Statistics for Psychology A

Orin Levi

תוכן העניינים

1 יחידה 1: מושגי יסוד וסולמות מדידה

דגש: אם מחלקה רחבה יותר, גובה העמודה חייב להתאים כדי ש**השטח** יישאר פרופורציונלי לשכיחות.
יחידה זו עוסקת במושגי היסוד של הסטטיסטיקה ומהווה בסיס לכל הקורס. הבנה מדויקת של סוגי משתנים, סולמות מדידה והטרנספורמציות המותרות עליהם היא תנאי לשימוש נכון בכלים סטטיסטיים בהמשך.

1.1 משתנים

1.1.1 הגדרה

משתנה הוא תכונה או תופעה שיכולה לקבל ערכים שונים בין נבדקים שונים או בין מדידות שונות.

1.1.2 הסבר אינטואיטיבי

משתנה הוא כל דבר שיכול להשתנות: מספר ילדים במשפחה, גובה אדם, רמת שביעות רצון, טמפרטורה, או מספר טעויות בביצוע מטלה.

1.1.3 דגשים למבחן

- יש להבחין בין **המשתנה עצמו** לבין **הערכים שהוא מקבל**.
- משתנה יכול להיות מספרי או קטגוריאלי, אך לא כל מספרי הוא "כמותי" במובן הסטטיסטי.

1.1.4 טעויות נפוצות

- בלבול בין שם המשתנה (למשל: גובה) לבין יחידות המדידה (מטרים, סנטימטרים).

1.2 משתנה בדיד ומשתנה רציף

1.2.1 הגדרה

- **משתנה בדיד**: משתנה שערכיו ניתנים למנייה, ואין ערכים אפשריים בין שני ערכים עוקבים.
- **משתנה רציף**: משתנה שיכול לקבל (תיאורטית) אינסוף ערכים בין כל שני ערכים.

1.2.2 הסבר אינטואיטיבי

במשתנה בדיד סופרים (ילדים, טעויות, זבובים). במשתנה רציף מודדים (זמן, אורך, משקל).

1.2.3 דוגמאות

- בדיד: מספר ילדים במשפחה, מספר טעויות במבחן.
- רציף: גובה, משקל, זמן תגובה.

1.2.4 דגשים למבחן

- העובדה שהמדידה בפועל מעוגלת **לא הופכת** משתנה רציף לבדיד.
- בדיד □ סולם שמי, רציף □ סולם יחס. אלו הבחנות שונות.

1.2.5 טעויות נפוצות

- לחשוב ש"כל מספרי הוא רציף".

1.3 סולמות מדידה

1.3.1 מדידה

מדידה היא תהליך שבו מייחסים ערכים מספריים לתכונות או תופעות כך שהמספרים משקפים את היחסים ביניהן.

1.3.2 סולם מדידה

סולם מדידה מגדיר את המשמעות המתמטית של הערכים ולכן קובע אילו פעולות סטטיסטיות מותר לבצע עליהם.

1.4 ארבעת סולמות המדידה

1.4.1 סולם שמי

הגדרה: סולם שבו הערכים משמשים כתוויות זיהוי בלבד. אין סדר, אין רווחים ואין יחסים.

דוגמאות: מין, עיר מגורים, מספר חולצה.

דגשים למבחן:

- מותר רק לבדוק זהות או אי־זהות.
- אין משמעות לגודל המספר.

1.4.2 סולם סדר

הגדרה: סולם שבו קיימת היררכיה בין הערכים, אך אין משמעות לרווחים ביניהם.

דוגמאות: דירוג בתחרות, רמת שביעות רצון.

דגשים למבחן:

- יודעים מי יותר ומי פחות, אך לא בכמה.

1.4.3 טעות נפוצה

להניח שאם יש סדר – יש גם רווחים שווים.

1.4.4 סולם רווח

הגדרה: סולם שבו יש משמעות לרווחים בין ערכים, אך אין משמעות ליחסים, ונקודת האפס נקבעת באופן שרירותי.

דוגמאות: טמפרטורה במעלות צלזיוס, שנים בלוח השנה.

דגשים למבחן:

- הבדל של 10 מעלות הוא זהה בכל מקום בסולם.
- אין משמעות ל"פי שניים".

1.4.5 סולם יחס (מנה)

הגדרה: סולם שבו יש משמעות לרווחים וליחסים בין ערכים, וקיים אפס מוחלט המייצג היעדר תכונה.

דוגמאות: גובה, משקל, מספר ילדים, טמפרטורה בקלווין.

דגשים למבחן:

- אפשר לומר "פי שניים".
- אפס = היעדר מוחלט של התכונה.

1.5 היררכיה בין סולמות מדידה

היררכיה:

יחס $\rightarrow$ רווח $\rightarrow$ סדר $\rightarrow$ שמי

כל סולם גבוה מכיל את התכונות של הסולמות שמתחתיו.

1.5.1 דגשים למבחן

- לרוב נעדיף למדוד בסולם הגבוה ביותר האפשרי.
- סולם המדידה תלוי **גם באופן המדידה**, לא רק בתכונה.

1.6 טרנספורמציות על סולמות מדידה

1.6.1 הגדרה

טרנספורמציה היא פעולה מתמטית המבוצעת על כל ערכי המשתנה.

1.6.2 טרנספורמציות מותרות

- שמי: כל טרנספורמציה ששומרת זהות.
- סדר: כל טרנספורמציה ששומרת סדר.
- רווח: טרנספורמציה לינארית $y = ax + b$, כאשר $a \neq 0$.
- יחס: הכפלה בקבוע $y = ax$, כאשר $a \neq 0$.

1.6.3 דגשים למבחן

- הוספת קבוע שומרת רווח אך שוברת יחס.
- הכפלה בקבוע שומרת יחס.

1.7 טעויות נפוצות ובלבולים שכיחים

- לחשוב שכל משתנה עם אפס הוא בהכרח סולם יחס.
- לבלבל בין בדיד/רציף לבין סולם המדידה.
- להניח שציונים במבחן הם תמיד סולם רווח (נחשב אזור אפור).

2 יחידה 2: מדדי מרכז

מדדי נטייה מרכזית נועדו לתאר ערך מייצג של התפלגות. ביחידה זו נלמד שלושה מדדים עיקריים: שכיח, חציון וממוצע, ואת הקשר ביניהם לבין סולמות מדידה ופונקציות הפסד.

2.1 מדדי נטייה מרכזית – מבט כללי

שלושת מדדי הנטייה המרכזית הם:

- **שכיח** – הערך שמופיע בתדירות הגבוהה ביותר.
- **חציון** – הערך האמצעי בהתפלגות מסודרת.
- **ממוצע** – סכום הערכים חלקי מספר התצפיות.

לא כל מדד מתאים לכל משתנה, והבחירה ביניהם תלויה בסולם המדידה ובמטרת התיאור.

2.2 השכיח

2.2.1 הגדרה

השכיח הוא הערך שמופיע בשכיחות הגבוהה ביותר בהתפלגות.

2.2.2 הסבר אינטואיטיבי

זהו הערך ה"נפוץ ביותר" – מה שרואים הכי הרבה.

2.2.3 דגשים למבחן

- זהו מדד הנטייה המרכזית **היחיד** שמתאים לסולם שמי.
- ייתכן יותר משכיח אחד (התפלגות רב־שכיחית).
- ייתכן מצב שבו אין שכיח כלל.

2.2.4 דוגמה קצרה

אם מזון מועדף של קבוצה מתחלק לקטגוריות, המדד היחיד שניתן לחשב הוא השכיח.

2.2.5 טעויות נפוצות

- לחשוב שתמיד קיים שכיח.
- לבלבל בין שכיח לערך "ממוצע" אינטואיטיבית.

2.3 החציון

2.3.1 הגדרה

החציון הוא הערך שמחלק את ההתפלגות לשני חצאים שווים, לאחר סידור הערכים לפי גודל.

2.3.2 הסבר אינטואיטיבי

חצי מהתצפיות קטנות ממנו וחצי גדולות ממנו.

2.3.3 חישוב

- מספר תצפיות אי־זוגי: החציון הוא הערך האמצעי.
- מספר תצפיות זוגי: החציון הוא ממוצע שני הערכים האמצעיים.

2.3.4 דגשים למבחן

- החציון מתאים לפחות לסולם סדר.
- החציון **עמיד לערכים קיצוניים**.
- שינוי בערך קיצוני לא בהכרח ישפיע על החציון.

2.3.5 דוגמה מבחנית

אם מוסיפים להתפלגות תצפית קיצונית מאוד, לעיתים החציון לא ישתנה כלל — בניגוד לממוצע.

2.3.6 טעויות נפוצות

- לשכוח לסדר את הנתונים לפני חישוב.
- לחשוב שהחציון "חייב להיות" אחד הערכים בהתפלגות (לא תמיד).

2.4 הממוצע

2.4.1 הגדרה

הממוצע הוא סכום כל התצפיות חלקי מספר התצפיות:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.4.2 הסבר אינטואיטיבי

הממוצע הוא נקודת "שיווי משקל" של ההתפלגות.

2.4.3 דגשים למבחן

- הממוצע מתאים לסולם רווח ומעלה.
- הממוצע **רגיש לערכים קיצוניים**.
- הוספת תצפית:
  - גדולה מהממוצע □ הממוצע יגדל.
  - קטנה מהממוצע □ הממוצע יקטן.
  - שווה לממוצע □ הממוצע לא ישתנה.

2.4.4 דוגמה קצרה

הורדת תצפית נמוכה מהממוצע תגרום לממוצע לעלות.

2.4.5 טעויות נפוצות

- לפרש ממוצע כערך "טיפוסי" גם בהתפלגות מוטה.
- להשתמש בממוצע כשאין משמעות לרווחים (סולם סדר).

2.5 השוואה בין מדדי הנטייה המרכזית

מדד	סולם מינימלי	רגישות לקיצוניים	תמיד קיים
שכיח	שמי	לא	לא
חציון	סדר	נמוכה	כן
ממוצע	רווח	גבוהה	כן

2.6 פונקציות הפסד וקשר למדדי מרכז

2.6.1 רעיון כללי

פונקציית הפסד מודדת "כמה טעינו" כאשר אנו מייצגים את ההתפלגות בערך אחד.

2.6.2 קשרים חשובים

- מזעור סכום **ריבועי הסטיות**:

$$\sum (x_i - c)^2 \Rightarrow c = \bar{X}$$

הממוצע.

- מזעור סכום **הסטיות המוחלטות**:

$$\sum |x_i - c| \Rightarrow c = \text{חציון}$$

- מזעור מספר הטעויות (0/1):

$$\Rightarrow c = \text{שכיח}$$

2.6.3 דגש למבחן

שאלות על פונקציות הפסד הן דרך עקיפה לשאול: **איזה מדד מרכז מתאים כאן?**

2.7 טעויות נפוצות ובחינות קלאסיות

- לחשב מדד מרכז "טכני" בלי לבדוק התאמה לסולם המדידה.
- להתעלם מערכים קיצוניים כששואלים על ממוצע.
- לשכוח שחציון ושכיח לא בהכרח משתנים כשנתון בודד משתנה.

3 יחידה 3: מדדי פיזור

מדדי פיזור מתארים עד כמה התצפיות שונות זו מזו ועד כמה הן מפוזרות סביב ערך מרכזי. שני מדגמים יכולים להיות בעלי אותו מדד מרכז אך פיזור שונה מאוד.

3.1 מהו פיזור ולמה צריך אותו

3.1.1 הסבר אינטואיטיבי

פיזור מתאר את מידת ההטרוגניות של הנתונים:

- פיזור גדול □ הנתונים רחוקים זה מזה.
- פיזור קטן □ הנתונים מרוכזים סביב ערך מסוים.

3.1.2 דגשים למבחן

- מדדי פיזור תמיד אי־שליליים.
- מדדי פיזור נבחנים תמיד ביחס לערך מרכזי כלשהו.

3.2 אחוז טעויות (Ratio of Variation)

3.2.1 הגדרה

אחוז התצפיות השונות מהשכיח:

$$V = \frac{n - f_{Mo}}{n} \cdot 100$$

כאשר f_{Mo} היא שכיחות השכיח.

3.2.2 הסבר אינטואיטיבי

מודד כמה מהנתונים לא שווים לערך הנפוץ ביותר.

3.2.3 דגשים למבחן

- בן הזוג של **השכיח**.
- מתאים במיוחד לסולם שמי.
- ערך גבוה □ פיזור גדול.

3.2.4 טעויות נפוצות

- לבלבל בין אחוז טעויות לבין סטיית תקן.

3.3 ממוצע סטיות מוחלטות (MAD)

3.3.1 הגדרה

ממוצע המרחקים המוחלטים מהחציון:

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{Median}|$$

3.3.2 הסבר אינטואיטיבי

כמה בממוצע כל תצפית רחוקה מהחציון.

3.3.3 דגשים למבחן

- בן הזוג של **החציון**.
- עמיד יחסית לערכים קיצוניים.
- מתאים לפחות לסולם סדר.

3.3.4 טרנספורמציות

- הוספת קבוע לכל הערכים □ MAD לא משתנה.
- הכפלה בקבוע b □ MAD מוכפל ב-$|b|$.
- שינוי סימן (כפל ב־-1) □ MAD לא משתנה.

3.3.5 טעויות נפוצות

- לחשוב ש-MAD יכול להיות שלילי (לא נכון).

3.4 שונות מדגמית

3.4.1 הגדרה

ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$$

3.4.2 הסבר אינטואיטיבי

מודד פיזור דרך ריבוע המרחקים מהממוצע – מדגיש ערכים קיצוניים.

3.4.3 דגשים למבחן

- בן הזוג של **הממוצע**.
- רגישה מאוד לערכים קיצוניים.
- תמיד אי־שלילית.
- שונות שווה ל־0 רק כאשר כל הערכים זהים.

3.4.4 יחידות מדידה

השונות נמדדת ב**יחידות בריבוע** (למשל: ס"מ^2).

3.4.5 הערה על חלוקה ב-n לעומת $n-1$ (תיקון בסל)

בקורסים שונים משתמשים בשתי הגדרות נפוצות לשונות במדגם:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 \qquad \text{או} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$$

החלוקה ב-$n-1$ נותנת אומד **חסר הטיה** לשונות האוכלוסייה (כשדוגמים מאוכלוסייה), ואילו החלוקה ב-n נפוצה בשימוש **תיאורי** למדגם עצמו. בפתרון תרגילים יש לעבוד לפי הנוסחאות הנהוגות בקורס ולשמור עקביות בכל החישובים.

