

Quantum Approximation Optimization Algorithm

Oriol Julián

17 de octubre de 2023

1. Introducción

Notación: $p \equiv \text{layers}$

La profundidad crece linealmente con p veces el n^0 de restricciones. (Es aumento lineal, obvio).

$n = n^0$ de bits $m = n^0$ de cláusulas

1.1. Describir un problema de optimización combinatoria

Función objetivo:

$$C(z) = \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha}(z)$$

dde $z = z_1 z_2 \dots z_n$ y $z_i \in \{0, 1\}$

$$C_{\alpha}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \text{ satisface } C_{\alpha} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función es vista como un operador que es diagonal en la base computacional $|z\rangle$ con los valores de la función objetivo. De esta forma, para una cadena $z = z_1 z_2 \dots z_n$, $\langle z | C | z \rangle = C(z)$

1.2. Operadores unitarios y vector inicial

Se trabaja en un espacio de Hilbert de 2^n dimensiones. Base computacional: $|z\rangle$

Se define un operador unitario:

$$U(C, \gamma) = e^{-i\gamma C} = \prod_{\alpha=1}^m e^{-i\gamma C_{\alpha}}$$

Page 2: "All of the terms in this product commute because they are diagonal in the computational basis and each term's locality is the locality of the clause α ."

Page 2: “Como C tiene autovalores enteros, se puede restringir $\gamma \in [0, 2\pi]$ ”
 Se define otro operador unitario $U(B, \beta)$ dde:

$$B = \sum_{j=1}^n \sigma_j^x$$

$$U(B, \beta) = e^{-i\beta B} = \prod_{j=1}^n e^{-i\beta \sigma_j^x}$$

Donde $\beta \in [0, \pi]$

El estado inicial se define como:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z |z\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} = H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$$

1.3. Definir estado

Para cualquier $p \geq 1$ y $\gamma \equiv \gamma_1 \dots \gamma_p$ y $\beta \equiv \beta_1 \dots \beta_p$

$$|\gamma, \beta\rangle = U(B, \beta_p)U(C, \gamma_p) \dots U(B, \beta_1)U(C, \gamma_1) |s\rangle$$

Este estado se puede producir con un circuito de profundidad $mp + p$ como mucho.

Sea F_p el valor esperado de C

$$F_p(\gamma, \beta) = \langle \gamma, \beta | C | \gamma, \beta \rangle$$

Sea M_p el máximo de F_p sobre los ángulos

$$M_p = \max_{\gamma, \beta} F_p(\gamma, \beta)$$

Nótese que la maximización en $p - 1$ se puede ver como una restricción para p , por lo que

$$M_p \geq M_{p-1}$$

Page 3: “Furthermore we will later show that (10)”

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p = \max_z C(z)$$

Page 3: “There results suggest a way to design an algorithm...”

- Elegir un número de capas y comenzar con un conjunto de ángulos (γ, β) que hagan F_p lo más grande posible.
- Construir el estado $|\gamma, \beta\rangle$ en un ordenador cuántico.
- Medir en la base computacional $|z\rangle$ para obtener una cadena de bits z y evaluar $C(z)$ (sería equivalente a $\langle z | C | z \rangle$).