三维旋转

- 向量的旋转一共有三种表示方法：旋转矩阵、欧拉角和四元数

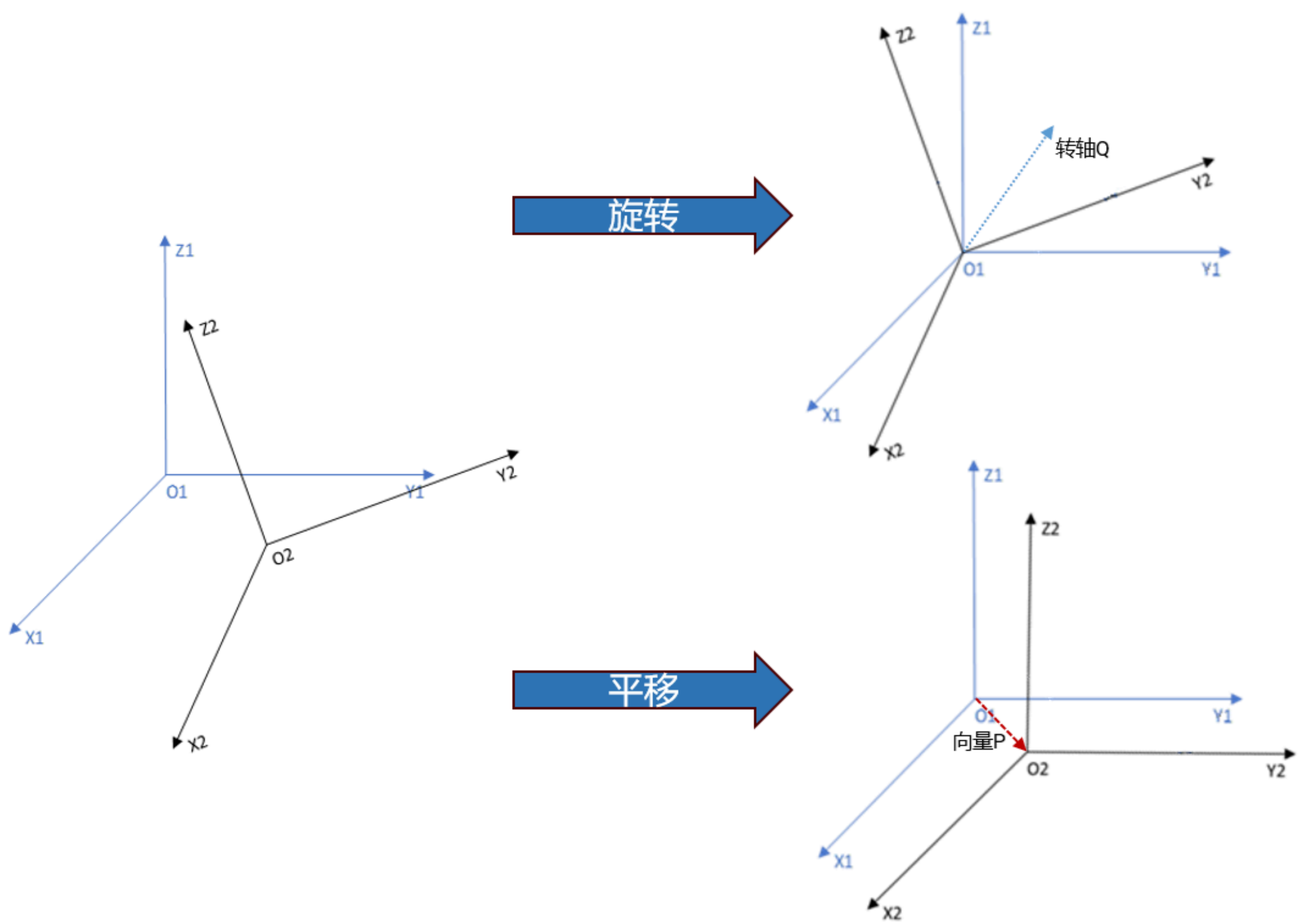
旋转矩阵

1. 引出——坐标变换

- 作用：将不同坐标系统一在同一坐标系下
- 所需数据：任意坐标系中各坐标轴在**世界坐标系**下的坐标

2. 位姿变换

- 位姿 = 位置 + 姿态
  位置为特点坐标系原点相较于世界坐标系下的平移
  姿态为该坐标系相较于世界坐标系进行的旋转



3. 旋转矩阵

- 设有一 P 点，基于坐标系A的坐标为(x_a, y_a, z_a)
  基于坐标系B的坐标为(x_b, y_b, z_b)
- 坐标系B中各轴在坐标系A中的坐标(已单位化):
- $\begin{cases} X_2 = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \\ Y_2 = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}^T \\ Z_2 = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}^T \end{cases} \xrightarrow{[X\ Y\ Z]} {}_B^AR = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$
  ${}_B^AR$表示向量P由坐标轴B变换至坐标轴A的旋转矩阵
  其中：
  $\begin{pmatrix} a_x & b_y & c_z \end{pmatrix}$为坐标系$B$中各个轴在坐标系$A$中$x$轴上的投影
  $\begin{pmatrix} a_x & b_y & c_z \end{pmatrix}$为坐标系$B$中各个轴在坐标系$A$中$y$轴上的投影
  $\begin{pmatrix} a_x & b_y & c_z \end{pmatrix}$为坐标系$B$中各个轴在坐标系$A$中$z$轴上的投影
  易得出:
  ${}_B^AR \times P_B = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x x_b + b_x y_b + c_x z_b \\ a_y x_b + b_y y_b + c_y z_b \\ a_z x_b + b_z y_b + c_z z_b \end{bmatrix} = P_A = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$
