Logika Cyfrowa

Jakub Gałaszewski

March 4, 2024

1 Udowodnij używając tabeli logicznej, że $x \lor y \land z = (x \lor y) \land (x \lor z)$.

tabela logiczna to reprezentacja wyrażeń logicznych za pomocą tabelki, gdzie zmienne logiczne przybierają wartość prawdziwą i fałszywą. W tabelce logicznej rozpatrujemy wszystkie kombinacje zmiennych, aby sprawdzić (lub udowodnić) prawdziwość danych stwierdzeń.
załóżmy że $\phi \equiv x \lor y \land z = (x \lor y) \land (x \lor z)$ W naszym przypadku rozpiszemy wartości każde wartości logiczne dla x, y, z (2^3) aby udowodnić podany w zadaniu przykład:

x	y	z	$x \lor y \land z$	$(x \lor y)$	$(x \lor z)$	$(x \lor y) \land (x \lor z)$	ϕ
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

czyli ϕ jest tautologią.

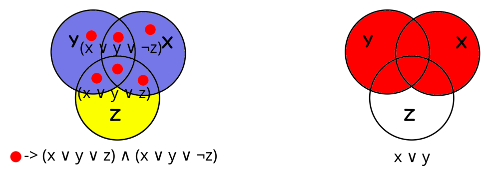
2 Udowodnij używając diagramu Venna, że $x \land y \lor y \land z \lor \neg x \land z = x \land y \lor \neg x \land z$.

Diagram Venna to diagram najczęściej przedstawiane w postaci "okręgów", reprezentują one zbiory wartości.

(x ∧ y) ∨ (y ∧ z) ∨ (¬x ∧ z) (x∧ y) ∨ (¬x ∧ z)

$$\equiv$$

3 Udowodnij używając diagramu Venna, że $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) = x \vee y$.



$$\equiv$$

4 Udowodnij przez przekształcenia algebraiczne algebry Boole'a, że $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) = x$

Algebra Boole'a jak nazwa wskazuje to algebra, która składa się z 0, 1, koniunkcji, alternatywy, negacji. Podobnie jak zbiory algebraiczne posiada dla nich charakterystyczne własności, np łączność, przemienność, absorpcja.

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) = (x \wedge y \vee x) \wedge (x \wedge y \vee \neg y) =$$
$$((x \wedge y) \vee (x \wedge x)) \wedge (x \wedge y \vee \neg y) =$$
$$x \wedge ((\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee y)) = x \wedge (\neg y \vee x) =$$
$$(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge x) = x \wedge \neg y \vee x = x$$

można też zdecydowanie prościej:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) = x \wedge (y \wedge \neg y) = x \wedge 1 = x$$

5 Udowodnij przez przekształcenia algebraiczne algebry Boole'a, że $x \wedge y \vee y \wedge z \vee \neg x \wedge z = x \wedge y \vee \neg x \wedge z$. Możesz użyć równości z poprzedniego zadania.

$$x \wedge y \vee y \wedge z \vee \neg x \wedge z =$$
$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge 1) =$$
$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \neg x)) =$$
$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge \neg x)) =$$
$$(x \wedge y) \wedge (1 \vee z) \vee (\neg x \wedge z) \wedge (1 \vee y) =$$
$$x \wedge y \vee \neg x \wedge z$$

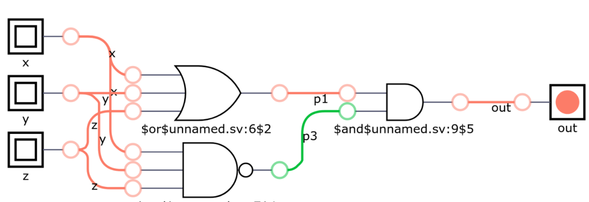
6 Uprość przez przekształcenia algebraiczne algebry Boole'a formułę $\neg x \wedge \neg y \vee \neg x \wedge y \wedge \neg z \vee \neg(x \vee \neg z)$

$$
\begin{gathered}
\neg x \wedge \neg y \vee \neg x \wedge y \wedge \neg z \vee \neg(x \vee \neg z) = \\
\neg(\neg x \vee y) \vee \neg(x \vee \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
\neg((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
\neg(((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge \neg z)) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
\neg(x \vee (x \vee y) \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
(\neg x \wedge \neg(x \vee y) \vee z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
(\neg x \wedge \neg x \wedge \neg y \vee z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
(\neg x \wedge \neg y \vee z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) = \\
\neg x((\neg y \vee z) \vee (y \wedge \neg z)) = \neg x(\neg(y \wedge \neg z) \vee (y \wedge \neg z)) = \\
\neg x \wedge 1 = \neg x
\end{gathered}
$$

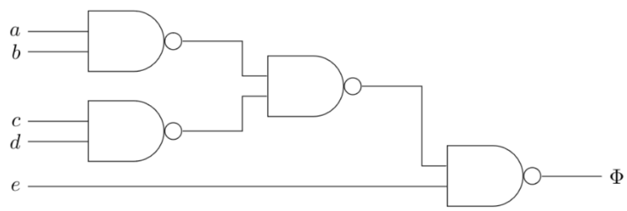
7 Napisz możliwie prostą formułę algebry Boole'a odpowiadającą poniższej tabelce oraz narysuj możliwie prosty układ logiczny realizujący tę formułę:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

układ logiczny to Diagram, w którym do każdego wejścia bramki jest podłączone co najwyżej jedno wyjście (być może innej bramki). Reprezentuje się w sposób wizualny.
korzystając z wiedzy o DNF i CNF łatwo można wyznaczyć formułę, która jest postaci $(x \vee y \vee z) \wedge \neg(x \wedge y \wedge z)$
A układ logiczny wygląda następująco:



8 Uprość poniższy układ logiczny używając praw de Morgana. Zapisz formułę algebry Boole'a odpowiadającą uproszczonemu układowi.



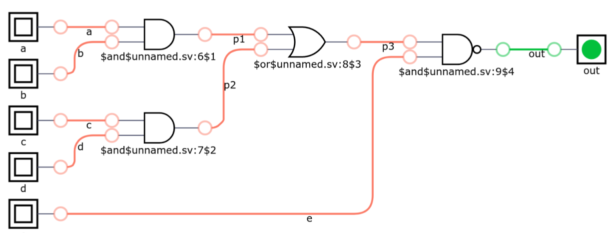
Powyższy układ logiczny można przedstawić w następujący sposób:

$$\neg(\neg(\neg(a \wedge b) \wedge \neg(c \wedge d)) \wedge e)$$

w zależności od zrozumienia treści, możemy przekształcić albo "zrzucając" negację do zmiennych, lub ograniczając liczbę negacji.

$$\neg(\neg(\neg(a \wedge b) \wedge \neg(c \wedge d)) \wedge e) =$$
$$\neg(((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \wedge e)$$

powyższe przekształcenie ogranicza do minimum liczbę bramek logicznych:



Całość można uprościć jeszcze bardziej, ale układ logiczny będzie bardziej zaawansowany:

$$\neg(\neg(\neg(a \wedge b) \wedge \neg(c \wedge d)) \wedge e) =$$
$$\neg(a \wedge b) \wedge \neg(c \wedge d) \vee \neg e =$$
$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg d) \vee \neg e$$

9 **Narysuj układ logiczny, który zawiera cykl, ale pomimo tego reprezentuje pewną funkcję logiczną. Narysuj układ bez cyklu reprezentujący tę samą funkcję.**