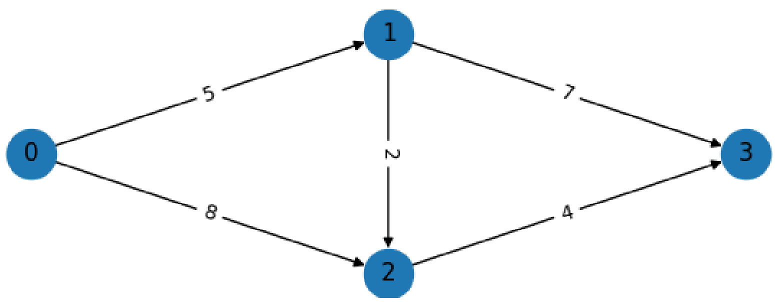
Desarrollo

19 de febrero de 2024

1. Primer grafo



Con este grafo se pretenden analizar los resultados obtenidos en la sección 2.2 (*Single-Objective Quantum Routing Optimization*) del artículo [2].

El problema a resolver es encontrar el camino más corto que conecte los nodos *0* y *3*.

- **Objetivo:**

$$min(5X_{01} + 8X_{02} + 2X_{12} + 7X_{13} + 4X_{23})$$
$$\text{dde } X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el camino contiene a la arista del nodo } i \text{ al } j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- **Restricciones:** También se deben añadir una serie de restricciones para evitar caminos triviales o incongruentes.

$$X_{01} + X_{02} = 1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} X_{01} &= X_{12} + X_{13} \\ X_{02} + X_{12} &= X_{23} \end{aligned} \tag{2}$$

Estas restricciones se pueden justificar como:

1. Debe haber exactamente un eje del camino que involucre al nodo de comienzo. Obliga al camino a comenzar por dicho nodo.
2. Para cada nodo intermedio debe haber en el resultado tantas aristas entrantes como salientes. Evita caminos incongruentes y hace que el único nodo posible para finalizar sea el nodo final.

Siguiendo el caso del artículo se elige como valor del *modificador de Lagrange* $P = 27$, ya que debe ser estrictamente mayor que el máximo de la función objetivo: $\max_x f_{\text{sin restricc}}(x) = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} = 26$

De acuerdo con los pasos descritos en la sección **??**, la función de coste clásica en su versión QUBO es:

$$
\begin{aligned}
f(X) =& 5X_{01} + 8X_{02} + 2X_{12} + 7X_{13} + 4X_{23} + \\
& P(X_{01} + X_{02} - 1)^2 + P(X_{01} - X_{12} - X_{13})^2 + P(X_{02} + X_{12} - X_{23})^2
\end{aligned}
$$

El número de qubits del sistema cuántico es igual a la cantidad de variables de la función clásica, esto es, la cantidad de ejees del grafo.
La correspondencia entre las variables de la función clásica y el circuito es la siguiente:

X_{01}	X_{02}	X_{12}	X_{13}	X_{23}
z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

De acuerdo con la sección **??** la versión Ising de la función de coste queda como:

$$
\begin{aligned}
g(z) =& 5\frac{1-z_0}{2} + 8\frac{1-z_1}{2} + 2\frac{1-z_2}{2} + 7\frac{1-z_3}{2} + 4\frac{1-z_4}{2} + \\
& P(\frac{1-z_0}{2} + \frac{1-z_1}{2} - 1)^2 + P(\frac{1-z_0}{2} - \frac{1-z_2}{2} - \frac{1-z_3}{2})^2 + \\
& P(\frac{1-z_1}{2} + \frac{1-z_2}{2} - \frac{1-z_4}{2})^2 = \\
=& 11z_0 - 17{,}5z_1 - 28z_2 - 17z_3 + 11{,}5z_4 + \\
& 13{,}5(z_0z_1 - z_0z_2 - z_0z_3 + z_1z_2 - z_1z_4 + z_2z_3 - z_2z_4) + \\
& 80{,}5
\end{aligned}
$$

Con respecto al operador C:

- La igualdad se cumple para variables con valores $\{-1, 1\}$, ya que $z_i^2 = 1$.
- Debido al postulado de medición en mecánica cuántica [1] la fase global es despreciable, por lo que $e^{i\gamma 80{,}5} \cdot e^{i\gamma H_p} = e^{i\gamma H_p}$.
- $Rz_i(\lambda) = exp(-i\frac{\lambda}{2}Z_i)$

- $Rz_iz_j(\lambda) = exp(-i\frac{\lambda}{2}Z_i \otimes Z_j)$

De esta forma, el hamiltoniano del problema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&U(C,\gamma) = exp(-i\gamma C) = \\
&\quad Rz_0(11*2\gamma)\cdot Rz_1(-17{,}5*2\gamma)\cdot Rz_2(-28*2\gamma)\cdot Rz_3(-17*2\gamma)\cdot Rz_4(11{,}5*2\gamma)\cdot \\
&\quad Rz_0z_1(+13{,}5*2\gamma)\cdot Rz_0z_2(-13{,}5*2\gamma)\cdot Rz_0z_3(-13{,}5*2\gamma)\cdot Rz_1z_2(+13{,}5*2\gamma)\cdot \\
&\quad Rz_1z_4(-13{,}5*2\gamma)\cdot Rz_2z_3(+13{,}5*2\gamma)\cdot Rz_2z_4(-13{,}5*2\gamma)
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition.* Cambridge University Press, 2010.

[2] H. Urgelles Pérez, P. Picazo-Martinez, D. Garcia-Roger, and J. Monserrat. Multi-objective routing optimization for 6g communication networks using a quantum approximate optimization algorithm. *Sensors*, 22:7570, 10 2022.