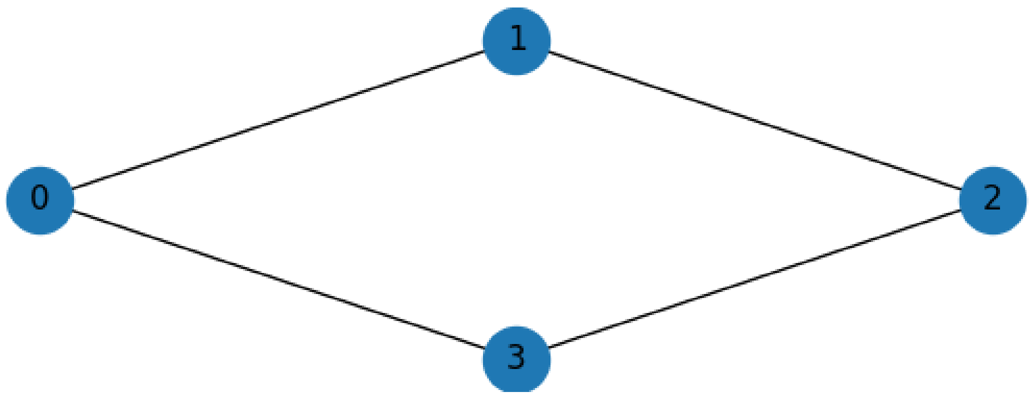
Qiskit - Max Cut



1 Problema de optimización Max Cut

Dado un grafo, asignar a los nodos un valor 0 o 1 tal que se maximice el número de aristas del grafo entre nodos de distinto valor.

2 Formulación del problema

Sea G un grafo tal que:

$$G = (V, E)$$
$$V = [0, 1, 2, 3]$$
$$E = [(0, 1), (1, 2), (2, 3), (0, 3)]$$

Y sea $x_i = 0, 1$ el valor asignado al nodo i.

3 Formulación de H_p

- Función de coste clásica:

$$C(x) = \sum_{(i,j)\in E} (x_i * (1 - x_j) + x_j * (1 - x_i))$$

- Se realiza un cambio de variable tal que:

$$C(x) \to g(z)$$
$$x_i \to \frac{1 - z_i}{2}$$
$$z_i = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i = 0 \\ -1 \text{ si } x_i = 1 \end{cases}$$

Entonces

$$g(z) = \sum_{(i,j)\in E} [\frac{1 - z_i}{2} * (1 - \frac{1 - z_j}{2}) + \frac{1 - z_j}{2} * (1 - \frac{1 - z_i}{2})] = \quad [1]$$
$$= \sum_{(i,j)\in E} \frac{1}{4}(2 - 2 * z_i * z_j) = \sum_{(i,j)\in E} \frac{1 - z_i * z_j}{2}$$

- Problem hamiltonian: Sustituir variables en formato Ising ($z_i = 1, -1$) por puertas Pauli z en el qubit i (σ_z^i):

$$H_p = \sum_{(i,j)\in E} \frac{1 - \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j}{2}$$

- Operador unitario $U(H_p, \gamma)$:
Dada la definición de operador $R_{zz_{i,j}}(\lambda) = exp(-i * \frac{\lambda}{2} * \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j)$

$$U(H_p, \gamma) = exp(-i * \gamma * H_p) = \prod_{(i,j)\in E} exp(-i * \gamma * \frac{1 - \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j}{2}) =$$
$$= \prod_{(i,j)\in E} [exp(+i * \frac{\gamma}{2} * \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j) * exp(-i * \frac{\gamma}{2})] = \quad [2]$$
$$= \prod_{(i,j)\in E} exp(-i * \frac{-\gamma}{2} * \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j) =$$
$$= \prod_{(i,j)\in E} R_{zz_{i,j}}(-\gamma)$$

[1] Nota: $\frac{1-z_i}{2} * (1 - \frac{1-z_j}{2}) = \frac{1-z_i}{2} * \frac{1-z_j}{2} = \frac{1}{4} * (1 - z_i + z_j - z_i * z_j)$

[2] La fase global es despreciable

- Operador unitario $U(H_m, \gamma)$:
  El operador mixer hamiltonian (H_m) es el mismo para cualquier instancia de QAOA.

  $$R_{x_i}(\lambda) = exp(-i * \frac{\lambda}{2} * \sigma_x^i)$$

  $$H_m = \sum_{i=0}^{|V|} \sigma_x^i$$

  $$U(H_m, \beta) = exp(-i * \beta * H_m) = \prod_{i=0}^{|V|} exp(-i * \beta * \sigma_x^i) = \prod_{i=0}^{|V|} R_{x_i}(2 * \beta)$$

4 Resultados

Dada la naturaleza del problema Max-Cut existen dos resultados óptimos: "1010" y "0101", que devuelven el máximo de la función de coste ($C(x) = 4$). Un valor "abcd" sería equivalente a dar un valor "a" al nodo 3, "b" al nodo 2 y así sucesivamente.

- Estadísticas Según esta tabla, se encuentra el camino óptimo con cualquier

nº Capas	**Estadística máxima**	**Estadística global**
p = 1	100%	52.14%
p = 2	100%	98.17%
p = 3	100%	96.10%
p = 4	100%	98.70%
p = 5	100%	98.90%

Table 1: Resultados de la ejecución del problema Max-Cut de Qiskit

  número de capas el 100% de las ejecuciones.

- Funciones graficadas:

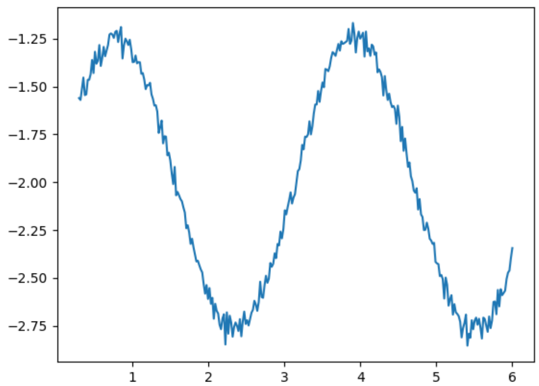


Figure 1: Función gamma con $\beta = 1.0$ y variando γ

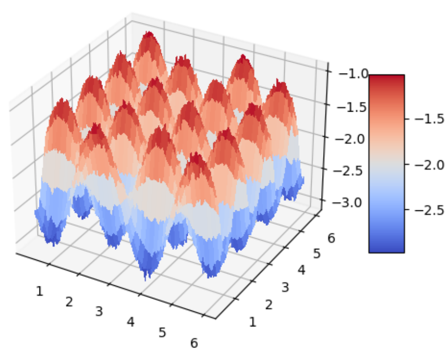


Figure 2: Función variando β, γ