AA-Entrega-8

Oriol Miró López-Feliu

May 2023

Problema 30

Considereu el següent algorisme que processa un graf G amb n nodes i donat per un flux d'arestes.

1. Selecciona una aresta (u, v) amb distribució uniforme sobre les arestes d'E.
2. Selecciona amb distribució uniforme un vèrtex de $V \setminus \{u, v\}$.
3. Si (u, w) i (v, w) apareixen després de (u, v) en el flux, la sortida és $m(n-2)$; si no, serà 0.

Apartat a

Proporcioneu una implementació com a algorisme de streaming. El vostre algorisme només pot fer una passada per l'stream i utilitzar $O(n \log n)$ memòria.

Algorithm 1 contarTriangles(int n, stream s)

```
set_V ← {}
m ← 0
e_found ← 0
triangles ← 0
while not s.end() do
    m ← m + 1
    (u, v) ← s.read()
    set_V ← set_V ∪ u, v
    with probability 1/m:
        sample ← (u, v)
        sample uniformly w ∈ set_V \ {u, v}
        arestes_buscades ← (u, w), (v, w)
      e_found ← 0
    if (u, v) ∈ arestes_buscades then
      e_found ← e_found + 1
    end if
    if e_found == 2 then
      triangles ← m · (n − 2)
    end if
end while
On query, report triangles
```

Apartat b

> Demostreu que l'algorisme proporciona una estimació del nombre de triangles al graf G.

La probabilitat de que el nostre algoritme escollir una aresta (u, v) concreta es $\frac{1}{m}$, i que escolli un vertex concret w que no pogui ser ni u ni v es $\frac{1}{n-2}$. La probabilitat per tant que escolli una aresta y un vertex concrets es $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{m*(n-2)}$.

Imaginem doncs que en el graf tenim k triangles. La probabilitat per escollir cadascun d'aquests triangles especifics es la mencionada anteriorment. Si tenim k triangles, el nostre algoritme troba amb probabilitat $k \cdot \frac{1}{m*(n-2)}$ un d'ells, i en el cas de fer-ho dona com a sortida $m * (n - 2)$, si no, dona com a sortida 0. Per tant, l'esperança de la sortida del nostre algorisme és:

$$E[algorisme] = k \cdot \frac{1}{m * (n-2)} \cdot m * (n-2) + (1 - k \cdot \frac{1}{m * (n-2)}) \cdot 0$$

Simplificant l'expressió, obtenim:

$$E[algorisme] = k$$

Això significa que l'esperança de la sortida del nostre algorisme és igual al nombre de triangles k en el graf G. Per tant, l'algorisme proporciona una estimació del nombre de triangles al graf G.