

0.3  
0.3

↓ Pot ser cal·lic una mica més de la e... ⇐  
és a dir en demostrar que si

$$H \in \text{Half Clique} \Rightarrow \langle G, k \rangle \in \text{CLIQUE}$$

## 5. Half clique

Donat  $G$ , graf no dirigit, decidir si conté una  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -clique

a) Dem. que HALF-CLIQUE  $\in$  NP

Per don que  $\in$  NP, hem de mostrar que podem verificar una solució al problema en temps polinòmic.

Una verificació en temps polinòmic seria, donat un conjunt de vertices  $V' \subseteq V$  com a certificat, comprovar que  $|V'| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  i tot  $u, v \in V'$  estiguin unit per una aresta.

Com el tamany de  $V'$  es polinòmic respecte a  $n$ , la verificació de la solució també es polinòmica, i per tat HALF-CLIQUE  $\in$  NP.

b) Dem que si HALF-CLIQUE  $\in$  P, llavors CLIQUE  $\in$  P

Ho dem. per una reducció  $\text{CLIQUE} \leq_m^p \text{HALF-CLIQUE}$

Transformem instàncies de CLIQUE a instàncies de HALF-CLIQUE.

Donat un  $G$  amb  $n$  vertices, si volem trobar una  $k$ -CLIQUE

• Si  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , no cal transformació. Podem aplicar directament HALF-CLIQUE.

• Si  $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , llavors transformem  $G$  en  $H$ , buscant que  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Per fer-ho, afegim els ~~vertices~~ amb grau 0 que calguin. Concretament, al afegir  $t = 2k - n$  vertices. Si existeix una HALF-CLIQUE en  $H$ , serà segur perquè s'ha donat amb  $k$ -vertices, i eliminant els que hem afegit terim la solució de  $k$ -CLIQUE

• Si  $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , llavors fem algo semblant per la creació d' $H$ . Afegim ~~vertices~~ <sup>vertices, concretament</sup>  $t = n - 2k$ , cadascun d'aquests connectats a tots els ~~vertices~~ <sup>vertices</sup>.

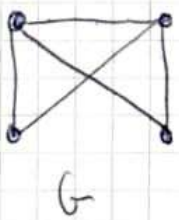
(segueix)

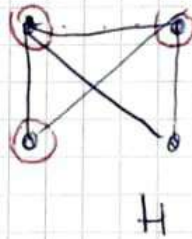
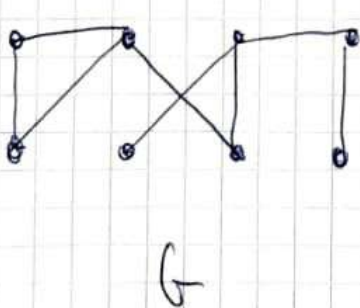


Qualsevol  $k$ -clique a  $G$  es combina amb els nous  $t$  vertices per fer una possible (si hi ha)  $(k+t)$ -clique, on  $k+t = \frac{n+t}{2}$ . El ~~can~~ tamany del graf  $H$  serà també  $n+t = m$ . Per tant, si troben una  $\lceil \frac{m}{2} = k+t \rceil$ -clique, es a dir, una HALT-CLIQUE a  $H$ , això serà només si  $G$  tenia una  $k$ -CLIQUE, ja que ha d'incloure almenys  $k$  nodes de  $G$ .

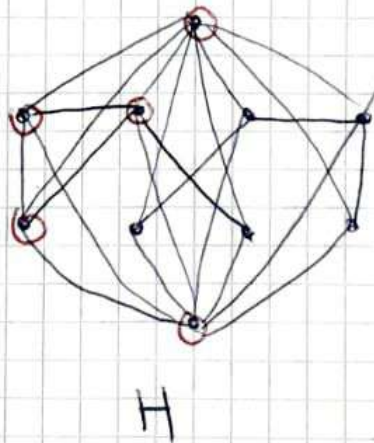
Com la transformació de CLIQUE a HALF-CLIQUE es pot ser en temps polinòmic (No cal si  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $O(n)$  si  $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  i  $O(n \cdot m)$  si  $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ), si HALF-CLIQUE  $\in P$ , llavors CLIQUE  $\in P$ .

(Dibujos)

$$K > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$n=4, n/2=2$$
$$k=3$$
$$\Rightarrow t=2$$

$$(2, 4, 3)$$

$$K=3=\frac{D}{2}$$
$$K < \left[ \frac{1}{2} \right]$$


~~Def~~  $n=8$   $n/2=4$

$$K=3$$
$$t=2$$
$$(8-2-3)$$

$$K' = S = \frac{m}{2} = K + t$$