$\frac{0.35}{0.4}$

AA-Entrega-2

Oriol Miró López-Feliu

March 2023

1 BALANCED k-COLORING $\in$ NP-complete

Per demostrar que el problema de si un graf té una balanced k-coloring es NP-complet per qualsevol $k \geq 3$, primer demostrarem que es NP i després demostrarem que es NP-dreduirem el problema de k-Coloring a aquest, ja que se sap que k-Coloring és NP-complet.

Balanced k-Coloring $\in$ NP: Per demostrrar que Balanced k-Cororing $\in$ NP hem de demostrar que, donat un certificat, el podem comprobar en temps polinòmic. Això és fàcil de veure. Sigui $B = V_1, V_2 \dots V_k$ els conjunts de vertexs pintats de cada color, hem de comprobar en primer lloc que tenim conjunts, en temps lineal. Després, hem de comprobar que $\forall i, j$, $|V_i| = |V_j|$. Aquest pas es pot fer en temps $O(k)$. De complir-se això, ja sabem que el graf està balancejat. Després hauríem de recorrer les arestes, sigui (u, v) una aresta, hem de comprobar que el color de u sigui sempre diferent del color de v. Aquest pas té un cost de $O(|E|)$. Tots els pasos tenen temps polinòmic, i per tant Balanced k-Coloring $\in$ NP.

$O(n)$?

Balanced k-Coloring $\in$ NP-Hard: Donada una instància de k-Coloring amb graf $G = (V, E)$, construïm una instància de Balanced k-Coloring amb graf $G' = (V', E')$ de la següent manera:

- Copiem el graf original $k-1$ vegades, i doncs ara tenim k instàncies de G, $G_1 \dots G_k$.
- Connectem amb una aresta tots els vèrtexs que siguin equivalents entre els grafs. És a dir, sigui $V_{i,j}$ el j-essim vèrtex del graf i, connectem entre si $\forall i$ tots els $V_{i,1}$, després $\forall i$ tots els $V_{i,2}$ entre si, i així per tots els vèrtexs.

El graf resultant G' conté $k|V|$ vèrtexs i $k|E| + k * (k-1)/2|V|$ arestes. Aquesta reducció es pot realitzar en temps polinòmic.

La idea d'aquesta reducció és que a cada vèrtex igual d'una còpia del graf diferent tindrà un color diferent. Per tant, si el graf original ja complia la restricció que cada color havia d'estar assignat a $1/k$ vèrtex, es continua complint. D'altra banda, si no es complia aquesta restricció i, per exemple, el color i estava assignat a més vèrtexs, al ser arbitrari el color, en les altres còpies del graf aquests vèrtexs prendran els diferents colors que hi ha, igualant, per tant, la proporció.

Estaria bé argumentar, demostrar les teves afirmacions

Demostració: Imaginem que ens donen una instància d'un graf. Al construir la nostra instància de Balanced k-Coloring, si el graf original G no tenia una k-coloració, en G', per cada subgraf $G_1 \ldots G_k$ no es podrà trobar una k-coloració tampoc, i per tant la resposta negativa es preserva. D'altra banda, si a G existia una k-coloració:

per què?

- Per cada subgraf de G' es donarà una també, al ser còpies, i
- En formar els vèrtex simètrics un graf complet de mida k, el qual obviament es pot pintar amb k colors diferents asignant un color a cada vèrtex, es respecta la restricció.

ok

I obtenim per tant un Balanced k-Coloring que preserva la resposta positiva també.

Al tenir Balanced k-Coloring $\in$ NP i Balanced k-Coloring $\in$ NP-Hard, podem concloure que Balanced k-Coloring $\in$ NP-Complet

2 BALANCED 2-COLORING $\in$ P

A continuació demostrarem que el problema Balanced 2-Coloring està en P. Un graf té una 2-coloració balancejada si i només si és bipartit, amb les dues "meitats" del graf tenen la mateixa quantitat de vèrtexs. Es veu clar, doncs, que amb un algoritme de temps polinòmic, com per exemple DFS, podem determinar si el graf és bipartit, i posteriorment només caldria comprovar que la cardinalitat del conjunt de vèrtex de les dues particions fos igual.

Per tant, Balanced 2-Coloring $\in$ P

Complet ✓.

Què passa si hi ha nodes independents? Els heu de repartir ... si es pot