  P_B代表向量P在坐标系B中的坐标;P_A代表向量P在坐标系A中的坐标
  显然：${}_A^BR$、${}_B^AR$都是单位正交矩阵，即$R^T = R^{-1}$
  可得出：${}_B^AR = {}_B^WR \times {}_W^AR = {}_B^WR \times {}_A^WR^{-1} = {}_B^WR \times {}_A^WR^T$

4. 坐标变换

坐标变换=旋转+平移，即：
$P_A = {}_B^AR \times P_B + \overrightarrow{O_1O_2}$，$\overrightarrow{O_1O_2}$为两坐标系原点指向另一原点的向量
改写为矩阵形式：
$\begin{bmatrix} P_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_B^AR & \overrightarrow{O_1O_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_B \\ 1 \end{bmatrix}, 令T = \begin{bmatrix} {}_B^AR & \overrightarrow{O_1O_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
可得：${}^AP = T \times {}^BP, 其中T为齐次旋转矩阵$

欧拉角

1.定义

欧拉角遵循的是右手系规则，即大拇指指向坐标轴正方向，四指旋转的方向即为转动的正方向，欧拉角包含三个自由量：yaw(偏航角)、pitch(俯仰角)、roll(翻滚角)。

- yaw: 绕物体z轴旋转，得到偏航角 yaw

- pitch: 绕旋转之后的y轴旋转，得到俯仰角 pitch
- roll: 绕旋转之后的x轴旋转，得到滚转角 roll

2.欧拉角与旋转矩阵的关系

假设绕x, y, z轴旋转角度依次为α, β, γ，则旋转矩阵为:

$$\overrightarrow{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_y} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转顺序分为两种外旋(x->y->z)和内旋(z->y->x)