3.5 סטיית תקן

3.5.1 הגדרה

שורש השונות:

$$S_n = \sqrt{S_n^2}$$

3.5.2 הסבר אינטואיטיבי

מרחק "טיפוסי" של תצפית מהממוצע.

3.5.3 דגשים למבחן

- נמדדת באותן יחידות של המשתנה.
- רגישה לערכים קיצוניים.

3.6 השפעת טרנספורמציות על שונות וסטיית תקן

- הוספת קבוע a לכל הערכים:
  - ממוצע □ ב-a
  - שונות וסטיית תקן – לא משתנות
- הכפלה בקבוע b:
  - ממוצע מוכפל ב-b
  - שונות מוכפלת ב-b^2
  - סטיית תקן מוכפלת ב-$|b|$

3.7 טווח (Range)

3.7.1 הגדרה

הפרש בין הערך המקסימלי למינימלי:

$$Range = \max - \min$$

3.7.2 דגשים למבחן

- מושפע מאוד מערכים קיצוניים.
- לא מתייחס לערך מרכזי.

3.8 טווח בין־רבעוני (IQR)

3.8.1 הגדרה

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

3.8.2 הסבר אינטואיטיבי

מכיל את 50% האמצעיים של ההתפלגות.

3.8.3 דגשים למבחן

□ עמיד לערכים קיצוניים.

□ מבוסס על חציון ורבעונים.

□ מתאים במיוחד להתפלגויות מוטות.

3.9 בחירת מדדי פיזור – סיכום מבחני

□ סולם שמי □ שכיח + אחוז טעויות

□ סולם סדר / התפלגות עם קיצוניים □ חציון + IQR / MAD

□ סולם רווח / יחס, התפלגות סימטרית □ ממוצע + שונות / סטיית תקן

3.10 טעויות נפוצות במבחנים

□ לחשב שונות בלי להבין השפעת טרנספורמציה.

□ להשוות שונות בין משתנים שנמדדים ביחידות שונות.

□ לשכוח ששונות נמדדת ביחידות בריבוע.

□ להניח שפיזור קטן אומר "אין שונות".

4 יחידה 4: מדדי מיקום יחסי ומדדי קשר

יחידה זו עוסקת במיקום של תצפית ביחס להתפלגות כולה, ובהמשך בקשר בין שני משתנים. הדגש הוא על תקנון (ציוני תקן), אחוזונים, ומתאם פירסון.

4.1 מדדי מיקום יחסי – רעיון כללי

מדדי מיקום יחסי עונים על השאלה:

איפה התצפית נמצאת ביחס לשאר התצפיות?

בניגוד למדדי מרכז ופיזור, הם מתארים **תצפית בודדת** ולא את ההתפלגות כולה.

4.2 ציוני תקן (Z-score)

4.2.1 הגדרה

ציון תקן מתאר בכמה סטיות תקן תצפית רחוקה מהממוצע:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S_n}$$

4.2.2 הסבר אינטואיטיבי

כמה "חריג" הערך ביחס לשאר המדגם, תוך התחשבות בפיזור.

4.2.3 דגשים למבחן

- $Z > 0$ – תצפית מעל הממוצע.
- $Z < 0$ – תצפית מתחת לממוצע.
- $Z = 0$ – תצפית שווה לממוצע.
- ציון תקן הוא **חסר יחידות**.

4.3 למה משתמשים בציוני תקן

- השוואת תצפיות מאותו משתנה במדגמים שונים.
- השוואת אותה תכונה שנמדדה בכלים שונים.
- השוואת תצפיות ממשתנים שונים לחלוטין (גובה, משקל, ציונים).

4.3.1 דגש למבחן

השוואה בין ציונים גולמיים **אינה** מספיקה — יש להשוות ציוני תקן.

4.4 תכונות מדגם לאחר תקנון

לאחר המרה לציוני תקן:

- ממוצע ציוני התקן: $\bar{Z} = 0$
- סטיית תקן ציוני התקן: $S_Z = 1$
- צורת ההתפלגות נשמרת.

4.4.1 דגש למבחן

תקנון **לא משנה** את עוצמת הקשר בין משתנים.

4.5 מצבים מיוחדים בציוני תקן

- אם $S_n = 0$ (כל הערכים זהים) — **לא ניתן לחשב ציון תקן**.
- ייתכן:
  - ציון תקן שלילי אך ערך מעל החציון.
  - אחוזון גבוה עם Z שלילי (בהתפלגות מוטה).

4.6 אחוזונים

4.6.1 הגדרה

האחוזון ה-p הוא ערך שמתחתיו נמצאים $p\%$ מהתצפיות.

4.6.2 הסבר אינטואיטיבי

האחוזון אומר **כמה אחוזים נמצאים מתחת לערך**, לא מעליו.

4.6.3 דגשים למבחן

- האחוזון ה־50 הוא החציון.
- אין צורך לדעת את צורת ההתפלגות כדי לפרש אחוזון.

4.6.4 טעות נפוצה

לחשוב שאחוזון 80 אומר שהערך גדול מ־80% מהטווח — לא נכון.

4.7 מדדי קשר – מבוא

מדדי קשר עונים על השאלה:

> האם מידע על משתנה אחד מספק מידע על משתנה אחר?

קשר ≠ סיבתיות.

4.8 דיאגרמת פיזור (Scatter Plot)

4.8.1 תיאור

גרף שבו כל תצפית מיוצגת כנקודה במישור (X, Y).

4.8.2 מה בודקים

- כיוון הקשר: חיובי / שלילי.
- עוצמת הקשר: חזק / חלש / אין קשר.
- קיצוניים והשפעתם.

4.9 מקדם המתאם של פירסון

4.9.1 תנאים

- שני משתנים בסולם רווח או יחס.
- קשר לינארי.

4.9.2 הגדרה

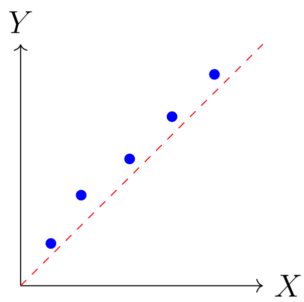
מקדם המתאם של פירסון מודד את עוצמת וכיוון הקשר הלינארי:

$$-1 \leq r \leq 1$$

4.9.3 פירוש

- $r > 0$ – קשר חיובי.
- $r < 0$ – קשר שלילי.
- $r = 0$ – אין קשר לינארי.
- $|r|$ קרוב ל־1 -> קשר חזק.

מתאם פירסון (r) מודד קשר לינארי בין שני משתנים כמותיים.



איור 1: דיאגרמת פיזור - קשר חיובי.

4.10 נוסחת מקדם המתאם

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot S_{nx} \cdot S_{ny}}$$

או שקול:

$$r = \frac{1}{n}\sum Z_{x_i}Z_{y_i}$$

4.10.1 דגש למבחן

מתאם הוא **קו-וריאנס מתוקנן**.

4.11 תכונות חשובות של מתאם פירסון

- חסר יחידות.
- סימטרי: $r(x,y) = r(y,x)$.
- הוספת קבוע או כפל בקבוע חיובי — לא משנה את r.
- כפל בקבוע שלילי — הופך את סימן r.

4.12 מצבים שבהם מתאם אינו מוגדר

- סטיית התקן של אחד המשתנים שווה לאפס.

4.12.1 דגש למבחן

לא אומרים $r = 0$ — אלא **לא מוגדר**.

4.13 קשר חזק $\neq$ סיבתיות

גם אם r גבוה:

- לא ניתן להסיק על השפעה סיבתית.
- ייתכן משתנה מתערב.

4.14 השפעת טרנספורמציות לינאריות על מדדים יחסיים

נבחן טרנספורמציה מהצורה:

$$Y = aX + b$$

4.14.1 השפעה על ציון תקן (Z)

- הוספת קבוע ($b \neq 0$): ציון התקן **אינו משתנה**.
- הכפלה בקבוע חיובי ($a > 0$): ציון התקן **אינו משתנה**.
- הכפלה בקבוע שלילי ($a < 0$): סימן ציון התקן **מתהפך**.

4.14.2 השפעה על מתאם פירסון (r)

- הוספת קבוע לאחד המשתנים: המתאם **אינו משתנה**.
- הכפלה בקבוע חיובי: המתאם **אינו משתנה**.
- הכפלה בקבוע שלילי: סימן המתאם **מתהפך**.

4.14.3 דגש למבחן

טרנספורמציות לינאריות **אינן משנות עוצמת קשר**, רק את כיוונו במקרה של כפל שלילי.

4.15 טעויות נפוצות במבחנים

- לחשב מתאם פירסון למשתנה מסולם סדר.
- להסיק סיבתיות ממתאם.
- לבלבל בין עוצמת הקשר לסימן הקשר.
- לחשוב שתקנון משנה מתאם.

4.16 הערת העמקה: תקנון ומתאם פירסון

4.16.1 למה לאחר תקנון הממוצע הוא 0

נגדיר לכל תצפית:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$$

הממוצע של ציוני התקן הוא:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{S_x} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

מאחר ש:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

נקבל:

$$\bar{z} = 0$$

4.16.2 למה סטיית התקן והשונות לאחר תקנון שוות ל־1

השונות של ציוני התקן:

$$S_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{S_x^2} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

מאחר ש:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

נקבל:

$$S_z^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad S_z = 1$$

4.16.3 למה מתאם פירסון תמיד בין -1 ל-1

ניתן לכתוב את מתאם פירסון כך:

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{x_i} z_{y_i}$$

זהו ממוצע המכפלות של ציוני התקן, וניתן לפרשו כמכפלה סקלרית של שני וקטורים מתוקננים. לפי אי־שוויון קושי–שוורץ (המבטא גבול גיאומטרי על מכפלה סקלרית של וקטורים), מתקבל כי:

$$|r| \leq 1$$

שוויון מתקבל כאשר הקשר הלינארי מושלם (חיובי או שלילי).

5 יחידה 5: קומבינטוריקה

קומבינטוריקה עוסקת בספירת מספר האפשרויות לבחירה או לסידור של אובייקטים, בהתאם לכללי הבחירה: האם יש חשיבות לסדר? האם יש החזרה? האם יש תנאים או מגבלות?

5.1 עקרון הכפל

5.1.1 הגדרה

כאשר תהליך מורכב ממספר שלבים בלתי תלויים, ומספר האפשרויות בכל שלב ידוע – מספר האפשרויות הכולל הוא מכפלת האפשרויות בכל שלב.

5.1.2 הסבר אינטואיטיבי

אם יש 3 אפשרויות לשלב ראשון ו־5 לשלב שני, אז לכל בחירה ראשונה יש 5 המשכים.

5.1.3 דוגמה

בחירת קוד בן 2 תווים:

- תו ראשון: 4 אפשרויות
- תו שני: 10 אפשרויות

סה"כ: $4 \cdot 10 = 40$

5.1.4 דגש למבחן

עובד רק אם כל שלב מתבצע **ללא תלות** בבחירות הקודמות.

5.2 פרמוטציות – סידור עם חשיבות לסדר

5.2.1 פרמוטציה ללא חזרות

הגדרה: סידור של n איברים שונים כאשר הסדר חשוב.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

דוגמה: סידור 5 סטודנטים בשורה: $5!$

5.2.2 דגשים למבחן

- אם הסדר חשוב – זו פרמוטציה.
- מילים כמו: **סידור, שורה, תור** □ לרוב פרמוטציה.

5.3 פרמוטציות עם חזרות

5.3.1 הגדרה

כאשר מסדרים n איברים, אך חלקם זהים זה לזה.

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots}$$

כאשר k_i הוא מספר הפעמים שכל איבר זהה מופיע.

5.3.2 דוגמה

המילה "תותים" (5 אותיות, ת' פעמיים):

$$\frac{5!}{2!}$$

5.3.3 דגש למבחן

זהות □ חזרה. אם האיברים **זהים לחלוטין** – חייבים לחלק בפקטוריאל.

5.4 וריאציות – בחירה עם חשיבות לסדר

5.4.1 ללא חזרות

בחירה של k איברים מתוך n, כאשר הסדר חשוב ואין חזרות:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5.4.2 עם חזרות

בחירה של k איברים מתוך n, כאשר הסדר חשוב ויש חזרות:

$$n^k$$

5.4.3 דוגמאות

- □ קוד בן 3 ספרות (עם חזרות): 10^3
- □ קוד בן 3 אותיות שונות: $\frac{26!}{23!}$

5.4.4 דגש למבחן

המילה **קוד** כמעט תמיד □ יש חשיבות לסדר.

5.5 קומבינציות – בחירה ללא חשיבות לסדר

5.5.1 שיטת המקלות והכוכבים

שיטה לספירת מספר הדרכים לחלק מספר זהה של פריטים בין תאים שונים.

5.5.2 מתי משתמשים

- □ כאשר הפריטים זהים לחלוטין
- □ כאשר הסדר לא חשוב
- □ כאשר מותרת חזרה

5.5.3 דוגמה

כמה דרכים לחלק k פריטים זהים בין n תאים?

5.5.4 הרעיון

מייצגים:

- כוכבים ($*$) – הפריטים
- מקלות ($|$) – הפרדה בין תאים

מספר הדרכים הוא:

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

5.5.5 דגש למבחן

אם כתוב:

"כמה דרכים לחלק..."

וסדר לא חשוב ⟸ לחשוב מיד על מקלות וכוכבים.

5.5.6 הגדרה

בחירה של k איברים מתוך n, כאשר הסדר **לא** חשוב ואין חזרות:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5.5.7 הסבר אינטואיטיבי

לא משנה באיזה סדר בחרנו – רק **מי נבחר**.

5.5.8 דוגמאות

- בחירת ועד
- בחירת קבוצה
- בחירת פריטים

5.5.9 דגש למבחן

אם שואלים רק **הרכב** ולא תפקידים – זו קומבינציה.

5.6 "לפחות", "בדיוק" ו־"לא יותר מ־"

5.6.1 לפחות

לרוב נוח לעבוד עם המשלים:

$$P(\text{לפחות אחד}) = 1 - P(\text{אף אחד})$$

5.6.2 בדיוק

מחלקים למקרים שאינם חופפים ומסכמים.

5.6.3 לא יותר מ־

כולל כמה תרחישים □ מחשבים כל אחד בנפרד ומחברים.

5.6.4 דגש למבחן

המילה **לפחות** היא נורת אזהרה – לעצור ולחשוב.

