

Debates

Marc Gonzalez Vidal

May 30, 2023

1 Algoritmo Propuesto

El comité organizador de un taller desea invitar a un conjunto de personas de tal forma que se maximice el número de debates exitosos en el taller. Para cada debate i , el comité ha definido dos listas de personas: la lista de éxito S_i y la lista de fracaso F_i . Un debate se considera exitoso si al menos una persona de S_i está presente, o si al menos una persona de F_i está ausente. Se propone el siguiente algoritmo:

Require: Listas de success lists S_i , listas de failure lists F_i y núm debates d

```
numSuccessLists  $\leftarrow$  0
numFailureLists  $\leftarrow$  0
for  $i = 0$  to  $d$  do
  if  $S_i$  is not empty then
    numSuccessLists  $\leftarrow$  numSuccessLists + 1
  end if
  if  $F_i$  is not empty then
    numFailureLists  $\leftarrow$  numFailureLists + 1
  end if
end for
if numSuccessLists  $\geq$  numFailureLists then
  Invitar a todas las personas
else
  No invitar a ninguna persona
end if
=0
```

2 Demostración 2-aproximación y corrección

El algoritmo en esencia lo que hace es contar cuantas listas no vacías de éxito hay (este número lo llamaremos S) y cuantas listas no vacías de fracaso hay (este número lo llamaremos F) teniendo en cuenta todos los debates y simplemente invita a todo el mundo en caso de que $S \geq F$ o no invita a nadie en caso contrario.

Fijémonos en que el problema es trivial tanto si no hay ninguna lista de éxito vacía como si no hay ninguna lista de fracaso vacía. En el primer caso, invitando a todo el mundo tendremos todos los debates satisfechos y en el segundo caso, si no invitamos a nadie también los tendremos todos satisfechos.

El problema viene en los casos que las dos listas sean vacías, entonces el debate ese debate es insatisfactorio o que haya una de las dos listas vacías, entonces solo se puede satisfacer de una de las dos formas dependiendo de cual sea la lista vacía.

Por lo que vemos, un debate solo es satisfactible cuando tiene una de las dos listas no vacías. Aquí ya tenemos una cota superior de los debates que se pueden satisfacer en el problema. $OPT \leq F + S$.

Como nuestro algoritmo o bien satisface todas las S_i o bien satisface todas las F_i dependiendo de cuál sea más grande, tenemos que $ALG = \max(F, S)$.

Por propiedades aritméticas sabemos que $\frac{F+S}{2} \leq \max(F, S)$, por lo que tenemos que $\frac{F+S}{2} \leq ALG$ y como sabemos que $OPT \leq F + S$ tenemos $\frac{OPT}{2} \leq \frac{F+S}{2}$ que substituyendo obtenemos $\frac{OPT}{2} \leq ALG$, por lo que obtenemos que es una 2-aproximación.

3 Complejidad del Algoritmo

Suponiendo que preguntar a las listas si son vacías o no es constante, el coste de este algoritmo es $O(n)$ donde n es el número de debates que hay, ya que simplemente recorremos todos los debates acumulando el número de listas no vacías que hay. Todas las otras comprobaciones son de tiempo constante.