当使用外旋顺序时：$\overrightarrow{P}' = \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{P} = (\vec{R}_z\vec{R}_y\vec{R}_x) \times \vec{P}$

$$= \left(\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

3.欧拉角的弊端

- 当任何一个坐标轴旋转角度为 90 度时,会出现"死锁"现象，即两个轴的旋转对个体起到相同的效果
- 为了解决这一问题，引出了**四元数**的概念

四元数

1. 四元数的定义

四元数包含了四个实参数以及三个虚部（一个实部三个虚部

即$q = s + x\,i + y\,z + d\,k$ ，也可以看做是对基底$\{1, i, j, k\}$的线性组合

从四维角度来看，应包括三个两两垂直的虚部轴i, j, k(类似三维中的坐标轴)，和一个垂直于上述三轴的实数轴

因此，在实际表示中，经常将实部与虚部分开，并用三维向量来表示虚部，将其表述为标量和向量的有序对形式：

$q = \begin{bmatrix} s & \vec{v} \end{bmatrix}, 其中\, \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \begin{Bmatrix} s & x & y & z \end{Bmatrix} \subseteq \mathbb{R}$

在物理上，四元数可以描述一个物体的姿态，也可以描述一个问题的旋转

2. 四元数的性质

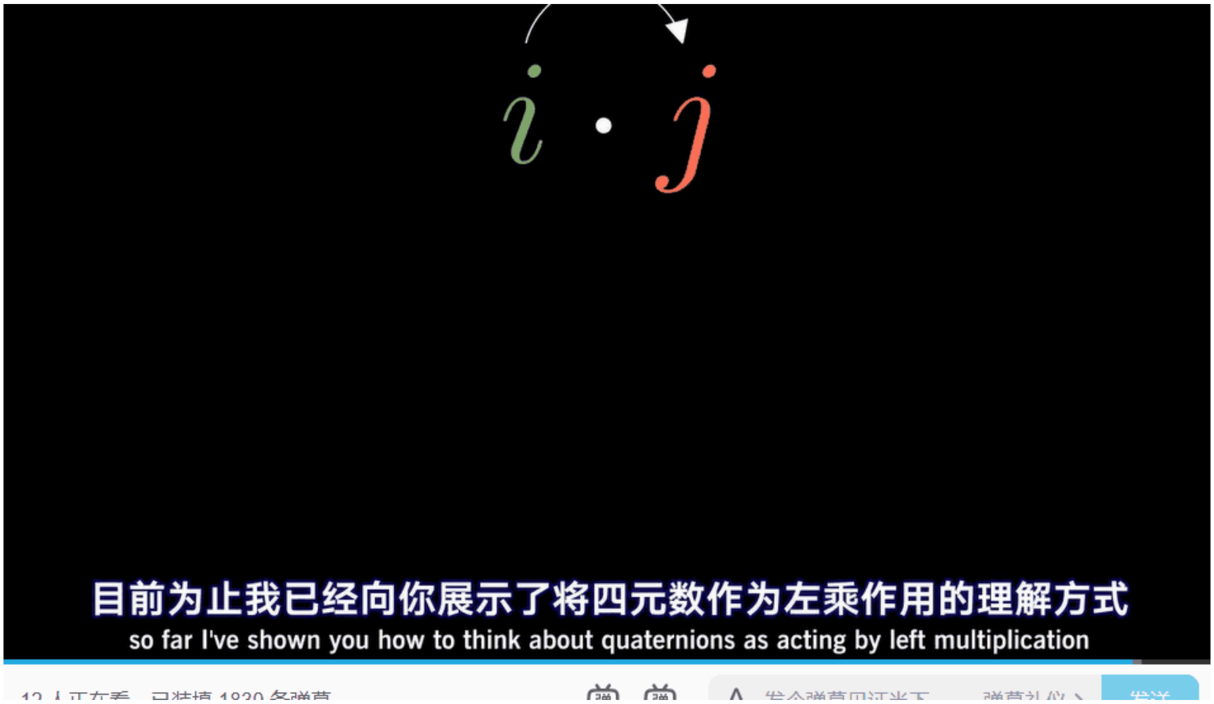
- 四元数乘法
  - 四元数乘法推导

$$
\begin{aligned}
& 设 q_1 = a + bi + cj + dk \qquad q_2 = e + fi + gj + hk \\
& \qquad\qquad q_1 q_2 = (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\
& \qquad\qquad\qquad = (ae - bf - cg - dh) + (be + af + ch - dg)i + \\
& \qquad\qquad\qquad\quad (ce + ag + df - bh)j + (de + ah + bg + -cf)k \\
& \xrightarrow{表示为矩阵形式} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \\
& 同理可得 q_2 q_1 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