5.7 שיבוץ עם מגבלות (רצפים אסורים)

5.7.1 עיקרון

- סופרים את כל הסידורים
- מחסירים סידורים לא רצויים
- מוסיפים חיתוכים (עקרון ההכלה וההפרדה)

5.7.2 טכניקת ה"גוש"

כאשר שני איברים חייבים להיות סמוכים – מתייחסים אליהם כאל איבר אחד.

5.7.3 דוגמה

אם A ו־B חייבים להיות יחד:

$(A, B) \Rightarrow$ גוש אחד

5.8 טעויות נפוצות בקומבינטוריקה

- להתבלבל בין סדר חשוב / לא חשוב
- לשכוח לבדוק אם יש חזרות
- לא לשים לב לזהות בין איברים
- לשכוח להוסיף חיתוכים

5.9 דגש מסכם למבחן

לפני כל חישוב – לשאול:

1. סדר חשוב?
2. יש חזרות?
3. יש זהות?
4. יש תנאים?

6 יחידה 6: הסתברות

יחידה זו עוסקת בהגדרה פורמלית של הסתברות, מאורעות ויחסים ביניהם. הדגש הוא על חשיבה נכונה: זיהוי מרחב המדגם, המאורע הרצוי, ושימוש בחוקי הסתברות בסיסיים.

6.1 ניסוי מקרי ומרחב מדגם

6.1.1 הגדרות

- **ניסוי מקרי:** תהליך שתוצאתו אינה ידועה מראש.
- **מרחב מדגם** (Ω): קבוצת כל התוצאות האפשריות של הניסוי.
- **מאורע:** תת־קבוצה של מרחב המדגם.

6.1.2 דוגמה

בהטלת קובייה:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

6.2 הסתברות של מאורע

6.2.1 הגדרה

כאשר כל התוצאות שוות הסתברות:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

6.2.2 דגשים למבחן

- תמיד לבדוק: מהו **הסה"כ**? מהו **הרצוי**?
- $P(\Omega) = 1$
- $0 \le P(A) \le 1$

6.3 מאורעות משלימים

6.3.1 הגדרה

המשלים של מאורע A מסומן $\bar{A}$ ומכיל את כל התוצאות שאינן ב־A.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

6.3.2 דגש למבחן

המילים **"לפחות"**, **"לא"**, **"אף אחד"** □ לעצור ולחשוב על משלים.

6.4 איחוד וחיתוך של מאורעות

6.4.1 איחוד

$$A \cup B = \{\text{A או B או שניהם}\}$$

6.4.2 חיתוך

$$A \cap B = \{\text{A וגם B}\}$$

6.4.3 חוק האיחוד

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6.4.4 דגשים למבחן

- □ לשים לב לא לספור פעמיים את החיתוך.
- □ אם המאורעות זרים □ $P(A \cap B) = 0$

6.5 מאורעות זרים ומאורעות משלימים

6.5.1 מאורעות זרים

$$A \cap B = \emptyset$$

6.5.2 מאורעות משלימים

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

6.5.3 דגש למבחן

מאורעות משלימים הם תמיד גם זרים וגם ממצים.

6.6 הסתברות מותנית (ברמה אינטואיטיבית)

6.6.1 רעיון

הסתברות של מאורע **בהינתן** שמאורע אחר כבר קרה.

6.6.2 דוגמה

מה הסיכוי שסטודנט אוכל בריא **בהינתן** שהוא עושה ספורט?

6.6.3 דגש למבחן

לעיתים אין צורך בנוסחה – מספיק לצמצם את מרחב המדגם.

6.7 בעיות רצף וחזרות

6.7.1 רעיון

כאשר מבצעים ניסוי חוזר (כמו הזמנת קולה):

- □ אם יש תלות □ מכפילים הסתברויות
- □ רצף מסוים □ סדר חשוב

6.7.2 דוגמה

בדיוק 5 פעמים קולה בלי גזים מתוך 7:

$$\binom{7}{5} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2$$

6.7.3 דגש למבחן

- "בדיוק" ← קומבינציה
- "ברצף" ← בלי קומבינציה

6.8 שיטת המשלים

6.8.1 רעיון

כשקשה לחשב ישירות – מחשבים את המקרה היחיד שלא רוצים.

$$P(\text{לפחות אחד}) = 1 - P(\text{אף אחד})$$

6.8.2 דוגמה

לפחות עוגה טעימה אחת:

$$1 - P(\text{שתיהן לא טעימות})$$

6.9 שילוב הסתברות וקומבינטוריקה

6.9.1 עיקרון

$$P = \frac{\text{רצוי}}{\text{סה"כ}}$$

6.9.2 דוגמאות קלאסיות

- יד פוקר
- בחירת קלפים
- סידורי ישיבה

6.10 טעויות נפוצות בהסתברות

- לשכוח משלים
- לבלבל בין איחוד לחיתוך
- לא להגדיר נכון את מרחב המדגם
- לחשוב ש"או" הוא תמיד חיבור פשוט

6.11 דגש מסכם למבחן

לפני חישוב:

1. מהו הניסוי?
2. מהו מרחב המדגם?
3. מה הרצוי?
4. יש תלות? יש סדר?
5. שווה לבדוק משלים?

6.12 הסתברות מותנית

6.12.1 הגדרה

ההסתברות של מאורע A בהינתן שמאורע B התרחש:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0$$

6.12.2 הסבר אינטואיטיבי

הסתברות מותנית היא הסתברות בעולם מצומצם:

- אנו יודעים ש־B קרה
- לכן מרחב המדגם מצטמצם ל־B
- בודקים מה החלק של A בתוך העולם הזה

6.12.3 דגש למבחן

לא מחשבים "סתם לפי הנוסחה" — קודם מצמצמים את מרחב המדגם בראש.

6.13 הקשר בין חיתוך להסתברות מותנית

מההגדרה מתקבל:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

6.13.1 דגש למבחן

אם כתוב:

"בהינתן ש־B קרה, מה ההסתברות שגם A קרה?"

סביר מאוד שצריך חיתוך דרך הסתברות מותנית.

6.14 עצמאות בין מאורעות

6.14.1 הגדרה

מאורעות A ו־B נקראים **בלתי־תלויים** אם:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

6.14.2 נוסחה שקולה

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

6.14.3 הסבר אינטואיטיבי

התרחשות של B לא משנה את הסיכוי של A.

6.14.4 דגש למבחן

עצמאות היא תכונה מתמטית — לא אינטואיטיבית. אין להסיק עצמאות מתוך ניסוח מילולי בלבד.

6.15 טעויות נפוצות בעצמאות

- לבלבל בין מאורעות זרים לעצמאיים (מאורעות זרים עם הסתברות חיובית **אינם** עצמאיים)
- להניח שעצמאות נובעת מ"אין קשר סיבתי"

6.16 נוסחת בייס

6.16.1 הגדרה

נוסחת בייס מתקבלת ישירות מהגדרת הסתברות מותנית:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

כאשר:

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})$$

6.17 מתי צריך בייס

- כשנותנים הסתברויות בכיוון אחד (אבחון, בדיקה)
- ושואלים הסתברות בכיוון ההפוך

6.17.1 דוגמה טיפוסית

בדיקה רפואית:

- P(חולה | חיובי) נתון
- שואלים P(חיובי | חולה)

6.18 עץ הסתברויות

6.18.1 רעיון

עץ הסתברות מייצג ניסוי רב־שלבי:

- הסתברויות על הענפים
- מכפילים לאורך מסלול
- מחברים מסלולים לאותו מאורע

6.18.2 דגש למבחן

עץ טוב יכול לחסוך שימוש מפורש בנוסחת בייס.

6.19 השוואה: בייס מול עץ

- בייס — נוסחתי, אלגנטי, קצר
- עץ — ויזואלי, אינטואיטיבי, בטוח מטעויות

בשניהם מתקבלת אותה תוצאה.

6.20 טעויות נפוצות במבחנים

- לבלבל בין $P(A \mid B)$ ל־$P(B \mid A)$
- לשכוח לחשב את $P(B)$ במכנה של בייס
- להניח עצמאות בלי בדיקה
- לא לצמצם מרחב מדגם לפני חישוב

6.21 דגש מסכם ליחידה

לפני חישוב:

1. מה ידוע?
2. על מה מתנים?
3. האם המאורעות עצמאיים?
4. נוח יותר עץ או בייס?

7 יחידה 7: מעבר ממדגם לאוכלוסייה – סטטיסטים, פרמטרים ומשתנים מקריים

יחידה זו עוסקת במעבר מהנתונים שנצפים בפועל (מדגם) אל מודל תאורטי של האוכלוסייה שממנה המדגם נלקח. זהו מעבר מושגי קריטי: משכיחויות והסתברויות אמפיריות אל הסתברות כתכונה של מודל.

7.1 מדגם ואוכלוסייה

7.1.1 הגדרות

- **אוכלוסייה (Population)** – אוסף כל המקרים האפשריים בעלי עניין, לרוב תאורטי ואינו נצפה במלואו.
- **מדגם (Sample)** – תת־קבוצה סופית של האוכלוסייה שנמדדת בפועל.

7.1.2 דגש מושגי

- באוכלוסייה מדברים על **הסתברויות**.
- במדגם מדברים על **שכיחויות**.
- המדגם נועד לשמש מקור מידע על האוכלוסייה.

7.2 פרמטר וסטטיסטי

7.2.1 הגדרות

- **פרמטר (Parameter)** – גודל קבוע המתאר את האוכלוסייה כולה (למשל: μ, σ, p).
- **סטטיסטי (Statistic)** – גודל מחושב מתוך המדגם (למשל: $\bar{X}, S, \hat{p}$).

7.2.2 דוגמאות

- μ – ממוצע האוכלוסייה
- $\bar{X}$ – ממוצע המדגם
- p – הסתברות באוכלוסייה
- $\hat{p}$ – שכיחות יחסית במדגם

7.2.3 דגש למבחן

סטטיסטי הוא **משתנה מקרי**. פרמטר הוא **קבוע לא ידוע**.

7.3 משתנה מקרי (Random Variable)

7.3.1 הגדרה

משתנה מקרי הוא פונקציה המתאימה ערך מספרי לכל תוצאה אפשרית בניסוי מקרי.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

7.3.2 פירוש

המשתנה המקרי אינו "המדידה עצמה" אלא ייצוג מתמטי של תוצאת הניסוי.

7.4 משתנה מקרי בדיד ורציף

7.4.1 בדיד (Discrete)

- מקבל מספר סופי או בן־מנייה של ערכים.
- ניתן לדבר על:

$$P(X = x)$$

7.4.2 רציף (Continuous)

- מקבל אינסוף ערכים בתחום רציף.
- ההסתברות לערך בודד היא:

$$P(X = x) = 0$$

- הסתברות מוגדרת רק על קטעים.

7.4.3 דגש למבחן

האפס אינו אומר "בלתי אפשרי" – אלא "זניח יחסית לאינסוף האפשרויות".

7.5 שכיחות, שכיחות יחסית והסתברות

7.5.1 במדגם

- שכיחות: מספר הפעמים שערך מופיע.
- שכיחות יחסית:

$$\frac{f_i}{n}$$

7.5.2 באוכלוסייה

- אין ספירה בפועל.
- יש הסתברות כתכונה של המודל.

7.5.3 קשר חשוב

כאשר גודל המדגם גדל:

$$\text{שכיחות יחסית} \longrightarrow \text{הסתברות}$$

7.6 תוחלת (Expectation)

7.6.1 רעיון

התוחלת היא הערך הממוצע של משתנה מקרי בטווח הארוך.

7.6.2 בדיד

$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$$

7.6.3 רציף

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

7.6.4 פירוש אינטואיטיבי

אם נבצע את הניסוי מספר רב מאוד של פעמים – הממוצע של התוצאות יתקרב לתוחלת.

7.7 סטטיסטי כמשתנה מקרי

7.7.1 רעיון מרכזי

סטטיסטי (כמו $\bar{X}$) תלוי במדגם – ולכן הוא משתנה מקרי.

7.7.2 משמעות

- לסטטיסטי יש התפלגות.
- ניתן לדבר על תוחלת ושונות של סטטיסטי.

7.8 אמידה (Estimation)

7.8.1 אומד (Estimator)

סטטיסטי שנועד להעריך פרמטר לא ידוע.

7.8.2 דוגמה

$\bar{X}$ הוא אומד ל- μ

7.9 תכונות של אומדים

7.9.1 חוסר הטיה (Unbiasedness)

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

7.9.2 יעילות (Efficiency)

אומד עם שונות קטנה יותר עדיף.

7.9.3 קונסיסטנטיות (Consistency)

כאשר $n \to \infty$:

$$\hat{\theta} \to \theta$$

7.9.4 מספיקות (Sufficiency)

האומד מכיל את כל המידע הרלוונטי על הפרמטר.

7.10 דגש מסכם ליחידה

יחידה זו מבצעת את המעבר:

פרמטרים $\rightarrow$ מודל הסתברותי $\rightarrow$ סטטיסטים $\rightarrow$ נתונים

זהו הבסיס לכל הסטטיסטיקה ההיסקית בהמשך הקורס.

8 יחידה 8: ייצוגים גרפיים, התפלגות וצפיפות

יחידה זו עוסקת באופן שבו מתארים משתנים כמותיים באמצעות גרפים, ובמעבר ההדרגתי מייצוג של נתונים במדגם לייצוג תאורטי של משתנה באוכלוסייה.
המעבר מתבצע בשלבים:

- ייצוג נתונים במדגם (שכיחויות)
- ייצוג רציף באמצעות היסטוגרמה
- מעבר לצפיפות ולשטחים
- פונקציית צפיפות כמודל אוכלוסייה

8.1 מהי התפלגות

התפלגות מתארת כיצד ערכי המשתנה **מתפזרים** על פני תחום הערכים האפשריים. לא מדובר בערך יחיד, אלא בתיאור של מבנה הנתונים כולו: איפה יש ריכוז, איפה יש דלילות, ומה צורת הפיזור.

8.2 ייצוג נתונים במדגם

כאשר עובדים עם מדגם סופי, הנתונים ניתנים לספירה. בשלב זה אנו מתארים את הנתונים באמצעות **שכיחויות**.

8.2.1 דיאגרמת מקלות

דיאגרמת מקלות מתאימה למשתנים בדידים או קטגוריאליים.
מאפיינים:

- ציר X – קטגוריות
- ציר Y – שכיחות או שכיחות יחסית
- אין משמעות למרחקים בין הקטגוריות

גובה המקל מייצג ישירות את מספר התצפיות בקטגוריה.

