

Activitat 2

Hugo Aranda Sánchez

April 24, 2023

Abstract

Aquesta es una formalització molt maca i entenedora del problema 2

1 Enunciat

Conjunt dominant. En un graf no dirigit $G = (V, E)$, diem que $D \subseteq V$ és un conjunt dominant en G si per cada vèrtex $u \in V$ tenim que $u \in D$ o és adjacent a un $v \in D$, $(u, v) \in E$. Definim el problema Conjunt Dominant de la manera següent: Donats un graf no dirigit $G = (V, E)$ i un natural b decidir si existeix un conjunt dominant D en G tal que $|D| \leq b$. Demostreu que Conjunt Dominant és NP-complet.

2 Respostes

Per demostrar que el conjunt dominant és NP-Complet haurem de demostrar tant que es NP com que es NP-hard.

2.1 El conjunt dominant es NP

En primer lloc, per demostrar que el problema es troba a NP necessitem un certificat, el qual en aquest cas es una possible solució del problema, i una instància del mateix, tenim una forma de verificar si aquest certificat es o correcte o no en temps polinòmic.

El certificat es una seqüència de vertexos que formen un Set Dominant dins del graf.

Podem validar aquesta solució en primer lloc provant si la seva mida es menor o igual a b . I a continuació, provant que tots els vertexos pertanyen als vertexos del graf i tots els vertexos que no formen part de la seqüència son adjacents a almenys algun vertex dins del set. Això es pot fer en temps polinòmic respecte a la mida del graf $O(V + E)$. Basicament hem d'anar recorrent tots el vertex un a un i o veure que formen part del set en general o algun dels seus vertexos adjacents en forma part.

2.2 El conjunt dominant es NP-hard

Ara necessitem demostrar que el Dominant Set es NP-hard. Per demostrar això farem una reducció de karp del problema Vertex Cover (que ja sabem que es NP-complet) al problema del Conjunt Dominant definit mes adalt.

El problema del vertex cover es el conjunt de vertexos tal que cada aresta del graf es incident en al menys un d'aquets.

Cada instància del VC consisteix en un graf $G = (V, E)$ i un enter b com entrada. Ara donarem una manera de convertir aquesta entrada al problema en una entrada problema de Conjunt Dominant.

2.2.1 Construcció en temps polinòmic

Per reduir aquest problema a un Conjunt Dominant construirem un graf $G' = (V', E')$ en el que si es troba una solució de CD tenim una solució de VC. La b de un problema evidentment es la mateixa b del altre.

Definint V': Trobarem aquí tots els vertexos de V units amb altres que ens servirán per a traslladar la solució. Posarem tants nous vertexos uv com arestes (u,v) hi han en E (el conjunt original d'arestes), ara veurem com els unirem.

Definint E': Trobarem aquí totes les arestes de E unides amb altres que ens servirán per a traslladar la solució. Aquestes noves arestes es trobaran entre cada vertex u,v tal que tenien una aresta en E , i uniran u amb el nou vertex abans esmentat uv i v amb el nou vertex uv .

La construcció previa es pot fer en temps polinomic ja que només afegim V vertexos i $2 * V$ arestes.

2.2.2 Demostració de correctesa

Ara demostrarem que la reducció es correcta, mostrarem que si G' té un vertex cover de mida al menys b el graf G té un Dominating Set de mida al menys b també.

Assumirem que el graf G té un vertex cover VC de mida b . Tota aresta e amb vertexos incidents u,v té al menys u o v com a part del vertex cover. Si es u el que està englobat al vertex cover

Cada vertex afegit només domina a si mateix i als vertexos u,v que el van invocar. Això juntament amb el fet de que qualsevol dels vertexos u,v ha de dominar el triangle que formen u i v i uv perquè per construcció cadascun es adjacent als altres dos.

A més a més els vertexos originals no només dominen els nous sinó altres vertexos (superconjunt fora del triangle).

Gràcies a aquest dos fets podem assegurar que existeix un set dominant de mida b amb vertexos originals (del tipus u o v i no uv), pel fet de que en la solució de mida b podem substituir sempre un vertex si aquest surt com a dominant amb un de original.

I si hi ha un vertex original que té dominància sobre un vertex nou aquest a l'hora **cobreix la aresta original** que ha fet crear el vertex artificial.

Un conjunt de vertexos originals que domina tots els nous vertexos de G' (a més dels vertexos originals), és per tant, un set de vertexos a G que cobreix totes les arestes del graf.

Aquest set no inclou cap dels nous vertexos (com hem vist abans que podem substituirlos) i és de mida al menys b .

Un important detall és que assumim que no hi ha vertexos inconexos atès que aquets s'ignorarien en el vertex cover. Tot i que en el dominant set aquets si que serien part del set dominant ja que ningú els pots dominar. Aquets simplement els eliminem perquè no ens aporten a la solució. Això fa que aquesta reducció només funcioni en aquesta direcció.