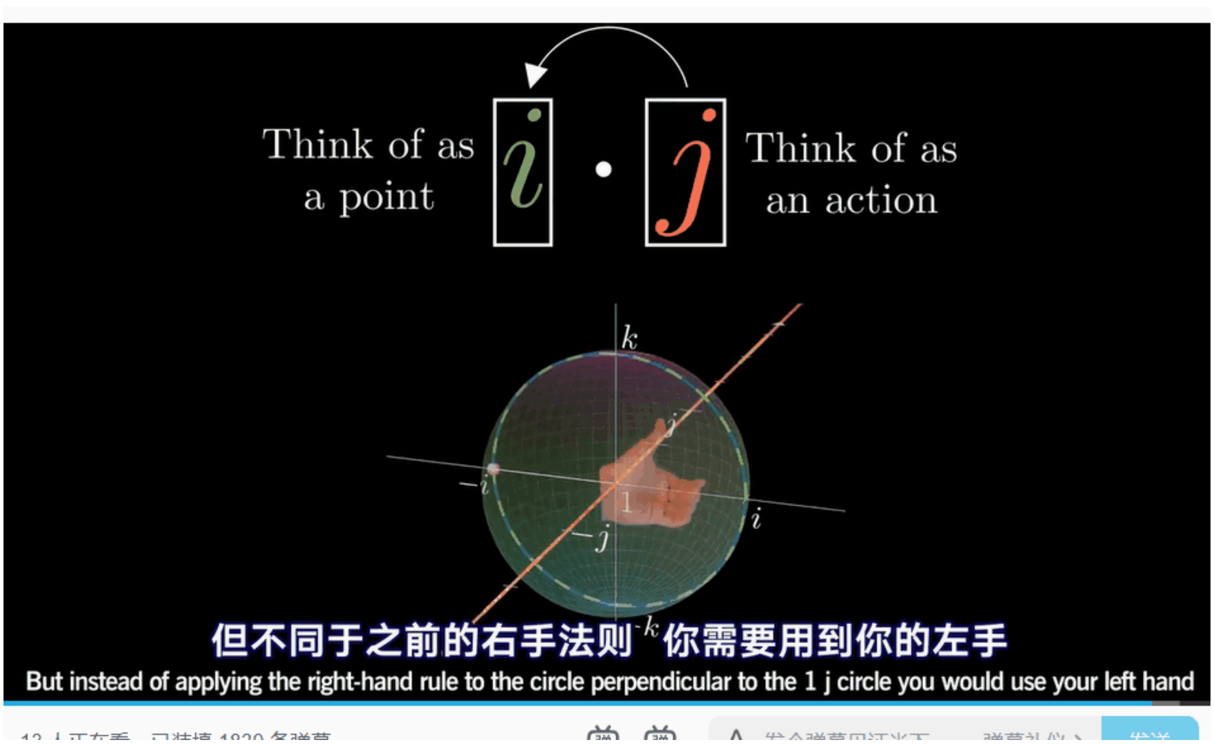
  - **四元数乘法不满足交换律**

乘法法则	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

  - 在物理上，也可以解释为何不满足交换律
    - a. 左乘旋转四元数(左为操作动作，右为被操作对象)



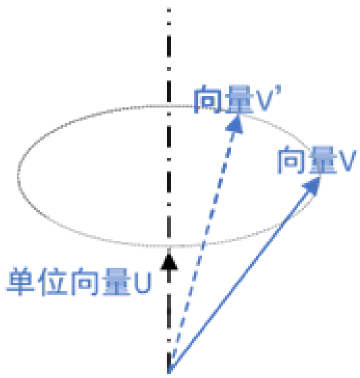
- b. 右乘旋转四元数(右为操作动作，左为被操作对象)