8.3 מעבר למשתנים רציפים

כאשר המשתנה כמותי ורציף (למשל: זמן, גובה, משקל), לא ניתן לייצג כל ערך בנפרד. במקום זאת מחלקים את התחום לקטגוריות רציפות (bins).

8.4 היסטוגרמה

היסטוגרמה היא ייצוג גרפי של משתנה רציף במדגם.
מאפיינים:

- ציר X – תחומים רציפים

- העמודות צמודות
- לכל עמודה יש רוחב וגובה

8.5 למה גובה העמודה הוא צפיפות ולא שכיחות

נניח קטגוריה ברוחב w_i עם שכיחות f_i.
אם היינו מציבים את גובה העמודה כשכיחות, אז השטח היה:

$$\text{שטח} = f_i \cdot w_i$$

ומחלקות רחבות היו מקבלות שטח גדול יותר גם בלי יותר נתונים.
לכן מגדירים:

$$\text{צפיפות} = \frac{f_i}{w_i}$$

ואז מתקיים:

$$\text{שטח} = \text{צפיפות} \times \text{רוחב} = f_i$$

מסקנה: השטח מייצג שכיחות – לא הגובה.

8.6 צפיפות יחסית ונירמול

כדי לעבור משכיחות להסתברות מדגמית, מחלקים את השכיחות ב־n.

$$\text{צפיפות יחסית} = \frac{f_i}{n \cdot w_i}$$

ואז:

$$\text{שטח העמודה} = \frac{f_i}{n}$$

כלומר: השטח מייצג **הסתברות מדגמית**, וסכום כל השטחים שווה ל־1.

8.7 מעבר מהיסטוגרמה לפונקציית צפיפות

כאשר:

- גודל המדגם גדל
- רוחב הקטגוריות קטן

ההיסטוגרמה מתקרבת לעקומה רציפה.
בגבול מתקבלת **פונקציית צפיפות** $f(x)$.

8.8 פונקציית צפיפות

A probability density function $f(x)$ satisfies:

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

ההסתברות לקבל ערך בתחום $[a, b]$ היא:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

8.9 למה ההסתברות לערך מדויק היא אפס

עבור משתנה רציף:

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)\,dt = 0$$

נקודה היא קטע באורך אפס, ולכן השטח שלה אפס.
זה **לא** אומר שהערך בלתי אפשרי, אלא שאין לו משקל הסתברותי.

8.10 צורות התפלגות

8.10.1 התפלגות סימטרית

□ ממוצע = חציון = שכיח

8.10.2 הטיה ימנית (זנב ימני)

ממוצע > חציון > שכיח

8.10.3 הטיה שמאלית (זנב שמאלי)

שכיח > חציון > ממוצע

8.11 ההתפלגות הפעמונית

התפלגות נורמלית היא סימטרית ובעלת צורת פעמון, ומאופיינת על ידי:

□ μ – תוחלת

□ σ – סטיית תקן

סטיית התקן קובעת את רוחב ההתפלגות: סטיית תקן גדולה □ פיזור רחב יותר.

8.12 פוליגון

פוליגון מתקבל מחיבור נקודות האמצע של מחלקות ההיסטוגרמה, כאשר ציר Y מייצג צפיפות.
גם כאן: **השטח שמתחת לפוליגון מייצג שכיחות או הסתברות**.

8.13 דגש מסכם ליחידה

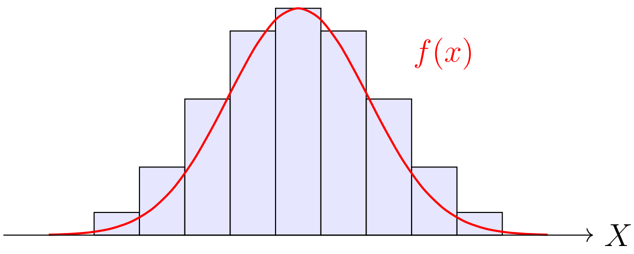
העיקרון המאחד של היחידה:

במשתנים רציפים — הסתברות מיוצגת על ידי שטח

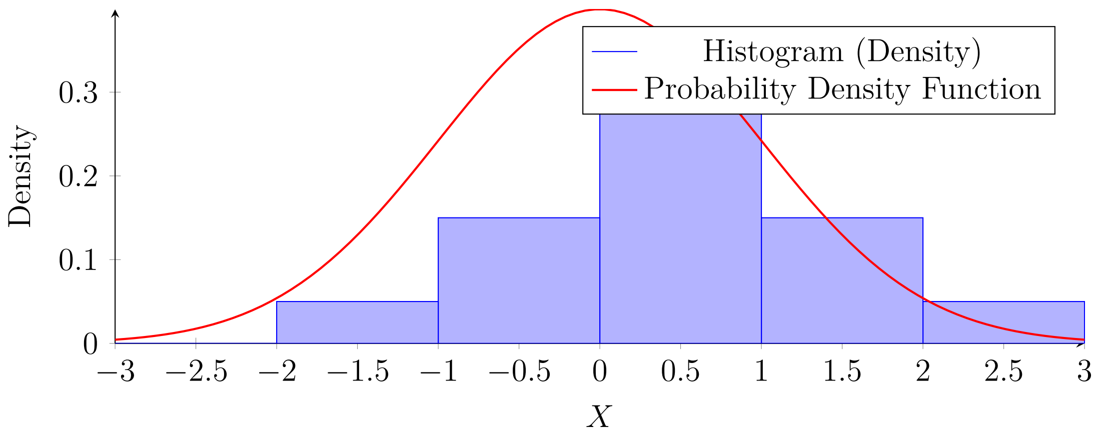
המעבר:
מדגם $\rightarrow$ היסטוגרמה $\rightarrow$ צפיפות $\rightarrow$ פונקציית צפיפות

8.14 המעבר מהיסטוגרמה לעקומת צפיפות

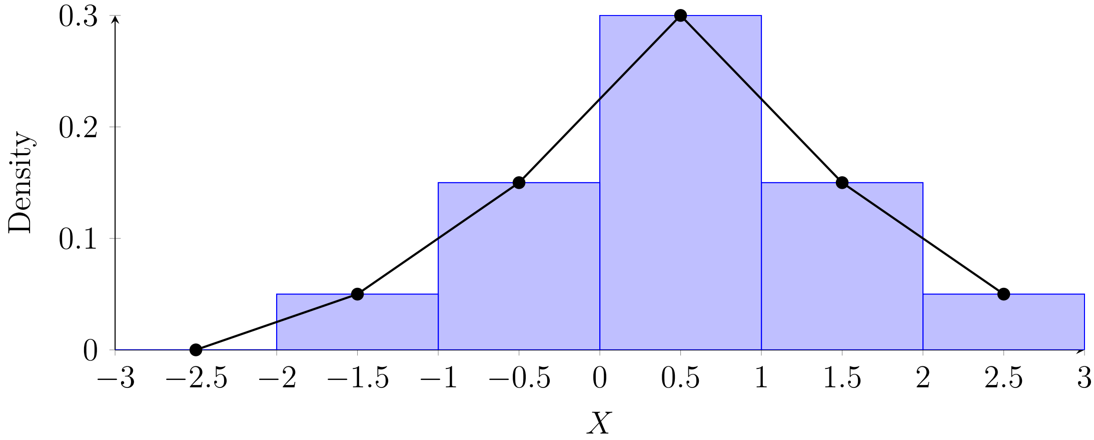
ככל שנגדיל את המדגם ונצמצם את רוחב המחלקות, ההיסטוגרמה תהפוך לעקומה רציפה. השטח מתחת לעקומה תמיד יהיה שווה ל-1.



איור 2: היסטוגרמה של המדגם מול פונקציית צפיפות של האוכלוסייה.



איור 3: המעבר מהיסטוגרמה למדד צפיפות רציף. השטח מייצג הסתברות.



איור 4: היסטוגרמה (צפיפות) ופוליגון צפיפות: הקו מחבר את מרכזי המחלקות בגובה העמודות.

9 יחידה 9: ההתפלגות הנורמלית

יחידה זו עוסקת בהתפלגות הנורמלית, שהיא מודל תאורטי מרכזי בסטטיסטיקה. הדגש הוא על הבנת צורת ההתפלגות, משמעות הפרמטרים שלה, והקשר בין שטח תחת העקומה להסתברות.

9.1 מהי התפלגות נורמלית

התפלגות נורמלית היא התפלגות רציפה, סימטרית ופעמונית, המתוארת על ידי שני פרמטרים:

- μ – תוחלת (ממוצע)
- σ – סטיית תקן

9.1.1 מאפיינים מרכזיים

- סימטריה סביב μ
- ממוצע = חציון = שכיח
- זנבות אינסופיים (אך השכיחות בהם קטנה מאוד)

9.2 משמעות הפרמטרים

9.2.1 התוחלת μ

קובעת את מיקום ההתפלגות על ציר ה־X.

9.2.2 סטיית התקן σ

קובעת את פיזור ההתפלגות:

- σ גדולה → התפלגות רחבה ושטוחה
- σ קטנה → התפלגות צרה וגבוהה

9.3 שטח כהסתברות

9.3.1 פונקציית צפיפות אינה הסתברות

פונקציית הצפיפות $f(x)$ אינה נותנת הסתברות לערך בודד. היא מתארת את **קצב הצטברות ההסתברות** סביב ערך מסוים.

באופן פורמלי:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

לכן:

- $f(x)$ יכולה להיות גדולה מ־1
- $f(x)$ אינה הסתברות
- רק **שטח** מתחת לגרף מייצג הסתברות

בהתפלגות נורמלית:

הסתברות = השטח מתחת לעקומה

9.3.2 דגשים

- סך כל השטח = 1
- הסתברות לערך בודד = 0 נקודה היא קטע באורך אפס, ולכן השטח שלה אפס. אין מדובר באירוע בלתי אפשרי, אלא באירוע חסר משקל הסתברותי.
- מחשבים הסתברויות רק עבור תחומים

9.3.3 הסבר מתמטי: הסתברות לערך בודד

במשתנה מקרי רציף:

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$$

9.3.4 מדידה בפועל מול המודל הרציף

למרות שבמודל הרציף ההסתברות לערך בודד היא אפס, בפועל כל מדידה מניבה ערך מספרי יחיד.
הסיבה לכך היא שכל מדידה מתבצעת בדיוק סופי, ולכן ערך מדוד מייצג בפועל טווח קטן של ערכים:

$$x_0 - \varepsilon \le X < x_0 + \varepsilon$$

לטווח כזה יש אורך חיובי ולכן הסתברות חיובית.

9.3.5 שוויון בין $<$ ל־$\le$ במשתנה רציף

במשתנה מקרי רציף מתקיים:

$$P(X \le a) = P(X < a)$$

הסיבה:

$$P(X \le a) = P(X < a) + P(X = a)$$

ומכיוון ש־$P(X = a) = 0$, אין הבדל בין הסימנים.

9.4 כלל האצבע (68–95–99.7)

- כ־68% מהתצפיות בתחום $\mu \pm \sigma$
- כ־95% בתחום $\mu \pm 2\sigma$
- כ־99.7% בתחום $\mu \pm 3\sigma$

9.4.1 דגש למבחן

כלל האצבע הוא **קירוב**, לא חישוב מדויק.

9.5 תקנון

9.5.1 הרעיון

המרה של משתנה נורמלי כללי למשתנה נורמלי סטנדרטי.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

9.5.2 שימור הסתברויות תחת תקנון

התקנון הוא טרנספורמציה לינארית שאינה משנה הסתברויות אלא רק את סולם המדידה.
לכן מתקיים:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

המשמעות:

- האזורים משתנים בציר X
- אך השטח (ההסתברות) נשמר

דגש: התקנון אינו משנה את סדר הערכים ולכן אינו משנה אחוזונים.

9.6 ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית

מסומנת $Z \sim N(0, 1)$.

9.6.1 למה מתקננים

- כדי להשתמש בטבלת Z
- כדי להשוות בין משתנים שונים

9.7 טבלת Z (ראו נספח)

טבלת Z מופיעה בנספח ומשמשת לחישוב שטחים בהתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.
טבלת Z נותנת את השטח מהממוצע (0) ועד לערך Z בעמודה B. כדי לקבל את השטח הכולל משמאל ל־Z חיובי מחשבים:

$$P(Z < z) = 0.5 + B$$

9.7.1 קריאה בסיסית

- שורה – ספרות שלמות + עשירית
- עמודה – מאיות

9.8 מקרים קלאסיים לחישוב

9.8.1 מתחת לערך

$$P(Z < z) \Rightarrow \text{ישירות מהטבלה}$$

9.8.2 מעל לערך

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

9.8.3 בין שני ערכים

$$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$$

9.8.4 סימטריה

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$

9.9 אחוזונים בהתפלגות נורמלית

9.9.1 רעיון

אחוזון הוא ערך שמתחתיו נמצאים $p\%$ מהנתונים.

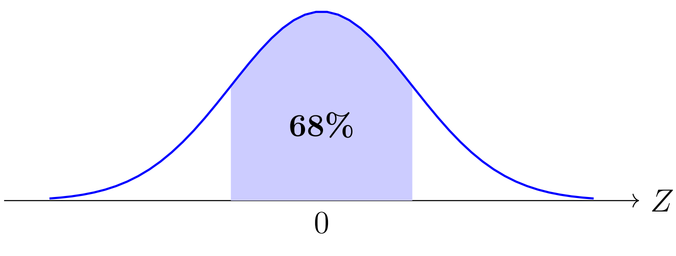
9.9.2 שימוש בטבלה

- מוצאים בטבלה שטח קרוב ל־p
- קוראים את ערך Z
- מבצעים תקנון הפוך:

$$X = \mu + Z\sigma$$

9.10 המחשה גרפית של ההתפלגות הנורמלית

התפלגות נורמלית היא סימטרית ובעלת צורת פעמון. השטח מתחת לעקומה מייצג הסתברות.
percentages] and deviations standard with curve distribution normal of [Image



איור 5: התפלגות נורמלית וכלל האצבע.

9.11 טעויות נפוצות במבחן

- לשכוח ש־Z-table נותנת שטח משמאל
- להתבלבל בין מעל ומתחת
- לא לבצע תקנון לפני שימוש בטבלה
- לחשוב שכל משתנה הוא נורמלי

9.12 דגש מסכם ליחידה

לפני חישוב:

1. האם המשתנה נורמלי?
2. האם צריך תקנון?
3. איזה שטח מחפשים?
4. האם צריך להשתמש בסימטריה?

