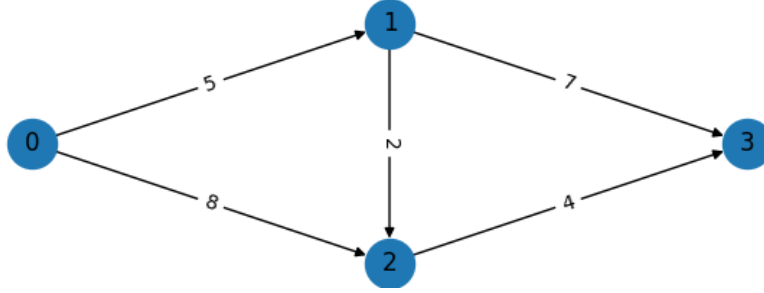


Desarrollo

20 de febrero de 2024

1. Primer grafo



Con este grafo se pretenden analizar los resultados obtenidos en la sección 2.2 (*Single-Objective Quantum Routing Optimization*) del artículo [2].

El problema a resolver es encontrar el camino más corto que conecte los nodos 0 y 3.

■ Objetivo:

$$\min(5X_{01} + 8X_{02} + 2X_{12} + 7X_{13} + 4X_{23})$$

$$\text{dnde } X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el camino contiene a la arista del nodo } i \text{ al } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Restricciones:** También se deben añadir una serie de restricciones para evitar caminos triviales o incongruentes.

$$X_{01} + X_{02} = 1 \tag{1}$$

$$X_{01} = X_{12} + X_{13} \tag{2}$$

$$X_{02} + X_{12} = X_{23}$$

Estas restricciones se pueden justificar como:

1. Debe haber exactamente un eje del camino que involucre al nodo de comienzo. Obliga al camino a comenzar por dicho nodo.
2. Para cada nodo intermedio debe haber en el resultado tantas aristas entrantes como salientes. Evita caminos incongruentes y hace que el único nodo posible para finalizar sea el nodo final.

Siguiendo el caso del artículo se elige como valor del *modificador de Lagrange* $P = 27$, ya que debe ser estrictamente mayor que el máximo de la función objetivo: $\max_x f_{\text{sin restric}}(x) = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} = 26$

De acuerdo con los pasos descritos en la sección ??, la función de coste clásica en su versión QUBO es:

$$f(X) = 5X_{01} + 8X_{02} + 2X_{12} + 7X_{13} + 4X_{23} + \\ P(X_{01} + X_{02} - 1)^2 + P(X_{01} - X_{12} - X_{13})^2 + P(X_{02} + X_{12} - X_{23})^2$$

El número de qubits del sistema cuántico es igual a la cantidad de variables de la función clásica, esto es, la cantidad de ejes del grafo. La correspondencia entre las variables de la función clásica y el circuito es la siguiente:

X_{01}	X_{02}	X_{12}	X_{13}	X_{23}
z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

De acuerdo con la sección ?? la versión Ising de la función de coste queda como:

$$g(z) = 5\frac{1-z_0}{2} + 8\frac{1-z_1}{2} + 2\frac{1-z_2}{2} + 7\frac{1-z_3}{2} + 4\frac{1-z_4}{2} + \\ P\left(\frac{1-z_0}{2} + \frac{1-z_1}{2} - 1\right)^2 + P\left(\frac{1-z_0}{2} - \frac{1-z_2}{2} - \frac{1-z_3}{2}\right)^2 + \\ P\left(\frac{1-z_1}{2} + \frac{1-z_2}{2} - \frac{1-z_4}{2}\right)^2 = \\ = 11z_0 - 17,5z_1 - 28z_2 - 17z_3 + 11,5z_4 + \\ 13,5(z_0z_1 - z_0z_2 - z_0z_3 + z_1z_2 - z_1z_4 + z_2z_3 - z_2z_4) + \\ 80,5$$

Con respecto al operador C:

- La igualdad se cumple para variables con valores $\{-1, 1\}$, ya que $z_i^2 = 1$.
- Debido al postulado de medición en mecánica cuántica [1] la fase global es despreciable, por lo que $e^{i\gamma_{80,5}} \cdot e^{i\gamma_{H_p}} = e^{i\gamma_{H_p}}$.
- $Rz_i(\lambda) = \exp(-i\frac{\lambda}{2}Z_i)$

- $Rz_i z_j(\lambda) = \exp(-i \frac{\lambda}{2} Z_i \otimes Z_j)$

De esta forma, el hamiltoniano del problema es el siguiente:

$$U(C, \gamma) = \exp(-i\gamma C) =$$

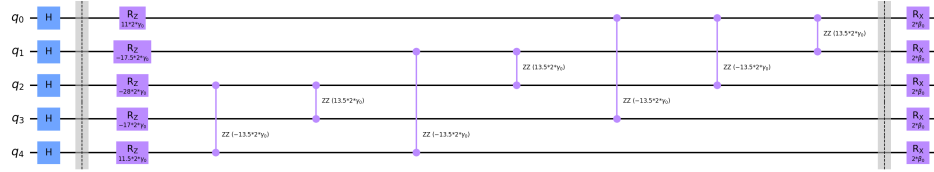
$$Rz_0(11 * 2\gamma) \cdot Rz_1(-17,5 * 2\gamma) \cdot Rz_2(-28 * 2\gamma) \cdot Rz_3(-17 * 2\gamma) \cdot Rz_4(11,5 * 2\gamma) \cdot$$

$$Rz_0 z_1(+13,5 * 2\gamma) \cdot Rz_0 z_2(-13,5 * 2\gamma) \cdot Rz_0 z_3(-13,5 * 2\gamma) \cdot Rz_1 z_2(+13,5 * 2\gamma) \cdot$$

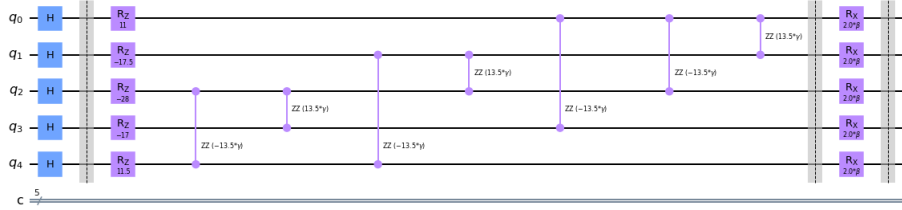
$$Rz_1 z_4(-13,5 * 2\gamma) \cdot Rz_2 z_3(+13,5 * 2\gamma) \cdot Rz_2 z_4(-13,5 * 2\gamma)$$

Con el operador $U(B, \beta)$ y el vector inicial, definidos en la sección ??, y el operador $U(C, \gamma)$ obtenido se puede construir el circuito cuántico.

- **Circuito obtenido ($p = 1$):**



- **Circuito del artículo ($p = 1$):**



1.1. Diferencias con el artículo

El circuito obtenido teóricamente difiere del que se puede ver en la sección 2.2 del artículo [2].

En la sección anterior se obtienen operadores con la forma $Rz(n * 2\gamma)$, mientras que en la imagen del circuito en el artículo aparecen como $Rz(n)$.

Debido a esto, y como se busca replicar los resultados del artículo, se modifica el hamiltoniano para que sea igual al de la imagen.

Referencias

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] H. Urgelles Pérez, P. Picazo-Martinez, D. Garcia-Roger, and J. Monserrat. Multi-objective routing optimization for 6g communication networks using a quantum approximate optimization algorithm. *Sensors*, 22:7570, 10 2022.