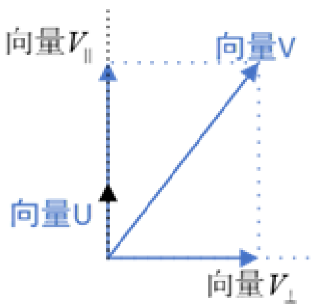
- 纯四元数
  如果一个四元数可以被写成$v=\begin{bmatrix}0 & \vec{u}\end{bmatrix}$，则称$v$为一个纯四元数
- 四元数的共轭
  - 向量角度：$q=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{共轭}}q^*\begin{bmatrix}a\\-b\\-c\\-d\end{bmatrix}$
  - 复数角度：$q=\begin{bmatrix}s & \vec{u}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{共轭}}q^*=\begin{bmatrix}s & -\vec{u}\end{bmatrix}$
- 当四元数模值为 1，则该四元数被称为单位四元数

3.四元数与三维旋转

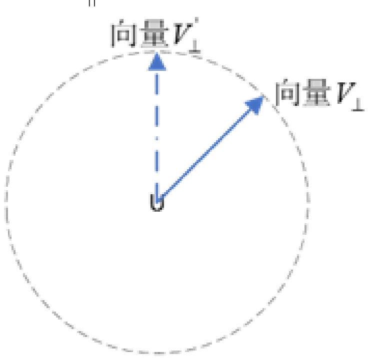
三维旋转



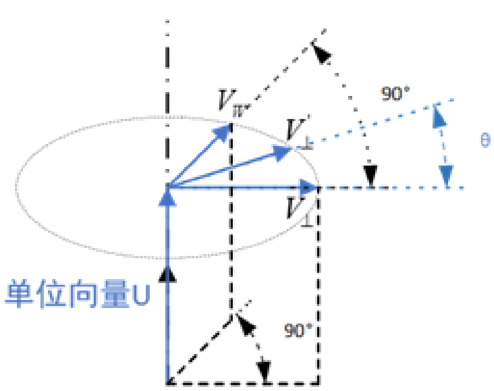
- 向量 V 绕向量 U 进行三维空间内的旋转得到向量 V',其中向量 U 为单位向量
- 分解以简化旋转操作
  - 将向量 V 分为垂直向量 U 和平行向量 U 两部分：

  - 向量$V_{\|}$不参与旋转，参与旋转的是$V_{\perp}$：

  - 因此只需要得到向量$V_{\perp}'$就可以表达出整个旋转过程

- 设向量$V_\perp$和$V'_\perp$之间夹角为θ ,可得出：
  $\overrightarrow{V}' = \overrightarrow{V}'_\parallel + \overrightarrow{V}'_\perp = \overrightarrow{V}_\parallel + ((\cos\theta)\overrightarrow{V}_\perp + (\sin\theta)\overrightarrow{V}_W) = \overrightarrow{V}_\parallel + ((\cos\theta)\overrightarrow{V}_\perp + (\sin\theta)\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V})$

三维旋转转四元数

- 将向量$\overrightarrow{U}$和$\overrightarrow{V}'_\perp$用四元数表示：
  $U = \begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{U} \end{bmatrix} \quad V'_\perp = \begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{V}'_\perp \end{bmatrix}$
- $\text{因为} \left.\begin{array}{l} UV = \begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}'_\perp & \overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}'_\perp \end{bmatrix} \\ V'_\perp = \sin\theta(\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}'_\perp)\text{且}\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}'_\perp = 0 \end{array}\right\} V'_\perp = (\sin\theta)UV$
- 三维旋转转化四元数

$$
\begin{aligned}
V' &= \overrightarrow{V}_\parallel + ((\cos\theta)\overrightarrow{V}_\perp + (\sin\theta)\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}) \\
&= \overrightarrow{V}_\parallel + ((\cos\theta)\begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{V}'_\perp \end{bmatrix} + (\sin\theta)UV'_\perp) \\
&= \overrightarrow{V}_\parallel + ((\cos\theta) + (\sin\theta)U)V'_\perp \\
&\xrightarrow{\text{令}q=[\cos\theta\ \ \sin\theta U]} \overrightarrow{V}_\parallel + qV'_\perp
\end{aligned}
$$