10 יחידה 10: התפלגות הדגימה

יחידה זו מהווה מעבר מסטטיסטיקה תיאורית לסטטיסטיקה היסקית. המטרה היא להבין כיצד ניתן להסיק על אוכלוסייה שלמה מתוך מדגם, באמצעות התפלגות תיאורטית של סטטיסטי.

10.1 המוטיבציה: למה צריך התפלגות דגימה

במחקר אמיתי:

- האוכלוסייה גדולה מאוד או אינסופית
- לא ניתן למדוד את כולה
- לכן משתמשים במדגם

השאלה המרכזית:

עד כמה ממוצע מדגם מסוים הוא תוצאה סבירה של דגימה מאוכלוסייה נתונה?

10.2 הבעיה בהשוואה לאנשים בודדים

השוואה של ממוצע מדגם להתפלגות של תצפיות בודדות היא **לא הוגנת**:

- ממוצע של מדגם יציב יותר מערך בודד
- ככל ש־n גדל, קשה יותר לקבל ערכים קיצוניים

לכן נדרש בסיס השוואה חדש.

10.3 התפלגות הדגימה – הגדרה

התפלגות הדגימה היא התפלגות תיאורטית של סטטיסטי מסוים, הנבנית מאינסוף מדגמים מקריים בגודל n מאותה אוכלוסייה.

10.3.1 חשוב

כל התפלגות דגימה מוגדרת ביחס ל:

- סטטיסטי מסוים (למשל: ממוצע)
- גודל מדגם מסוים (n)

10.4 התפלגות הדגימה של הממוצעים

זוהי התפלגות של ממוצעי מדגמים, ולא של תצפיות בודדות.

10.4.1 בניית ההתפלגות (רעיונית)

1. דוגמים מדגם בגודל n
2. מחשבים ממוצע
3. מחזירים לאוכלוסייה
4. חוזרים על התהליך אינסוף פעמים

10.4.2 מה מייצג X_i

X_i מייצג תצפית אחת אקראית מהאוכלוסייה.
כלומר:

- X_1 – התצפית הראשונה במדגם
- X_2 – התצפית השנייה במדגם
- $\vdots$
- X_n – התצפית ה־n

כל X_i מתפלג כמו המשתנה באוכלוסייה, ולכולם אותה תוחלת ואותה שונות.

10.5 פרמטרים של התפלגות הדגימה

10.5.1 התוחלת

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

תוחלת התפלגות הדגימה של הממוצעים שווה לתוחלת האוכלוסייה.

10.5.2 סטיית התקן – טעות התקן

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

10.5.3 הנחת אי־תלות

הנוסחאות עבור התוחלת והשונות של ממוצע המדגם נשענות על ההנחה כי:

$X_1, \ldots, X_n$בלתי־תלויים

במקרה זה:

$Cov(X_i, X_j) = 0$ לכל$i \neq j$

ללא אי־תלות, נוסחת השונות של ממוצע המדגם אינה תקפה.

- טעות התקן קטנה מסטיית התקן של האוכלוסייה, משום שממוצעי מדגמים מתפזרים פחות מערכים בודדים.
- ככל שגודל המדגם n גדל, טעות התקן קטנה, והתפלגות הדגימה נעשית צרה יותר סביב μ.

10.5.4 למה הפרמטרים האלה נכונים

אם $X_1, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי־תלויים עם:

$$E[X_i] = \mu \qquad , \qquad Var(X_i) = \sigma^2$$

ונגדיר את ממוצע המדגם:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

אז מתקיים:

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad \text{ו} \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ולכן:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

כלומר: הממוצע של ממוצעי המדגמים שווה לממוצע האוכלוסייה, והפיזור קטן ככל שגודל המדגם גדל.

10.5.5 מדוע שונות של סכום מתפרקת

כאשר מחשבים שונות של ממוצע מדגם, יש צורך לחשב שונות של סכום משתנים מקריים. באופן כללי:

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \; + \; 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

במקרה של דגימה מקרית מהאוכלוסייה, המשתנים $X_1, \ldots, X_n$ הם **בלתי־תלויים**, ולכן:

$$Cov(X_i, X_j) = 0 \qquad \text{לכל} \, i \neq j$$

כתוצאה מכך, איברי הצלב נעלמים, ומתקבל:

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

פירוק זה תקף **רק** תחת הנחת אי־תלות.

10.5.6 תקציר אינטואיטיבי והקשר לשיחה

- מעבר מממוצע רגיל לתוחלת: כאשר מדגמים באקראי מאוכלוסייה, הממוצע המדגמי מתכנס לתוחלת האוכלוסייה. התוחלת היא הממוצע התאורטי של תהליך דגימה אינסופי.
- למה $E(X_i) = E(X)$: כל X_i הוא תצפית אקראית מאותה אוכלוסייה, ולכן יש לו אותה התפלגות, אותה תוחלת ואותה שונות.
- למה $E(\bar{X}) = \mu$: תוחלת היא אופרטור לינארי, ולכן תוחלת של סכום היא סכום התוחלות, גם ללא תלות בין המשתנים.
- למה השונות קטנה ב-n: שונות מודדת פיזור. כאשר מחשבים ממוצע של n משתנים בלתי־תלויים, הסטיות נוטות להתאזן זו עם זו, ולכן הפיזור קטן פי n.
- תפקיד אי־התלות: אי־תלות מבטיחה שאין קו־וריאנס בין X_i ל-X_j, ולכן אין איברי צלב בשונות של הממוצע. ללא אי־תלות — נוסחת טעות התקן אינה תקפה.
- ההבדל בין ערך בודד לממוצע מדגם: ערך בודד מושווה לסטיית התקן σ, בעוד שממוצע מדגם מושווה לטעות התקן $\sigma/\sqrt{n}$. לכן אותו פער מספרי יכול להיראות קיצוני מאוד כערך בודד, אך סביר כממוצע מדגם.
- למה מותר להשתמש ב־Z: כאשר התפלגות הדגימה נורמלית (או בקירוב), ניתן לתקנן את ממוצע המדגם ולהשתמש בטבלת Z כדי להעריך הסתברויות.

10.6 משמעות טעות התקן

טעות התקן מודדת את מידת הפיזור של ממוצעי מדגמים סביב תוחלת האוכלוסייה.

10.6.1 דגש למבחן

ככל ש־n גדול יותר:

- התפלגות הדגימה צרה יותר
- ממוצע מדגם קיצוני נעשה פחות סביר

10.7 צורת התפלגות הדגימה

10.7.1 מקרה מיוחד: אוכלוסייה נורמלית

אם המשתנה באוכלוסייה מתפלג נורמלית:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

אז לכל גודל מדגם n, ממוצע המדגם מתפלג נורמלית:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

תוצאה זו נובעת מהעובדה שסכום של משתנים מקריים נורמליים בלתי־תלויים הוא עצמו משתנה מקרי נורמלי, כאשר התוחלת היא סכום התוחלות והשונות היא סכום השונויות.
ההוכחה הפורמלית של טענה זו אינה טריוויאלית, ומשתמשת בכלים מתמטיים מתקדמים כגון פונקציות אופי או פונקציות יוצרות מומנטים, ולכן אינה נכללת במסגרת הקורס.

10.7.2 משפט הגבול המרכזי

כאשר $n \geq 30$, התפלגות הדגימה של הממוצעים תהיה נורמלית בקירוב, ללא קשר לצורת ההתפלגות באוכלוסייה.

10.7.3 מקרה מיוחד

אם המשתנה מתפלג נורמלית באוכלוסייה:

- התפלגות הדגימה נורמלית **לכל** n

10.7.4 הערה על הוכחת משפט הגבול המרכזי

משפט הגבול המרכזי הוא אחת התוצאות העמוקות והחשובות ביותר בהסתברות, אך ההוכחה שלו אינה טריוויאלית ואינה נכללת במסגרת הקורס.
המשפט קובע כי סכום (או ממוצע) של משתנים מקריים בלתי־תלויים ובעלי תוחלת ושונות סופיות, מתכנס בהתפלגותו להתפלגות נורמלית, גם כאשר ההתפלגות באוכלוסייה אינה נורמלית.
ההוכחות הפורמליות למשפט משתמשות בכלים מתקדמים כגון:

- פונקציות אופי (Characteristic Functions)
- טרנספורם פורייה
- משפטי התכנסות של פונקציות

- גבולות חלשים של התפלגויות

הקורס עושה שימוש במשפט כתוצאה נתונה, ומסתפק בפרשנות האינטואיטיבית שלו: כאשר גודל המדגם גדול, השפעת הצורה המקורית של ההתפלגות באוכלוסייה נחלשת, והממוצע המדגמי מתנהג בקירוב כמו משתנה נורמלי.

10.7.5 למה $n \geq 30$

המספר 30 הוא כלל אצבע ולא גבול חד.
בפועל:

- בהתפלגויות סימטריות – לעיתים מספיק n קטן יותר
- בהתפלגויות מוטות או קיצוניות – נדרש n גדול יותר

10.7.6 מקרי קצה של גודל המדגם

המקרה $n = 1$ כאשר גודל המדגם הוא $n = 1$ מתקבל:

$$\bar{X} = X \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\bar{X}} = \sigma$$

כלומר: אין הבדל בין תצפית בודדת לבין ממוצע מדגם, והתפלגות הדגימה חופפת להתפלגות האוכלוסייה.

המקרה $n \to \infty$ כאשר גודל המדגם שואף לאינסוף:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$$

במקרה זה ממוצעי המדגמים מתכנסים לתוחלת האוכלוסייה, וההשפעה של מקריות הדגימה נעלמת.
מכאן נובע שככל ש־n גדול יותר, הממוצע המדגמי יציב ומדויק יותר.

10.8 חישוב הסתברויות בהתפלגות הדגימה

כאשר התפלגות הדגימה נורמלית, ניתן לחשב ציוני תקן:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ולתרגם אותם להסתברויות באמצעות טבלת Z.

10.8.1 קשר להתפלגות הנורמלית הסטנדרטית

לאחר תקנון:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

המשתנה Z מתפלג בקירוב:

$$Z \sim N(0,1)$$

ולכן ניתן להשתמש בטבלת Z כפי שנעשה ביחידה 9.

10.9 מה מאפשרת התפלגות הדגימה

- בדיקת מידת הקיצוניות של ממוצע מדגם
- השוואה הוגנת בין מדגם לאוכלוסייה
- בסיס לבדיקת השערות סטטיסטיות

10.9.1 מה היא לא מאפשרת

- חישוב תוחלת האוכלוסייה
- הסקת צורת ההתפלגות באוכלוסייה

10.10 אזהרה חשובה

התפלגות הדגימה מתארת סטטיסטי (כגון ממוצע), ולא תצפיות בודדות.
לכן:

- ערך בודד נמדד ביחס ל־σ
- ממוצע מדגם נמדד ביחס ל־$\sigma/\sqrt{n}$

10.11 טעויות נפוצות במבחן

- לבלבל בין התפלגות האוכלוסייה להתפלגות הדגימה
- לחשוב שהתפלגות הדגימה מורכבת ממספר סופי של מדגמים
- לשכוח לחלק ב־$\sqrt{n}$ בעת חישוב טעות התקן
- להשוות ממוצע מדגם להתפלגות של ערכים בודדים

10.12 דגש מסכם ליחידה

לפני חישוב, שאלי:

1. האם מדובר בממוצע מדגם?
2. מהו n?
3. האם התפלגות הדגימה נורמלית?
4. האם אני משתמשת בטעות התקן ולא בסטיית התקן של האוכלוסייה?

11 יחידה 11: בדיקת השערות סטטיסטיות

יחידה זו עוסקת בבדיקת השערות לגבי פרמטרים באוכלוסייה, על סמך מדגם מקרי, באמצעות התפלגות הדגימה. זהו השימוש המרכזי בהתפלגות הדגימה של ממוצעים.

11.1 הרעיון הכללי

בדיקת השערות עונה על השאלה:

האם תוצאת המדגם סבירה בהנחה שטענה מסוימת על האוכלוסייה נכונה?

הבדיקה אינה מוכיחה טענות, אלא בוחנת סבירות.

11.2 השערות הבדיקה

11.2.1 השערת האפס H_0

טענה שמרנית על האוכלוסייה, המניחה שאין אפקט או שאין שינוי.

11.2.2 השערת המחקר H_1

טענה חלופית, המייצגת אפקט, שינוי או כיוון מסוים.

11.2.3 דגש למבחן

הבדיקה מתבצעת תמיד **בהנחה ש־**H_0 **נכונה**.

11.3 רמת המובהקות α

11.3.1 הגדרה

ההסתברות לדחות את H_0 כאשר היא נכונה.

11.3.2 פירוש אינטואיטיבי

הסיכון שאנו מוכנים לקחת לטעות מסוג ראשון.

11.3.3 ערכים נפוצים

$$\alpha = 0.05 \quad \text{או} \quad 0.01$$

11.4 סטטיסטי המבחן – מבחן Z

כאשר סטיית התקן באוכלוסייה ידועה והתפלגות הדגימה נורמלית:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

כאשר μ_0 הוא הערך לפי H_0.

11.4.1 מתי מותר להשתמש במבחן Z

השימוש במבחן Z מבוסס על כך שסטטיסטי המבחן מתפלג בקירוב נורמלית. דבר זה מתקיים כאשר לפחות אחד מהתנאים הבאים מתקיים:

- האוכלוסייה מתפלגת נורמלית
- גודל המדגם גדול מספיק $(n \geq 30)$ – לפי משפט הגבול המרכזי

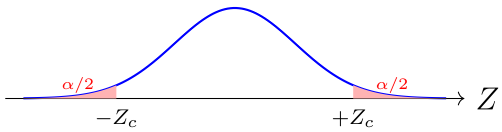
אם תנאים אלה אינם מתקיימים, הנחת הנורמליות אינה מוצדקת, ומבחן Z אינו בהכרח תקף. במקרה שהנחות אלו אינן מתקיימות, יש להשתמש במבחן חלופי (כגון מבחן t).

11.5 אזור דחייה וערך קריטי Z_c

אזור הערכים הקיצוניים של סטטיסטי המבחן, אשר הסתברותם קטנה מ־α בהנחת H_0.

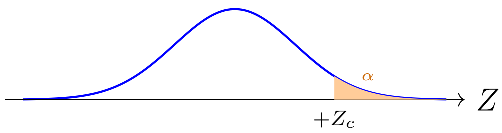
11.5.1 1. בדיקה דו־צדדית (Two-tailed)

נשתמש בה כאשר השערת המחקר היא לשינוי כלשהו $(H_1 : \mu \neq \mu_0)$. אזור הדחייה מתחלק לשני הזנבות, כאשר בכל זנב יש שטח של $\alpha/2$.



