Сегодня, Вашему вниманию представлен проект: «Вычисление длины окружности при помощи вписанного правильного многоугольника».

1: Зададим окружность с центром О и радиусом R. Вопрос заключается в том, каким образом можно измерить этой длину окружности? Способ, к которому я обращаюсь, будет построение правильного многоугольника, вписанного в заданную окружность, периметр которого будет приближенным с высокой точностью к действительной длине окружности. Таким образом, нашей задачей является построение такого вписанного в заданную окружность правильного многоугольника. Путём измерения длины его стороны, мы сумеем вычислить его периметр путем умножения этой величины на известное количество сторон правильного многоугольника.

2: Например, если построить квадрат у которого все вершины лежат на заданной окружности (вписанный в окружность), то его периметр будет составлять примерно 90% длины окружности (вычисленной по справочным данным).

3: Если мы построим правильный многоугольник со 8 сторонами у которого также все вершины лежат на окружности, то его периметр будет уже составлять 97% длины окружности.

4: Далее, если построить правильный многоугольник со 16 сторонами у которого все вершины лежат на окружности, то его периметр будет составлять уже 99% длины окружности. Таким образом, даже такое грубое приближение, как правильный многоугольник с 16 сторонами, даёт очень хороший результат, а выбранный метод измерения является очень точным.

Следовательно, если мы сумеем построить вписанный в окружность правильный многоугольник со значительно большим количеством сторон чем 16, его периметр будет очень близко приближен к длине окружности. Однако, это очень сложно делать графически, так как длина стороны многоугольника будет настолько маленькой, что нарисовать её точно будет практически исключено. Поэтому, я решил сделать математическую модель, которую можно реализовать в виде компьютерной программы. Для этого, я составил специальный алгоритм.

5: Итак, у нас есть модель окружности с центром O и радиусом R.

6: Поскольку мы будем работать с правильным многоугольником, все стороны которого равны по определению, мы можем работать только с одной четвёртой частью, чтобы упростить наш алгоритм.

7: Далее мы переводим наше изображение в прямоугольную систему координат, обозначая точку O за начало координат. Точка B будет иметь координаты R и R. Точка A будет иметь координаты 0 и R, а следовательно луч OA будет являться осью ординат, а точка C будет иметь координаты R и 0, а значит луч OC будет являться осью абсцисс.

8: Далее, отрезок AC будет являться стороной первого приближения нашего правильного многоугольника вписанного в окружность.

9: Затем, мы будем увеличивать количество сторон многоугольника в два раза на каждом шаге алгоритма. Для этого, в следующем шаге, мы должны найти координаты точки C_1 которая лежит на окружности и на отрезке OB с длиной отрезка OC_1 равном R.

10: Отметим точку D^1 на отрезке OC, находящейся на координате X точки C1. Следовательно, отрезки C_1D_1 и OC перпендикулярны и угол OD_1C_1 = 90 градусов.

Далее, рассмотрим треугольники OD1C1 и OCB. Эти треугольники имеют общий угол, некоторый острый угол BOC. Затем, угол OD1C1 в треугольнике равняется 90 градусам, также, как и угол OCB в треугольнике OCB. Поскольку отрезки C1D1 и BC параллельны и находятся под углом 90 градусов к оси абсцисс (X), угол OC1D1 равен углу OBC как образованные с одним и тем же отрезком, отрезком OB.

Таким образом, треугольники OD1C1 и OCB – подобные, по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, т. к. стороны двух подобных треугольников пропорциональны, то отношение отрезков OC / OB равняется отношению отрезков OD1 / OC1.

То есть, каждой части длины отрезка OC соответствует строго определенное значение части длины отрезка OB. Это соответствие повторяется в точности для взаимного отношения отрезков OD1 и OC1.

OC / OB = OD1 / OC1

Теперь нам нужно найти координату точки C1, длину отрезка OD1 на нашем рисунке. Так как нам известно, что точки C и C1 лежат на окружности, то отрезки OC и OC1 равны радиусу R. Отсюда у нас получается уравнение:

R / OB = OD1 / R,

По условиям, мы задаем значение R, которое, значит, нам известно. Далее, нам нужно будет найти значение OD1. Сначала, мы вычислим длину отрезка BO. Мы знаем координаты точек B и O, следовательно мы можем определить расстояние между ними с помощью теоремы Пифагора. Применив её мы получаем что

BO = √ ((|X(т. B) - X(т. O)|) ^ 2 + (|Y(т. B) - Y(т. O)|) ^ 2), или
BO = √(R^2 + R^2), или BO = R * √(2).

Теперь получаем и решаем уравнение:

R / (R * √(2)) = OD1 / R,
R * R = (R * √(2)) * OD1,
OD1 = R^2 / (R * √(2)).

Таким образом, мы нашли длину отрезка OD1, а значит и координату X точки C1.

Далее, мы находим координату Y точки C1. Т. к. мы знаем что точка C1 лежит на отрезке OB, и знаем координату X точки C1, то если найти отношение X к Y на отрезке OB, то можно определить координат Y точки C1. Находим отношение X координата к Y на отрезке OB: для этого нам нужно поделить модуль разности координата Y точки O и координата Y точки B, и модуль разности координата X точки O и координата X точки B, то есть отношение X к Y на отрезке OB равно R : R, или 1 : 1, что значит координат Y точки C1 равен координату X. Таким образом мы нашли точку C1, лежащая на окружности, с координатами R^2 / (R * √(2)), R^2 / (R * √(2)). При этом, отрезок AC1 будет являться стороной правильного многоугольника с восьми сторонами.

