Notas

Oriol Julián

23 de julio de 2023

Índice

1. D-Wave **2**
1.1. Quantum Annealing 2

2. QAOA **3**
2.1. Construcción de $|\psi(\vec{\beta}, \vec{\gamma})\rangle$ 3

3. Apéndice **4**
3.1. Estado fundamental 4

1. D-Wave

Estos sistemas utilizan Quantum Annealing, para encontrar el **estado fundamental 3.1** (**ground state**) del sistema cuántico, que viene dado por su hamiltoniano. Este es el motivo de que no se trate como modelo de computación de propósito general, ya que D-Wave es una herramienta diseñada para resolver específicamente problemas de optimización.

1.1. Quantum Annealing

Según se discute en [2], el paradigma de Quantum Annealing está orientado a buscar el **estado fundamental** de un modelo Ising genérico, el cual es definido por su hamiltoniano.
Esto puede aplicarse, convenientemente, para encontrar el mínimo de una función.

2. QAOA

Definido originalmente en [1]. Se trata de un algoritmo cuántico que aproxima soluciones óptimas a problemas de optimización combinatoria binaria.
La idea general de QAOA se basa en preparar un estado $|\psi(\vec{\beta},\vec{\gamma})\rangle$ tal que, con los valores adecuados $(\vec{\beta_{opt}},\vec{\gamma_{opt}})$, el estado $|\psi(\vec{\beta_{opt}},\vec{\gamma_{opt}})\rangle$ encuentre la solución al problema.
Para esto se definen dos operadores unitarios, que describen el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned} U(B,\beta_i) &= e^{-i\beta_i B} \\ U(C,\gamma_j) &= e^{-i\gamma_j C} \end{aligned} \tag{1}$$

Donde, siguiendo la notación del paper original, B y C son dos operadores lineales nombrados **mixer hamiltonian** y **problem hamiltonian**, respectivamente.
La operación $U(X) = e^{-iX}$ sirve para garantizar la unitariedad del operador ya que, como se verá en su definición, B y C no son necesariamente unitarios [1].
Tanto la noción de hamiltoniano como la construcción de un operador unitario proceden de la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica.

2.1. Construcción de $|\psi(\vec{\beta},\vec{\gamma})\rangle$

Para preparar este estado se utilizan los parámetros

$$\begin{aligned} \vec{\beta} &= [\beta_0,\beta_1,...,\beta_{p-1}] \\ \vec{\gamma} &= [\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{p-1}] \end{aligned}$$

Donde $\beta_i,\gamma_i \in \mathbb{R}$ y p es el número de capas del algoritmo.
A partir de estos parámetros y los operadores definidos en la ecuación 1 se construye el estado.

$$|\psi(\vec{\beta},\vec{\gamma})\rangle = U(B,\gamma_{p-1})U(C,\beta_{p-1})U(B,\gamma_{p-2})U(C,\beta_{p-2})...U(B,\gamma_0)U(C,\beta_0)\,|\psi_0\rangle$$

Donde $|\psi_0\rangle$ es el estado inicial del sistema.

[1]En computación cuántica los operadores lineales deben ser unitarios. Tiene relación con la idea $\sum_{i\in\{0,1\}^n} P(|i\rangle) = 1$, donde n es el número de qubits del sistema, $|i\rangle$ itera sobre los posibles resultados de medir en la base computacional del sistema y $P(|i\rangle)$ se refiere a la probabilidad de medir i sobre dicha base.

3. Apéndice

3.1. Estado fundamental

La energía de un sistema cuántico en el estado $|\psi\rangle$ viene dada por

$$E(|\psi\rangle) = \langle\psi|H|\psi\rangle$$

Dada esta definición el estado fundamental se refiere al estado $|\psi^*\rangle$ de menor energía del sistema.

$$|\psi^*\rangle = min_{|\psi\rangle\in Q} E(|\psi\rangle)$$

Referencias

[1] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann. A quantum approximate optimization algorithm, 2014.

[2] A. Rajak, S. Suzuki, A. Dutta, and B. K. Chakrabarti. Quantum annealing: an overview. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 381(2241), dec 2022.