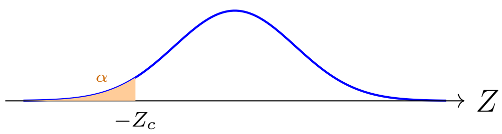
11.5.2 2. בדיקה חד־צדדית ימנית (Right-tailed)

נשתמש בה כאשר נשאלת שאלה על "עלייה" או "שיפור" $(H_1 : \mu > \mu_0)$. כל שטח ה־α נמצא בזנב הימני.



11.5.3 3. בדיקה חד־צדדית שמאלית (Left-tailed)

נשתמש בה כאשר נשאלת שאלה על "ירידה" או "הפחתה" $(H_1 : \mu < \mu_0)$. כל שטח ה־α נמצא בזנב השמאלי.



11.6 p-value

11.6.1 הגדרה

ההסתברות לקבל תוצאה קיצונית לפחות כמו התוצאה שנצפתה במדגם, בהנחה ש־H_0 נכונה.

11.6.2 הקשר בין Z ל-p וחישובו

קיים קשר הפוך בין המרחק של Z מהמרכז לבין ה-p:

- ככל שציון ה-Z המחושב רחוק יותר מהמרכז $\Longleftarrow$ ה-p קטן יותר.
- אם ה-Z המחושב גדול מה-Z_c הקריטי $\Longleftarrow$ ה-p בהכרח קטן מ-α.
- **חישוב ה-p במבחן:**
  - במבחן חד-צדדי: השטח בזנב מעבר ל-Z שחישבנו (לפי טבלת ה-Z).
  - במבחן דו-צדדי: השטח בזנב מעבר ל-Z שחישבנו **כפול 2**.

11.6.3 כלל החלטה

- אם $p \le \alpha$ – דוחים את H_0 (התוצאה מובהקת).
- אם $p > \alpha$ – לא דוחים את H_0 (התוצאה אינה מובהקת).

11.6.4 מה ה־p-value אינו

- ה־p אינו ההסתברות ש־H_0 נכונה
- ה־p אינו מדד לגודל האפקט
- ה־p אינו ההסתברות שטעינו

ה־p מודד אך ורק את מידת הקיצוניות של הנתונים בהנחה ש־H_0 נכונה.

11.7 שלוש דרכי החלטה שקולות

1. השוואת Z לערך קריטי
2. השוואת p ל־α
3. בדיקה האם $\bar{X}$ נמצא באזור הדחייה

כל הדרכים מובילות לאותה מסקנה.

11.8 טעויות נפוצות

- לחשוב ש־p הוא ההסתברות ש־H_0 נכונה
- לומר "מקבלים את H_0" במקום "לא דוחים"
- לבחור חד/דו־צדדי אחרי ראיית הנתונים
- לבלבל בין α ל־p

11.9 פירוש ההחלטה הסטטיסטית

11.9.1 דחיית השערת האפס

דחיית H_0 פירושה שהנתונים אינם סבירים בהנחתה, ולכן קיימת עדות סטטיסטית לטובת H_1.

11.9.2 אי־דחיית השערת האפס

אי־דחיית H_0 אינה מוכיחה שהיא נכונה, אלא רק שהנתונים אינם קיצוניים מספיק כדי לדחותה.

11.9.3 דגש קריטי

אי־דחיית H_0 אינה שקולה לקבלת H_1.

11.10 טעויות מסוג ראשון ושני

- טעות מסוג ראשון: דחיית H_0 כשהיא נכונה
- טעות מסוג שני: אי־דחיית H_0 כשהיא שגויה

11.10.1 דגש

הקטנת α מקטינה טעות מסוג ראשון, אך מגדילה טעות מסוג שני.

11.11 סוגי טעויות – סיכום לוגי

מצב בעולם	החלטה	תוצאה
יש אפקט (H_1)	דוחים את H_0	החלטה נכונה $(1-\beta)$
אין אפקט (H_0)	דוחים את H_0	טעות מסוג ראשון (α)
יש אפקט (H_1)	לא דוחים את H_0	טעות מסוג שני (β)
אין אפקט (H_0)	לא דוחים את H_0	החלטה נכונה $(1-\alpha)$

11.12 דגש מסכם ליחידה

לפני בדיקת השערות:

1. לנסח נכון את H_0 ו־H_1
2. לבדוק חד או דו־צדדי
3. לזהות את α
4. להשתמש בטעות התקן
5. לזכור: לא מוכיחים — מסיקים

11.13 שורת זהב למבחן

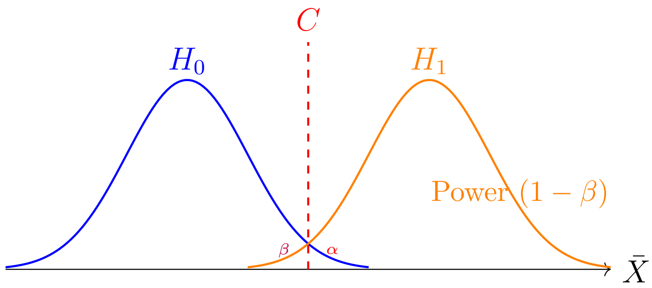
בבדיקת השערות: לא מוכיחים טענות, רק בוחנים האם הנתונים סבירים בהנחת השערת האפס.

11.13.1 ערכי Z קריטיים נפוצים למבחן

רמת מובהקות (α)	מבחן חד-צדדי	מבחן דו-צדדי
$\alpha = 0.05$	1.645	1.96
$\alpha = 0.01$	2.33	2.58

12 יחידה 12: טעויות סטטיסטיות ועוצמת המבחן

יחידה זו עוסקת באיכות ההחלטה הסטטיסטית בבדיקת השערות: אילו טעויות עלולות להתרחש, מה ההסתברות להן, וכיצד תכנון המחקר משפיע על היכולת לגלות אפקטים אמיתיים. הדגש הוא על הבנה לוגית של תהליך ההסקה ולא על תוצאת מדגם יחיד.



איור 6: התפלגות הדגימה תחת השערות חופפות (H_0 לעומת H_1).

12.1 שני מישורים בבדיקת השערות

בכל בדיקת השערות קיימים שני מישורים נפרדים:

- **המצב במציאות:** האם השערת האפס H_0 נכונה או שגויה
- **ההחלטה הסטטיסטית:** האם דוחים או לא דוחים את H_0

מאחר שהמצב האמיתי אינו ידוע לחוקרת, ייתכנו טעויות בהחלטה.

12.2 טעות מסוג ראשון (Type I Error)

12.2.1 הגדרה

טעות מסוג ראשון מתרחשת כאשר דוחים את H_0 למרות שהיא נכונה.

$$P(\text{טעות מסוג I}) = \alpha$$

12.2.2 פירוש אינטואיטיבי

המדגם יצא קיצוני, אך בפועל אין אפקט אמיתי באוכלוסייה.

12.2.3 מאפיינים חשובים

- α נקבעת **מראש**
- α אינה תלויה בתוצאת המדגם
- α היא תכונה של המבחן

12.3 טעות מסוג שני (Type II Error)

12.3.1 הגדרה

טעות מסוג שני מתרחשת כאשר לא דוחים את H_0 למרות ש-H_1 נכונה.

$$P(\text{טעות מסוג II}) = \beta$$

12.3.2 פירוש אינטואיטיבי

יש אפקט אמיתי באוכלוסייה, אך המדגם לא היה קיצוני מספיק כדי לגלות אותו.

12.3.3 מאפיינים חשובים

- β אינה נקבעת מראש
- β תלויה בתכנון המחקר
- β מתייחסת למצב שבו H_1 נכונה

12.4 עוצמת המבחן (Statistical Power)

12.4.1 הגדרה

עוצמת המבחן היא ההסתברות לדחות את H_0 בהינתן ש-H_1 נכונה.

$$\text{עוצמה} = 1 - \beta$$

12.4.2 פירוש אינטואיטיבי

היכולת של המבחן **לגלות אפקט כאשר הוא באמת קיים**.

12.4.3 דגש קריטי

- עוצמה אינה תלויה במדגם הספציפי שיצא
- עוצמה היא תכונה של **המבחן והתכנון**

12.5 הגורמים המשפיעים על עוצמת המבחן

- **גודל האפקט** – המרחק בין H_0 ל-H_1
- **רמת המובהקות** α
- **גודל המדגם** n
- **סטיית התקן באוכלוסייה**

12.6 קשרים חשובים בין α, β ו-n

- הקטנת α:
  - מקטינה טעות מסוג ראשון
  - מגדילה טעות מסוג שני
- הגדלת n:
  - מקטינה טעות מסוג שני
  - מגדילה עוצמה
  - אינה משנה את α
- תמיד קיים **trade-off** בין α ל-β

12.7 תכנון מחקר ועוצמה

עוצמת המבחן ניתנת להשפעה **לפני איסוף הנתונים**.

12.7.1 מה החוקרת יכולה לקבוע

- גודל המדגם
- רמת המובהקות α
- הגדרה תפעולית טובה של האפקט

12.7.2 מה החוקרת אינה שולטת בו

- האם H_1 נכונה במציאות
- השונות האמיתית באוכלוסייה

12.8 סוגי החלטות – סיכום לוגי

Reality $\downarrow$ / **Decision** $\rightarrow$	**Retain** H_0	**Reject** H_0
H_0 **is True**	Correct $(1-\alpha)$ ✓	Type I (α) ✗
H_1 **is True**	Type II (β) ✗	Power $(1-\beta)$ ✓

Table 1: Statistical Decision Matrix

12.9 ייצוג גרפי של הטעויות והעוצמה

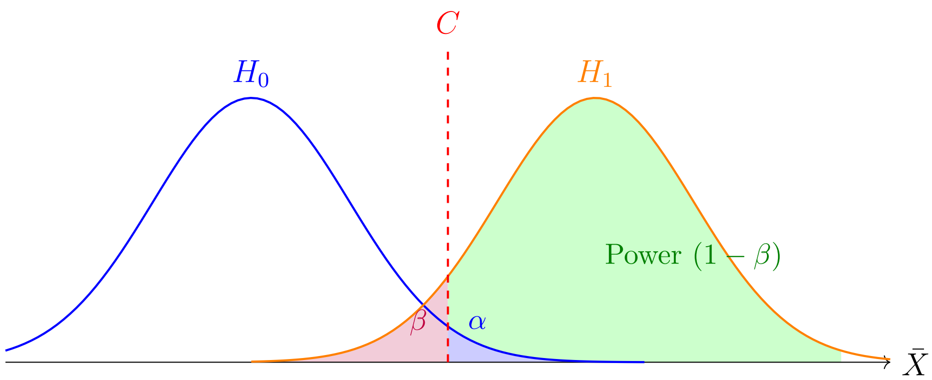
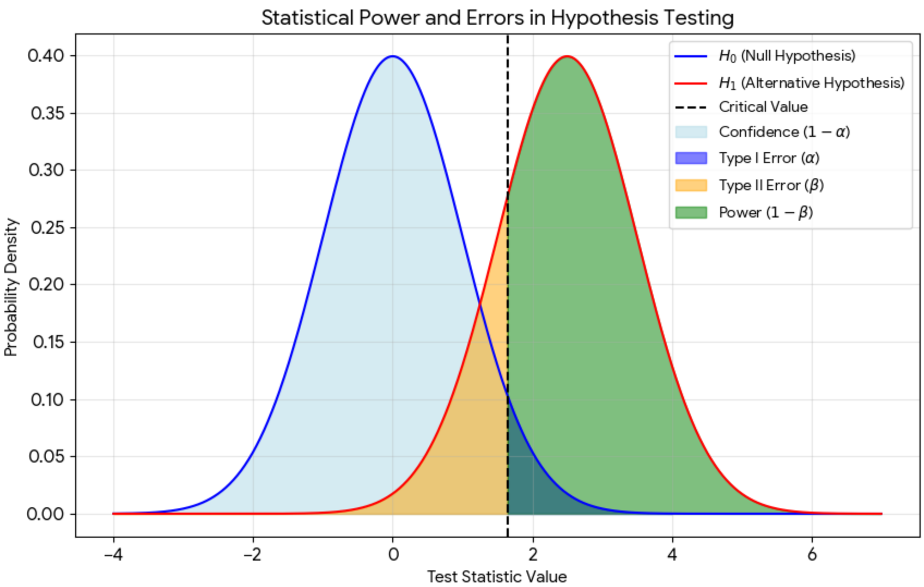


Figure 7: Visual representation of Type I/II errors and Statistical Power



איור 8: Visual representation of Type I/II errors and Statistical Power

12.10 דגש מסכם ליחידה

- α מתארת טעות כאשר אין אפקט
- β מתארת פספוס של אפקט אמיתי
- עוצמה היא היכולת לגלות אפקט
- עוצמה אינה תוצאה – אלא תכנון

12.11 חישובים מעשיים ביחידה 12

כדי לחשב את גודל המדגם (n) הדרוש להשגת עוצמה מסוימת, נשתמש בנוסחה:

$$n = \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \cdot \sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2$$

דגש: בבדיקה דו-צדדית, נשתמש ב-$Z_{1-\alpha/2}$ במקום ב-$Z_{1-\alpha}$.

שורת זהב ליחידה

בדיקת השערות עוסקת בהחלטה, אך יחידה 12 עוסקת באיכות ההחלטה.

13 יחידה 13: מעבר לבדיקת השערות – גודל אפקט ורווח סמך

יחידה זו מסכמת את הקורס ומציגה הסתכלות ביקורתית על בדיקת השערות סטטיסטיות (NHST), וכן כלים משלימים שמטרתם לספק תמונה מלאה ומשמעותית יותר של תוצאות מחקר: **גודל אפקט** ו-**רווח סמך**. הדגש עובר מהחלטה בינארית להבנת גודל האפקט ומידת אי־הוודאות.

13.1 מגבלות בדיקת השערות סטטיסטיות (NHST)

בדיקת השערות עונה על השאלה:

האם הנתונים סבירים בהנחה שהשערת האפס H_0 נכונה?

אך לשיטה זו מגבלות מהותיות.

13.1.1 תלות בגודל המדגם

- כאשר n גדול, טעות התקן קטנה.
- לכן גם אפקטים קטנים מאוד עשויים להיות מובהקים סטטיסטית.
- במדגמים קטנים, אפקטים גדולים עלולים לא לצאת מובהקים.