11: Далее, мы будем увеличивать количество сторон многоугольника. Для этого, нам необходимо найти координаты точки C2, лежащей на окружности и на луче OE. Точка E – середина отрезка AC1. Точка De на отрезке OC будет отражать X координату точки E. Тогда, отрезок EDe будет перпендикулярен отрезку OC.

12: Далее, точка D2 на отрезке OC будет показывать X координату точки C2. Отсюда, отрезок C2D2 перпендикулярен отрезку OC, угол ODeE = углу OD2C2 = 90 градусов.
Далее, треугольники OD2C2 и ODeE имеют общий угол между лучами OC2 и OC. Значит, EODe равен углу C2OD2.
Аналогично предыдущему шагу алгоритма, треугольники OD2C2 и ODeE являются подобными по первому признаку подобия треугольников.
Аналогично, т. к. стороны двух подобных треугольников пропорциональны, то

ODe / OE = OD2 / OC2.

Нами задано, что отрезок OC2 = R.
Затем, мы находим координаты точек De и E.
Таким образом, мы определем длину отрезков ODe и OE с помощью теоремы Пифагора.

ODe = √(X(т. E) ^ 2) = X(т. E),

а отрезок

OE = √ ((|X(т. E) - X(т. O)|) ^ 2 + (|Y(т. E) - Y(т. O)|) ^ 2) = √(X(т. E)^2 + Y(т. E)^2).

Теперь, в равенстве OD2 / OE = ODe / OC2 мы не знаем только одну величину: OD2.

Итак, мы подставляем величины вместо ODe, OE и OCe и решаем полученное уравнение:

X(т. E) / √(X(т. E)^2 + Y(т. E)^2) = OD2 / R,

√(X(т. E)^2 + Y(т. E)^2) * OD2= X(т. E) * R,

OD2 = X(т. E) * R / √(X(т. E)^2 + Y(т. E)^2).

Если отрезок OD2 лежит на положительной части оси абсцисс и имеет начальную точку O, которая является началом координат, то длина OD2 будет обозначать координат X точки D2, а следовательно и координат X точки C2, что значит координат X точки C2 = OD2. Далее, нам нужно найти координату Y точки C2. Зная координату X точки C2 и зная то что эта точка лежит на луче OE, мы можем найти отношение X координаты к Y на отрезке OE: для этого нам нужно поделить модуль разности координата Y точки O и координата Y точки E, и модуль разности координата X точки O и координата X точки E, то есть на отрезке OE X : Y = X(т. E) / Y(т. E).

Далее чтобы найти координат Y точки C2, мы умножаем координат X точки C2 на отношение X к Y на отрезке OE, или на X(т. E) / Y(т. E). Таким образом мы нашли координаты точки C2: ODe, ODe * (X(т. E) / Y(т. E)). А также теперь отрезок AC2 будет являться стороной правильного многоугольника со шестнадцатью сторонами.

13: Аналогично, мы будем увеличивать число сторон многоугольника, находить длину одной стороны между точками A и CN, вычислять длину периметра путем умножения числа сторон на длину одной стороны и так далее. Здесь показана точка C3 которую мы будем вычислять аналогично как точки C1 и C2. Отрезок AC3 будет являться стороной правильного многоугольника, с тридцатью двумя сторонами.

14: И также аналогично мы можем найти точку C4. Отрезок AC4 будет являться стороной правильного многоугольника (64 стороны). С каждым шагом алгоритма, мы задаём число сторон в правильном многоугольнике больше в два раза предыдущего приближения к окружности. Поэтому, количество сторон в нашем правильном многоугольнике, всегда будет степенью числа 2.

15: Подведём итоги: метод который я выбрал строит правильный многоугольник в системе координат. Все его вершины лежат на окружности, и чем больше у него будет сторон, тем больше его вершин лежат на окружности, а следовательно тем точней можно определить длину окружности, узнав периметр этого многоугольника.

С помощью этой программы я вычислил длину окружности с радиусом 50 условных единиц и с количеством сторон 2250, что заняло 2 часа работы современного компьютера. Далее, чтобы оценить точность моего метода, я вычислял отношение длины полученного приближения к окружности к заданному диаметру. Данное отношение называется математической константой Пи.

Мной было проведено сравнение вычисленного по моему методу числа Пи с его значением, взятом из справочника. По результатам, мой алгоритм вычислил правильно первые 150 знаков числа Пи после запятой. Значит, с помощью моего алгоритма можно вычислять длину окружности с очень высокой точностью, которая, при достаточном компьютерном времени, может сравниться со справочным значением числа Пи или превысить его.

Число Пи по моему алгоритму составило:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
4459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664
470938446095505822317253594081221663039751255875420118190712

38684955405446122695908417660632448795896484298191096401679827347074982314581096660169528148603569839939699780633828251999253295504203066546112705223316592311519398639594521051411941533277796904184458550677086002803710859718089650767401291342748978535449228026240643262023597028532485398299386982469033197129960744086509 97.

Спасибо за внимание!