- 给出两条定理：
  - a. 假设$v_\parallel = \begin{bmatrix} 0 & \vec{v}_\parallel \end{bmatrix}$是一个纯四元数，而$q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\vec{u} \end{bmatrix}$，其中$\vec{u}$是一个单位向量，$\alpha$，$\beta \in \mathbb{R}$，在这种条件下，如果$\vec{v}_\parallel$平行于$\vec{u}$，那么$qv_\parallel = v_\parallel q$(两平行向量绕对方旋转无变化)
  - b. 假设$v_\perp = \begin{bmatrix} 0 & \vec{v}_\perp \end{bmatrix}$是一个纯四元数，而$q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\vec{u} \end{bmatrix}$，其中$\vec{u}$是一个单位向量，$\alpha$，$\beta \in \mathbb{R}$，在这种条件下，如果$\vec{v}_\perp$正交于$\vec{u}$，那么$qv_\perp = v_\perp q^*$
- 根据定理对上一步式子进行进一步变换

$$
\begin{aligned}
V' &= \overrightarrow{V}_\parallel + qV'_\perp \xrightarrow{\text{设}q=1=p^2} 1\times\overrightarrow{V}_\parallel + p^2V'_\perp = pp^{-1}\times\overrightarrow{V}_\parallel + p^2V'_\perp \\
&= pp^{-1}\times\begin{bmatrix} 0 & \overrightarrow{V}'_\parallel \end{bmatrix} + p^2V'_\perp = pp^{-1}\times V'_\parallel + p^2V'_\perp \\
&= p(V'_\parallel + V_\perp)p^* = pV'p^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because q^2 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\,\vec{u} \end{bmatrix}^2 = (\cos\theta + \sin\theta\,\vec{u})(\cos\theta + \sin\theta\,\vec{u}) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\,\vec{u} \\
&= \cos 2\theta + \sin 2\theta\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta\,\vec{u} \end{bmatrix} \\
\therefore p &= \sqrt{q} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & (\cos\dfrac{\theta}{2})\,\vec{u} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

四元数转旋转矩阵

- 通过上文推导出的四元数乘法的矩阵形式可以实现四元数向旋转矩阵的转换

$$
\begin{aligned}
V' = qVq^* = L(q)R(q^*)V & \qquad \text{(L(q)代表左乘矩阵，R(q)代表右乘矩阵)} \\
= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} V \\
= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & ab-ab-cd+cd & ac+bd-ac-bd & ad-bc+bc-ad \\ ab-ab+cd-cd & b^2+a^2-d^2-c^2 & bc-ad-ad+bc & bd+ac+bd+ac \\ ac-bd-ac+bd & bc+ad+ad+bc & c^2-d^2+a^2-b^2 & cd+cd-ab-ab \\ ad+bc-bc-ad & bd-ac+bd-ac & cd+cd+ab+ab & d^2-c^2-b^2+a^2 \end{bmatrix} V \\
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 0 & 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 0 & 2bd-2ac & 2cd+2ab & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} V
\end{aligned}
$$

四元数与欧拉角的转化

$$
q = \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(\dfrac{2(sz+xy)}{1-2(z^2+x^2)}) \\ \arcsin(2(sz-yz)) \\ \arctan(\dfrac{2(sy+zx)}{1-2(x^2+y^2)}) \end{bmatrix}, \text{其中:} \begin{cases} \varphi\text{为绕x轴旋转角度，即滚转角roll} \\ \theta\text{为绕y轴旋转角度，即俯仰角pitch} \\ \psi\text{为绕z轴旋转角度，即偏航角yaw} \end{cases}
$$

在程序中可以使用atan2函数。该函数有两个参数，分别为所求点的x值和y值，返回值是角度值，上述式子中，分子为参数1，分母为参数2