13.1.2 מובהקות אינה חשיבות

מובהקות סטטיסטית אינה מעידה בהכרח על חשיבות מעשית או קלינית של האפקט.

13.1.3 שרירותיות רמת המובהקות

- הבחירה ב-$\alpha = 0.05$ היא מוסכמה ולא חוק טבע.
- ערכים קרובים לסף (למשל $p = 0.049$ לעומת $p = 0.051$) עשויים להוביל למסקנות שונות לחלוטין.

13.1.4 מסקנה בינארית

בדיקת השערות מובילה להכרעה דיכוטומית:

- דוחים את H_0
- או לא דוחים את H_0

ואינה מספקת מידע על גודל האפקט או אי־הוודאות באמידה.

13.2 p-value ופרשנותו

p-value מודד עד כמה הנתונים אינם סבירים בהנחה ש-H_0 נכונה.

- p-value אינו מודד את גודל האפקט.
- p-value אינו הסתברות ש-H_0 נכונה.
- ערך p קטן יותר מעיד על ראיות חזקות יותר נגד H_0, אך לא בהכרח על אפקט גדול יותר.

13.3 גודל אפקט (Effect Size)

13.3.1 רעיון מרכזי

גודל אפקט מודד **כמה גדול ההבדל או הקשר**, ולא רק האם הוא מובהק סטטיסטית.

13.3.2 מאפיינים מרכזיים

- מאפשר פרשנות מעשית של התוצאה
- מאפשר השוואה בין מחקרים שונים
- אינו תלוי בגודל המדגם בלבד

13.3.3 מדד כהן d (Cohen's d)

מטרה מדד כהן d מודד את **גודל ההבדל במונחי סטיות תקן**, כלומר גודל אפקט **מתוקנן** (Standardized), כדי שאפשר יהיה לפרש ולהשוות בין מחקרים גם כשסקאלות שונות.

הגדרה (מקרה בסיסי: שתי קבוצות) כאשר משווים שני ממוצעים:

$$d = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\text{pooled}}}$$

כאשר s_{pooled} היא סטיית תקן משוקללת (pooled):

$$s_{\text{pooled}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

מקרה של מבחן חד-מדגמי מול ערך ייחוס כאשר משווים ממוצע מדגם לערך תיאורטי μ_0:

$$d = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s}$$

פרשנות אינטואיטיבית

- d אומר: **כמה סטיות תקן** מפרידים בין הממוצעים.
- בניגוד ל-p-value, d מתאר **חשיבות/עוצמה מעשית** (magnitude) ולא רק מובהקות.

כללי אצבע נפוצים (Cohen)

- $d \approx 0.2$ אפקט קטן
- $d \approx 0.5$ אפקט בינוני
- $d \approx 0.8$ אפקט גדול

דגש למבחן ייתכן מצב של:

- d קטן אך p קטן מאוד (מדגם גדול)
- d גדול אך p לא מובהק (מדגם קטן)

לכן בדיווח מלא רצוי לציין גם **מובהקות**, גם **גודל אפקט**, וגם **רווח סמך**.

Cohen's d

זהו המדד הסטנדרטי למדידת גודל האפקט ביחידות של סטיות תקן.

- **אפקט קטן:** $d \approx 0.2$
- **אפקט בינוני:** $d \approx 0.5$
- **אפקט גדול:** $d \approx 0.8$

13.3.4 דגש למבחן

ייתכנו המצבים:

- אפקט קטן אך מובהק (במדגם גדול)
- אפקט גדול אך לא מובהק (במדגם קטן)

13.4 רווח סמך (Confidence Interval)

13.4.1 הגדרה

רווח סמך הוא תחום ערכים, המחושב על סמך מדגם, אשר בשיטת בנייה נתונה מכיל את פרמטר האוכלוסייה בהסתברות נתונה בטווח הארוך.

13.4.2 רמת סמך

רווח סמך של 95% פירושו:

- אם נבנה רווחים רבים באותה שיטה
- כ-95% מהם יכילו את הפרמטר האמיתי

אסור לפרש זאת כהסתברות שהפרמטר נמצא בתוך הרווח.

13.5 מבנה כללי של רווח סמך

$$\text{אומדן} \pm \text{שגיאה}$$

כאשר השגיאה תלויה ב:

- רמת הסמך
- טעות התקן
- גודל המדגם

13.6 רווח סמך לתוחלת (כאשר σ ידועה) (Confidence Interval for Mean (Known σ))

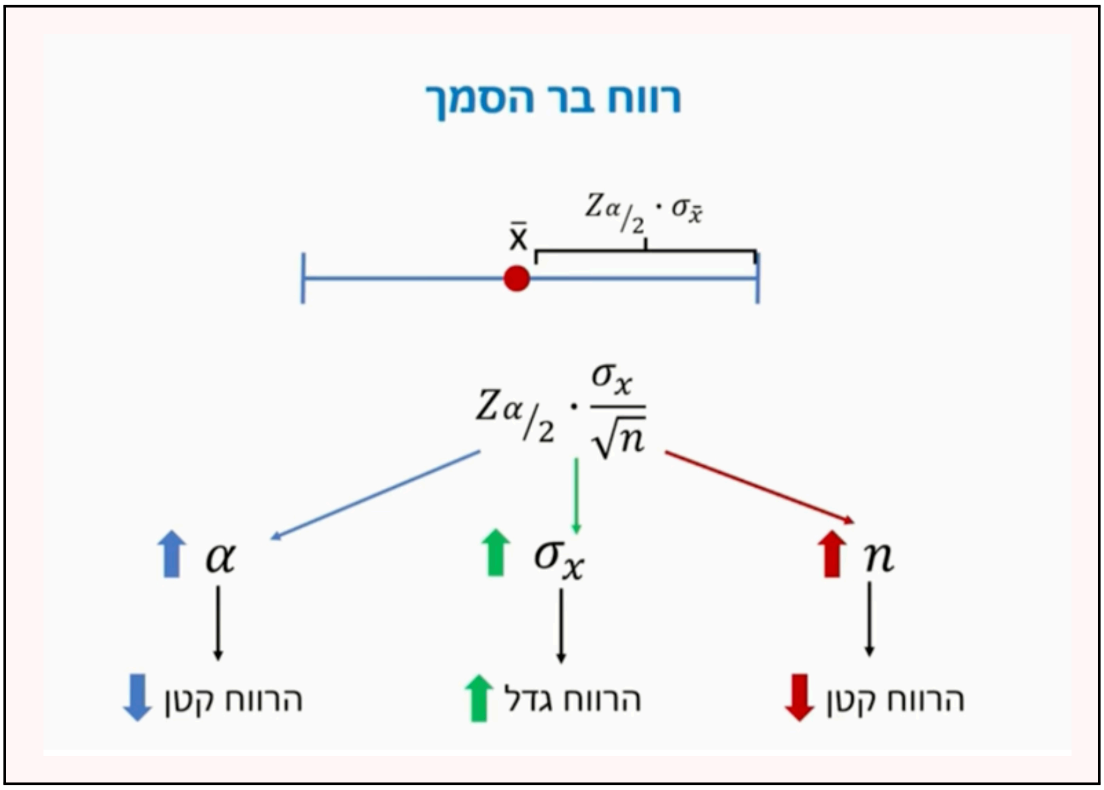
$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- מרכז הרווח הוא ממוצע המדגם
- רוחב הרווח משקף את אי־הוודאות באמידה

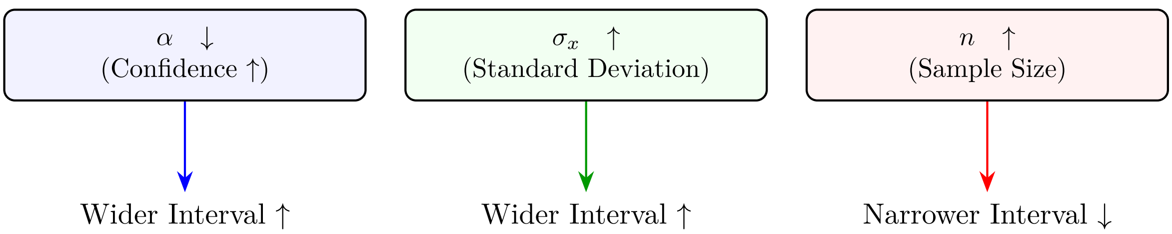
13.7 גורמים המשפיעים על רוחב רווח הסמך (Factors Affecting CI Width)

הרווח מוגדר כמרחק מהממוצע: $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

- n גדול יותר $\rightarrow$ רווח צר יותר
- σ גדולה יותר $\rightarrow$ רווח רחב יותר
- רמת סמך גבוהה יותר $\rightarrow$ רווח רחב יותר



איור 9: השפעת המשתנים על רווח בר הסמך



13.8 הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות

קיים קשר ישיר בין:

- רווח סמך דו־צדדי ברמת סמך $1-\alpha$
- בדיקת השערות דו־צדדית ברמת מובהקות α

איור 10: Probability of Rejecting the Null Hypothesis: Type I Error and Power

איור 11: Probability of Non-Rejection of the Null Hypothesis: Type II Error and Confidence Level

13.8.1 כלל חשוב

- אם ערך לפי H_0 נמצא בתוך רווח הסמך $\rightarrow$ לא דוחים את H_0
- אם ערך לפי H_0 מחוץ לרווח הסמך $\rightarrow$ דוחים את H_0

ההבדל הוא בייצוג: בדיקת השערות מספקת החלטה בינארית, ורווח סמך מספק טווח אי־ודאות רציף.

13.9 שילוב הכלים

בדיווח סטטיסטי מלא מומלץ לשלב:

- בדיקת השערות (מובהקות)
- גודל אפקט
- רווח סמך

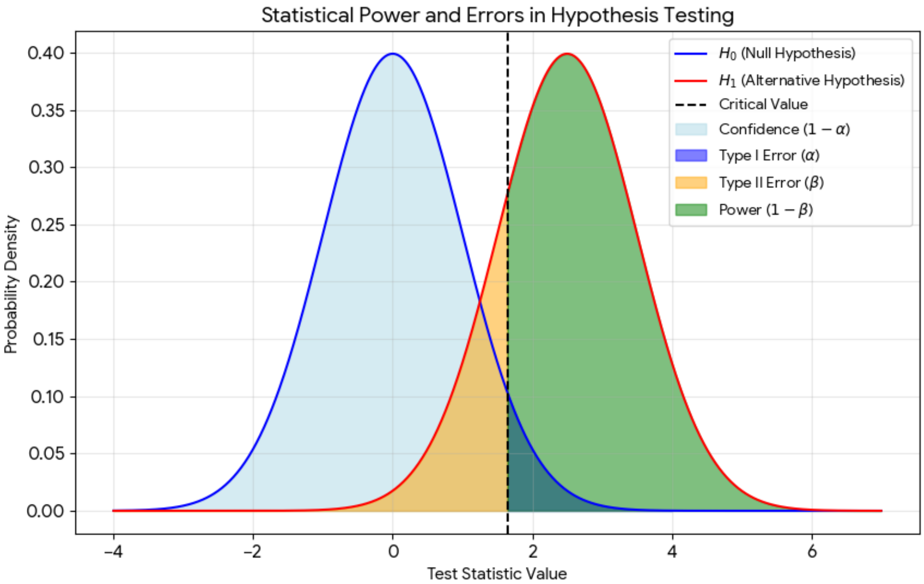
שילוב זה מאפשר:

- קבלת החלטה
- הבנת המשמעות המעשית
- הערכת אי־הוודאות

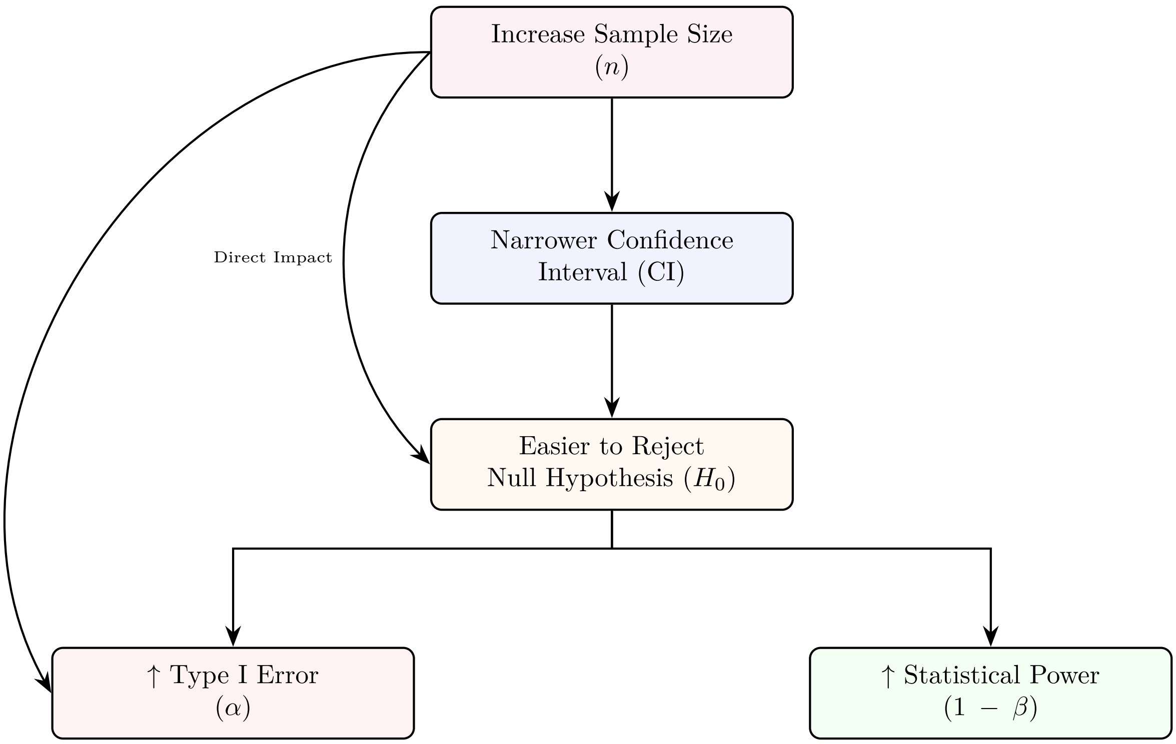
13.10 הקשר בין רווח סמך לעוצמת המבחן (Confidence Intervals and Power)

כפי שניתן לראות בתרשים, קיימת שרשרת של השפעות:

- **צמצום רווח הסמך (CI):** נגרם לרוב על ידי הגדלת המדגם (n) או הקטנת רמת הביטחון.
- **הגדלת α:** גורמת לדחייה קלה יותר של H_0 (יותר שטח בגרף תחת אזור הדחייה).
- **שיפור עוצמת המבחן:** ככל שקל יותר לדחות את H_0, כך גדל הסיכוי שנזהה אפקט אמיתי $(1-\beta)$.



