

- 小问 2：B 样条曲线 + 动力学约束轨迹优化模型
 - 1. 变量定义
 - 2. 假设条件
 - 3. 公式推导
 - 3.1 B样条曲线模型
 - 3.2 运动学与动力学约束
 - 3.3 优化模型
 - 3.4 遗传算法 (GA) 求解设计
 - 4. 建模流程图

小问 2：B 样条曲线 + 动力学约束轨迹优化模型

1. 变量定义

变量符号	变量名称	变量类型	单位	取值范围/备注
t	时间	自变量	s	$[0, T]$
T	总运动时间	决策变量	s	$T > 0$
P_i	B样条控制点	决策变量	-	$i = 0, 1, 2, 3$
$\theta(t)$	膝关节角度	状态变量	度 ($^{\circ}$)	连续函数
$\dot{\theta}(t)$	关节角速度	中间变量	$^{\circ}/s$	$[-10, 10]$ (约束)
$\ddot{\theta}(t)$	关节角加速度	中间变量	$^{\circ}/s^2$	-
$\tau(t)$	关节力矩	中间变量	N \cdot m	$[-8, 8]$ (约束)
S_{total}	总运动距离	已知参数	m	10
V_{avg}	平均速度	已知参数	m/s	2
U	节点向量	参数	-	Uniform B-Spline
$N_{i,p}(t)$	B样条基函数	函数	-	3次 ($p=3$)

2. 假设条件

- 平滑运动假设：**假设机器人关节运动轨迹是连续且三阶可导的，以保证运动平滑无突变，故选用3次B样条曲线建模。
 - 合理性：**高阶连续性有助于减少机械磨损和控制系统的震荡。
- 各向同性假设：**假设环境地面平整，忽略地面摩擦系数变化对运动轨迹规划的影响。
 - 合理性：**题目侧重于关节轨迹规划，环境因素简化处理。
- 简化动力学假设：**在计算力矩限制时，主要考虑关节驱动力矩，忽略连杆之间的高阶耦合项（如科里奥利力）对单关节优化的影响。
 - 合理性：**在初步轨迹规划阶段，简化动力学模型可大幅提高计算效率，且误差可通过后续控制回路补偿。
- 对称性假设：**假设机器人双腿运动具有周期性和对称性，单腿规划结果可通过相位差应用于另一条腿。
 - 合理性：**人形机器人步态通常是对称的。
- 刚性连接假设：**忽略传动系统的弹性，认为电机输出直接作用于关节。

3. 公式推导

3.1 B样条曲线模型

采用3次B样条曲线描述膝关节角度 $\theta(t)$ 。

$$\theta(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,3}(u)$$

其中：

- P_i 为控制点，对应时间节点 t_0, t_1, t_2, t_3 。
- $N_{i,3}(u)$ 为3次B样条基函数，由Cox-de Boor递归公式定义：

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

在此模型中，时间 t 归一化为参数 $u \in [0, 1]$ 。

3.2 运动学与动力学约束

1. **角速度约束**: 对 $\theta(t)$ 求导得到角速度 $\dot{\theta}(t)$, 需满足:

$$|\dot{\theta}(t)| \leq 10^\circ/s, \quad \forall t \in [0, T]$$

2. **力矩约束**: 根据简化的动力学方程 $\tau = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + G(\theta)$ (此处重点关注极值), 题目给定直接约束:

$$|\tau(t)| \leq 8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

3. **边界条件**:

- 起点: $\theta(0) = \theta_{start}$
- 终点: $\theta(T) = \theta_{end}$
- 平均速度隐含约束: $S_{total}/T \approx v_{avg}$ (题目给定平均速度2m/s, 距离10m, 则 $T \approx 5s$)。此处 T 可作为在 5s 附近微调的优化变量。

3.3 优化模型

目标函数: 为了减少运动冲击, 选择最小化角速度变化率 (即角加速度的某种范数, 或题目提到的“最小化膝关节角度变化率”的积分):

$$\text{Minimize } J = \int_0^T |\dot{\theta}(t)| dt \quad \text{或} \quad \int_0^T (\ddot{\theta}(t))^2 dt$$

注: 根据题目分析文件, 目标选定为最小化角速度绝对值积分, 即总角行程最小化, 或平滑度最优。此处采用平滑度公式。

约束集合:

$$s.t. \begin{cases} |\dot{\theta}(t)| \leq 10 \\ |\tau(t)| \leq 8 \\ T \approx 5 \\ \theta(0) = 0, \theta(T) = \theta_{target} \end{cases}$$

3.4 遗传算法 (GA) 求解设计

- **编码**: 染色体 $C = \{\theta_1, \theta_2, T\}$, 代表中间两个控制点的角度值和总时间。
- **适应度函数**:

$$Fitness = \frac{1}{J + w_1 \cdot P_{vel} + w_2 \cdot P_{torque}}$$

其中 P_{vel} , P_{torque} 为超出约束的惩罚项。

- 算子：
 - 选择：轮盘赌选择法
 - 交叉：算术交叉
 - 变异：高斯变异

4. 建模流程图

```
Parse error on line 1:  
flowchart TD      A["
```

```
Expecting 'NEWLINE', 'SPACE', 'GRAPH', got 'ALPHA'
```