Quantum Approximation Optimization Algorithm

Oriol Julián

23 de julio de 2023

1. Introducción

Notación: $p \equiv layers$

La profundidad crece linealmente con p veces el nº de restricciones. (Es aumento lineal, obvio).

n = nº de bits m = nº de cláusulas

1.1. Describir un problema de optimización combinatoria

Función objetivo:

$$C(z) = \sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha(z)$$

$$\text{dde } z = z_1 z_2 ... z_n \text{ y } z_i \in \{0, 1\}$$

$$C_\alpha(z) = \begin{cases} 1 \text{ si z satisface } C_\alpha \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

1.2. Operadores unitarios y vector inicial

Se trabaja en un espacio de Hilbert de 2^n dimensiones. Base computacional: $|z\rangle$

Se define un operador:

$$U(C, \gamma) = e^{-i\gamma C} = \prod_{\alpha=1}^{m} e^{-i\gamma C_\alpha}$$

Page 2: "All of the terms in this product commute beacuse they are diagonal in the computational basis and each term's locality is the locality of the clause α."

Como C tiene autovalores enteros, se puede restringir $\gamma \in [0, 2\pi]$
Se define otro operador unitario $U(B, \beta)$ dde:

$$B = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^x$$

$$U(B, \beta) = e^{-i\beta B} = \prod_{j=1}^{n} e^{-i\beta\sigma_j^x}$$

Donde $\beta \in [0, \pi]$

El estado inicial se define como:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z |z\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))^{\otimes n} = H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$$

1.3. Definir estado

Para cualquier $p \geq 1$ y $\gamma \equiv \gamma_1 ... \gamma_p$ y $\beta \equiv \beta_1 ... \beta_p$

$$|\gamma, \beta\rangle = U(B, \beta_p) U(C, \gamma_p) ... U(B, \beta_1) U(C, \gamma_1) |s\rangle$$

Este estado se puede producir con un circuito de profundidad $mp + p$ como mucho.

Sea F_p el valor esperado de C

$$F_p(\gamma, \beta) = \langle \gamma, \beta | C | \gamma, \beta \rangle$$

Sea M_p el máximo de F_p sobre los ángulos

$$M_p = \max_{\gamma, \beta} F_p(\gamma, \beta)$$

Nótese que la maximización en $p - 1$ se puede ver como una restricción para p, por lo que

$$M_p \geq M_{p-1}$$

Luego se verá que

$$\lim_{p \to \infty} M_p = \max_z C(z)$$