איור 12: המחשה גרפית של שטחי הטעות והעוצמה



איור 13: Detailed Flowchart: Sample Size Impact on Power and Error

13.11 דגש מסכם ליחידה

בדיקת השערות מספקת קריטריון החלטה, אך אינה מספיקה לבדה.

הסקה סטטיסטית מלאה דורשת:

- פרשנות מעבר ל-p-value
- הערכת גודל האפקט
- שימוש ברווחי סמך

14 סיכום הקורס: סטטיסטיקה לפסיכולוגים א'

קורס זה עסק במעבר מתיאור נתונים למדידה פורמלית של אי־ודאות, ובהסקה על אוכלוסייה מתוך מדגם. המהלך המרכזי של הקורס הוא בניית מסגרת מתמטית להערכת סבירות, קבלת החלטות, והבנת מגבלות הידע המדגמי.

הקורס מתחלק רעיונית לארבעה צירים מרכזיים: תיאור נתונים, הסתברות והתפלגויות, התפלגות הדגימה והיסק סטטיסטי, וביקורת על בדיקת השערות תוך שימוש בכלים משלימים.

14.1 ציר ראשון: תיאור נתונים

בשלב הראשון נלמדו כלים לתיאור מדגם:

- מדדי נטייה מרכזית: ממוצע, חציון, שכיח
- מדדי פיזור: שונות וסטיית תקן
- ייצוגים גרפיים: היסטוגרמה, תרשימי פיזור

השונות הוגדרה כמדד לפיזור סביב הממוצע:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

וריבוע הסטיות נועד למנוע ביטול סימנים ולהדגיש חריגות גדולות.

14.2 ציר שני: הסתברות והתפלגויות

נלמדה ההתפלגות הנורמלית ככלי יסוד:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

שינוי תוחלת μ מזיז את ההתפלגות, ושינוי סטיית התקן σ מותח או מכווץ אותה, אך הצורה הנורמלית נשמרת.

ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית הוגדרה כ:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

תקנון שומר על שטחי הסתברות, ולכן מאפשר חישוב הסתברויות אחיד באמצעות טבלת Z.

14.3 ציר שלישי: התפלגות הדגימה

נקודת המפנה בקורס היא המעבר מתצפיות בודדות לסטטיסטי מדגם.

ממוצע המדגם הוגדר כמשתנה מקרי:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

כאשר $X_1, \dots, X_n$ הם תצפיות מקריות בלתי־תלויות מאותה אוכלוסייה, מתקיים:

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

סטיית התקן של התפלגות הדגימה נקראת **טעות התקן**:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ככל ש-n גדל, התפלגות הדגימה נעשית צרה יותר, וממוצעי מדגם נעשים יציבים יותר.

14.3.1 משפט הגבול המרכזי

כאשר n גדול דיו, התפלגות הדגימה של הממוצעים היא נורמלית בקירוב, ללא קשר לצורת ההתפלגות באוכלוסייה.

זהו משפט עמוק ולא טריוויאלי, שהוכחתו שייכת לקורסים מתמטיים מתקדמים, ונשענת על תכונות של סכומי משתנים מקריים.

14.4 ציר רביעי: בדיקת השערות

בדיקת השערות נועדה לענות על השאלה:

עד כמה הנתונים קיצוניים בהנחה שהשערת האפס נכונה?

סטטיסטי המבחן לממוצע (כאשר σ ידועה):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ה-p-value- מוגדר כהסתברות לקבל תוצאה קיצונית לפחות כמו הנצפית, **בהינתן שהשערת האפס נכונה:**

$$p = P(|Z| \geq |z_{\text{obs}}| \mid H_0)$$

בדיקת השערות כוללת שתי טעויות אפשריות:

- טעות מסוג I: דחיית H_0 כאשר היא נכונה (α)
- טעות מסוג II: אי־דחיית H_0 כאשר H_1 נכונה (β)

14.4.1 עוצמת המבחן

עוצמת המבחן מוגדרת כ:

$$\text{Power} = 1 - \beta$$

והיא ההסתברות לגלות אפקט אמיתי. עוצמה מוגדרת **רק תחת ההנחה ש-H_1 נכונה**, והיא תכונה של תכנון המחקר — לא של המדגם הספציפי.

14.5 ביקורת על NHST

בדיקת השערות מספקת החלטה בינארית, אך סובלת ממגבלות:

- תלות חזקה בגודל המדגם
- חוסר מידע על גודל האפקט
- שרירותיות סף המובהקות

מובהקות סטטיסטית אינה שקולה לחשיבות מעשית.

14.6 כלים משלימים: גודל אפקט ורווח סמך

גודל אפקט מודד **כמה גדול** ההבדל. דוגמה נפוצה:

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

רווח סמך מספק טווח ערכים סבירים לפרמטר:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

רווח סמך דו־צדדי ברמת סמך $1 - \alpha$ שקול לבדיקת השערות דו־צדדית ברמת מובהקות α, אך מספק מידע עשיר יותר על אי־הוודאות וגודל האפקט.

14.7 שורת סיום

סטטיסטיקה אינה עוסקת בוודאות, אלא בניהול אי־ודאות.
בדיקה סטטיסטית טובה משלבת:

- הבנת ההתפלגות והדגימה
- החלטה פורמלית
- הערכת גודל אפקט
- הצגת אי־ודאות

זהו ההבדל בין תוצאה מובהקת לבין הבנה סטטיסטית אמיתית.

א' ההתפלגות הנורמלית ושימוש בטבלת ה-Z

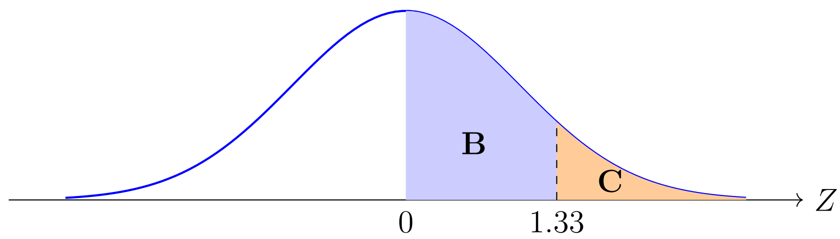
א'.1 הגדרת שטחי הטבלה (Z, B, C)

הטבלה מחולקת לשלוש עמודות מרכזיות המאפשרות לנו למצוא הסתברויות ללא צורך בחישובים מורכבים של סימטריה:

עמודה Z: ציון התקן החיובי $z \geq 0$.

עמודה B: השטח שבין הממוצע 0 לבין ציון התקן Z.

עמודה C: השטח שנמצא מעבר לציון התקן Z (הזנב הקיצוני).



איור 14: השטחים B ו-C לפי טבלת ההתפלגות הנורמלית.

א'.2 טבלת Z (מקטע מפורט)

להלן המבנה המדויק של הטבלה כפי שמופיע בדף העזר למבחן:

Z	B	C	Z	B	C	Z	B	C	Z	B	C
0.00	.0000	.5000	0.30	.1179	.3821	0.60	.2257	.2743	0.90	.3159	.1841
0.01	.0040	.4960	0.31	.1217	.3783	0.61	.2291	.2709	0.91	.3186	.1814
0.02	.0080	.4920	0.32	.1255	.3745	0.62	.2324	.2676	0.92	.3212	.1788
0.03	.0120	.4880	0.33	.1293	.3707	0.63	.2357	.2643	0.93	.3238	.1762
0.04	.0160	.4840	0.34	.1331	.3669	0.64	.2389	.2611	0.94	.3264	.1736
0.05	.0199	.4801	0.35	.1368	.3632	0.65	.2422	.2578	0.95	.3289	.1711
0.06	.0239	.4761	0.36	.1406	.3594	0.66	.2454	.2546	0.96	.3315	.1685
0.07	.0279	.4721	0.37	.1443	.3557	0.67	.2486	.2514	0.97	.3340	.1660
0.08	.0319	.4681	0.38	.1480	.3520	0.68	.2517	.2483	0.98	.3365	.1635
0.09	.0359	.4641	0.39	.1517	.3483	0.69	.2549	.2451	0.99	.3389	.1611
0.10	.0398	.4602	0.40	.1554	.3446	0.70	.2580	.2420	1.00	.3413	.1587
0.11	.0438	.4562	0.41	.1591	.3409	0.71	.2611	.2389	1.10	.3643	.1357
0.12	.0478	.4522	0.42	.1628	.3372	0.72	.2642	.2358	1.20	.3849	.1151
0.20	.0793	.4207	0.50	.1915	.3085	0.80	.2881	.2119	1.30	.4032	.0968

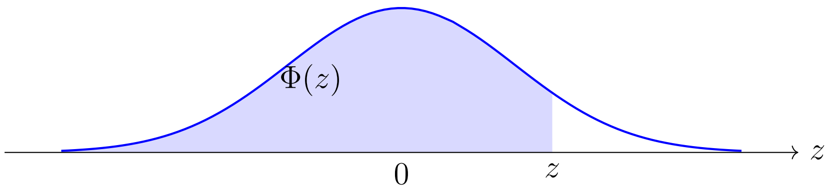
א'.3 כללי עבודה חשובים

- **מציאת Z לפי הסתברות:** אם נתונה רמת סמך של 95%, נחפש בעמודה B את הערך 0.4750 (חצי מהשטח המרכזי) ונקבל $Z = 1.96$.
- **ערכים שליליים:** בגלל הסימטריה, השטח שבין $Z = -1$ ל-0 שווה בדיוק לשטח B עבור $Z = 1$.
- **הסתברות מצטברת (Φ):** כדי למצוא את כל השטח משמאל ל-Z חיובי, נבצע חישוב של $0.5 + B$.

ב׳ נספח: טבלת Z סטנדרטית $(\Phi(z))$

הטבלה מציגה את השטח שמתחת לעקומת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית משמאל ל-z.

ב׳.1 תרשים השטח המצטבר



ב׳.2 טבלת ערכי $\Phi(z)$

.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03	.02	.01	.00	z
0.5359	0.5319	0.5279	0.5239	0.5199	0.5160	0.5120	0.5080	0.5040	0.5000	0.0
0.5753	0.5714	0.5675	0.5636	0.5596	0.5557	0.5517	0.5478	0.5438	0.5398	0.1
0.6141	0.6103	0.6064	0.6026	0.5987	0.5948	0.5910	0.5871	0.5832	0.5793	0.2
0.6517	0.6480	0.6443	0.6406	0.6368	0.6331	0.6293	0.6255	0.6217	0.6179	0.3
0.6879	0.6844	0.6808	0.6772	0.6736	0.6700	0.6664	0.6628	0.6591	0.6554	0.4
0.7224	0.7190	0.7157	0.7123	0.7088	0.7054	0.7019	0.6985	0.6950	0.6915	0.5
0.7549	0.7517	0.7486	0.7454	0.7422	0.7389	0.7357	0.7324	0.7291	0.7257	0.6
0.7852	0.7823	0.7794	0.7764	0.7734	0.7704	0.7673	0.7642	0.7611	0.7580	0.7
0.8133	0.8106	0.8078	0.8051	0.8023	0.7995	0.7967	0.7939	0.7910	0.7881	0.8
0.8389	0.8365	0.8340	0.8315	0.8289	0.8264	0.8238	0.8212	0.8186	0.8159	0.9
0.8621	0.8599	0.8577	0.8554	0.8531	0.8508	0.8485	0.8461	0.8438	0.8413	1.0
0.8830	0.8810	0.8790	0.8770	0.8749	0.8729	0.8708	0.8686	0.8665	0.8643	1.1
0.9015	0.8997	0.8980	0.8962	0.8944	0.8925	0.8907	0.8888	0.8869	0.8849	1.2
0.9177	0.9162	0.9147	0.9131	0.9115	0.9099	0.9082	0.9066	0.9049	0.9032	1.3
0.9319	0.9306	0.9292	0.9279	0.9265	0.9251	0.9236	0.9222	0.9207	0.9192	1.4
0.9441	0.9429	0.9418	0.9406	0.9394	0.9382	0.9370	0.9357	0.9345	0.9332	1.5
0.9545	0.9535	0.9525	0.9515	0.9505	0.9495	0.9484	0.9474	0.9463	0.9452	1.6
0.9633	0.9625	0.9616	0.9608	0.9599	0.9591	0.9582	0.9573	0.9564	0.9554	1.7
0.9706	0.9699	0.9693	0.9686	0.9678	0.9671	0.9664	0.9656	0.9649	0.9641	1.8
0.9767	0.9761	0.9756	0.9750	0.9744	0.9738	0.9732	0.9726	0.9719	0.9713	1.9
0.9817	0.9812	0.9808	0.9803	0.9798	0.9793	0.9788	0.9783	0.9778	0.9772	2.0
0.9857	0.9854	0.9850	0.9846	0.9842	0.9838	0.9834	0.9830	0.9826	0.9821	2.1
0.9890	0.9887	0.9884	0.9881	0.9878	0.9875	0.9871	0.9868	0.9864	0.9861	2.2
0.9916	0.9913	0.9911	0.9909	0.9906	0.9904	0.9901	0.9898	0.9896	0.9893	2.3
0.9936	0.9934	0.9932	0.9931	0.9929	0.9927	0.9925	0.9922	0.9920	0.9918	2.4
0.9952	0.9951	0.9949	0.9948	0.9946	0.9945	0.9943	0.9941	0.9940	0.9938	2.5
0.9964	0.9963	0.9962	0.9961	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9955	0.9953	2.6
0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9970	0.9969	0.9968	0.9967	0.9966	0.9965	2.7
0.9981	0.9980	0.9979	0.9979	0.9978	0.9977	0.9977	0.9976	0.9975	0.9974	2.8
0.9986	0.9986	0.9985	0.9985	0.9984	0.9984	0.9983	0.9982	0.9982	0.9981	2.9
0.9990	0.9990	0.9989	0.9989	0.9989	0.9988	0.9988	0.9987	0.9987	0.9987	3.0
0.9993	0.9993	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9991	0.9991	0.9991	0.9990	3.1
0.9995	0.9995	0.9995	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9993	0.9993	3.2
0.9997	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9995	3.3
0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	3.4
0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	3.5
0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	3.6
0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.7
0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.8
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	3.9