

- 小问 1：空间直角坐标系转换模型

- 1. 变量定义
- 2. 假设条件
- 3. 公式推导
 - 3.1 坐标系建立与初始状态
 - 3.2 动作正交分解与坐标变换
 - 3.3 综合坐标公式
 - 3.4 电机扭矩安全验证模型
- 4. 建模流程图

小问 1：空间直角坐标系转换模型

1. 变量定义

变量符号	变量名称	变量类型	单位	取值范围/备注
L_{arm}	左臂长度	已知参数	mm	338
θ_{ext}	伸展角度	决策变量	度 ($^{\circ}$)	60 $^{\circ}$ (题目给定)
θ_{rot}	旋转角度	决策变量	度 ($^{\circ}$)	30 $^{\circ}$ (题目给定)
P_0	肩关节坐标原点	参考点	-	(0, 0, 0)
P_1	伸展后末端坐标	中间变量	mm	(x_1, y_1, z_1)
P_{final}	最终手部端点坐标	目标变量	mm	(x, y, z)
T_{motor}	电机需求扭矩	中间变量	N · m	≥ 0
T_{limit}	电机安全阈值	约束参数	N · m	参考同类机器人参数
F_{load}	手臂重力/惯性力	中间变量	N	取决于手臂质量分布

2. 假设条件

1. 刚体假设：假设机器人手臂为刚体，忽略运动过程中的弹性形变和震动对端点坐标的影响。

- 合理性：机器人手臂材料刚度通常较高，且题目未提供材料弹性模量，微小形变对宏观坐标影响可忽略。

2. **理想关节假设**: 假设关节旋转轴严格正交, 且旋转中心重合于肩部原点, 忽略机械间隙和装配误差。
- 合理性: 简化几何建模复杂度, 便于建立标准坐标变换方程。
3. **坐标系定义假设**: 依据题目描述, 建立局部坐标系: 原点为肩关节, X轴指向正前方, Y轴指向正左方, Z轴垂直向上。
- 合理性: 符合题目中“前/左/上”的方位描述, 便于直观投影计算。
4. **分步运动假设**: 将复合运动分解为先伸展后旋转的独立过程, 且假设旋转顺序对最终位置无耦合干扰 (基于题目“正交分解”的逻辑)。
- 合理性: 题目给出的正交分解逻辑暗示了这种解耦处理方式。
5. **静态力矩假设**: 在验证电机扭矩时, 主要考虑重力产生的静力矩, 忽略瞬时角加速度引起的动力矩。
- 合理性: 在仅给定最终状态角度而未给定运动时间/速度曲线的情况下, 静态安全验证是必要的底线。

3. 公式推导

3.1 坐标系建立与初始状态

设定肩关节中心为原点 $O(0, 0, 0)$ 。

- X轴: 水平向前
- Y轴: 水平向左
- Z轴: 垂直向上

3.2 动作正交分解与坐标变换

步骤一: X-Z平面伸展运动 (Pitch) 手臂在 X-Z 平面内向上抬起 $\theta_{ext} = 60^\circ$ 。此时, 手臂在 Y 轴方向无位移。根据三角函数投影关系:

$$\begin{cases} x_1 = L_{arm} \cdot \cos(\theta_{ext}) \\ z_1 = L_{arm} \cdot \sin(\theta_{ext}) \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

代入数值 $L_{arm} = 338$, $\theta_{ext} = 60^\circ$:

$$x_1 = 338 \cdot \cos(60^\circ) = 169$$
$$z_1 = 338 \cdot \sin(60^\circ) \approx 292.72$$

步骤二：绕 Z 轴（或等效垂直轴）旋转运动 (Yaw) 题目描述“向左侧转动 30°”，且“仅影响 x、y 坐标，z 不受影响”。这对应于绕 Z 轴旋转 $\theta_{rot} = 30^\circ$ 。在此变换中，步骤一得到的 x_1 作为旋转半径在 X-Y 平面内投影。

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos(\theta_{rot}) - y_1 \cdot \sin(\theta_{rot}) \\ y = x_1 \cdot \sin(\theta_{rot}) + y_1 \cdot \cos(\theta_{rot}) \\ z = z_1 \end{cases}$$

由于 $y_1 = 0$ ，公式简化为：

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos(30^\circ) \\ y = x_1 \cdot \sin(30^\circ) \\ z = z_1 \end{cases}$$

3.3 综合坐标公式

将步骤一结果代入步骤二，得到最终坐标 (x, y, z) 关于 $L, \theta_{ext}, \theta_{rot}$ 的通式：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L_{arm} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_{ext} \cos \theta_{rot} \\ \cos \theta_{ext} \sin \theta_{rot} \\ \sin \theta_{ext} \end{bmatrix}$$

3.4 电机扭矩安全验证模型

为了验证该动作是否在电机能力范围内，计算重力产生的力矩。假设手臂质心位于几何中心 $L_c = L_{arm}/2$ ，手臂质量为 m 。力臂在水平面上的投影长度 d_{horiz} ：

$$d_{horiz} = \frac{L_{arm}}{2} \cdot \cos(\theta_{ext})$$

重力产生的力矩 $T_{gravity}$ ：

$$T_{gravity} = m \cdot g \cdot d_{horiz} = m \cdot g \cdot \frac{L_{arm}}{2} \cdot \cos(60^\circ)$$

安全判据：

$$T_{gravity} \leq T_{limit}$$

若满足该不等式，则动作在力学上是安全的。

4. 建模流程图

Parse error on line 1:
flowchart TD A["

Expecting 'NEWLINE', 'SPACE', 'GRAPH', got 'ALPHA'