Random 3SAT. Demostreu que hi ha un algorisme aleatori amb un temps esperat polinòmic tal que, donada una fórmula en Forma Normal Conjuntiva amb 3 literals per clàusula calcula una assignació que satisfà com a mínim 7/8 del nombre total de les clàusules.

Sigui n el nombre de variable i m el nombre de clàusules de l'entrada CNF amb clàusules de 3 literals, hem de veure que hi ha un algorisme random que amb un temps esperat polinòmic, sigui capaç de satisfer com a mínim $\frac{7}{8}m$ clàusules. Proposem el següent algorisme:

1. Assignem valors aleatoris a les n variables que hi tenim.

2. Recorrem les m clàusules i acumulem a una variable k quantes d'elles són certes.

3. Comprovem si $k \geq \frac{7}{8}m$ clàusules.

   3.1 En cas negatiu, tornem al pas 1.

   3.2 En cas afirmatiu, ja tenim una assignació que compleix la condició.

Veiem que tenim un algorisme random molt senzill on simplement anem fent assignacions randoms a variables i després comprovem que se'ns estigui complint la condició de $\frac{7}{8}m$ de les clàusules siguin certes.

Ara hem de veure que aquest algorisme te un temps esperat polinòmic amb la condició de que volem que $\frac{7}{8}m$ de les clàusules siguin certes. Per veure això hem de trobar el temps esperat de a través d'assignacions random aconseguir que la condició se'ns compleixi.

Veiem que si tenim una clàusula amb 3 literals (estem a 3 CNF), la probabilitat de que aquesta sigui certa és 1 – probabilitat de ser falsa, i perquè sigui falsa, tant el primer literal, com el segon, com el tercer han de ser 0. Com la probabilitat de ser 0 en un domini {0,1} és 0.5, aleshores la probabilitat de que els tres literals siguin fals es 0.5^3 = 1/8. Per tant com que la probabilitat de que una clàusula sigui certa és 1 – probabilitat de ser falsa = 1 – 1/8 = 7/8.

A continuació, definim la variable aleatòria següent:

$$Z_j = 1 \; si \; la \; clàusula \; C_j \; es \; satisfeta, 0 \; en \; cas \; contrari$$

$$Z = \sum_{j=1}^{m} Z_j$$

Sabent que la probabilitat de que Z_j = 1 és 7/8, l'esperança d'aquesta variable aleatòria és la següent:

$$E[Z] = \sum_{j=1}^{m} E[Z_j] = \frac{7}{8}m$$

Si considerem una sèrie d'intents independents on cada intent te una probabilitat d'èxit de p i una probabilitat de fallar de 1-p, llavors el número de intents fins aconseguir-ho èxit és $\frac{1}{p}$.

Amb això, si considerem p_j la probabilitat de que hi ha exactament j clàusules satisfetes i p és la probabilitat de que hi hagin $\frac{7}{8}m$ clàusules satisfetes (la probabilitat de que es compleixi la condició del nostre problema), tenim que:

$$\frac{7}{8}m = E[Z] = \sum_{0 \le j \le m} jp_j = \sum_{0 \le j < \frac{7m}{8}} jp_j + \sum_{\frac{7m}{8} \le j \le m} jp_j \le \left(\frac{7}{8}m - \frac{1}{8}\right) \sum_{0 \le j < \frac{7m}{8}} p_j + m \sum_{\frac{7m}{8} \le j \le m} p_j$$

$$\le \left(\frac{7}{8}m - \frac{1}{8}\right) * 1 + mp$$

Llavors obtenim:

$$\frac{7}{8}m \le \left(\frac{7}{8}m - \frac{1}{8}\right) + mp \rightarrow \frac{7}{8}m - \left(\frac{7}{8}m - \frac{1}{8}\right) \le mp \rightarrow \frac{1}{8} \le mp \rightarrow p \ge \frac{1}{8m}$$

Per tant tenim que la probabilitat de que es compleixin les $\frac{7}{8}m$ clàusules és més gran o igual que $\frac{1}{8m}$ i com que el nombre d'intents esperat es $\frac{1}{p}$, tenim que el nombre d'intents esperat és 8m.

Com a conclusió veiem que aquest algorisme té temps esperat polinòmic per satisfer $\frac{7}{8}m$ clàusules.