 - zyklisches, 24
- Rückseite, 16
 - geschlossene, 22
 - offen, 22
- Rotation, 10
- sicherer Winkel, 22
- Spiegelung, 10
- Streifengruppen, 12
- Symmetrie, 10
 - identische, 10
- Symmetriotyp, 12
- Talfalte, 16
- Twist
 - versetzt, 25
 - zentriert, 23
 - zyklisch, 23
- Twistwinkel, 21
- unbestimmtes Faltmuster, 16
- Verschiebung, 10
- versetzter Twist, 25
- Vorderseite, 16
- zentrales Polygon, 21
- zentrierter Twist, 23
- zweifärbbar, 25
- zyklischer Twist, 23
- zyklisches Polygon, 24