

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра компьютерных технологий и систем

Орлов Дмитрий Викторович

Отчет о научно-исследовательской практике

Определение координат и параметров движения
движущегося объекта по данным пассивных средств
наблюдения

Направление 01.03.02
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
Кандидат физ.-мат. наук,
Коровкин М. В.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1	Аннотация	1
2	Введение	1
3	Обзор литературы	2
3.1	Геометрические методы	2
3.2	Статистические методы, использующие априорную информа- цию	2
3.3	Статистические методы, не использующие априорную инфор- мацию	3
3.4	Дополнение	3
4	Методы и алгоритмы решения задачи определения коорди- нат и параметров движения	3
4.1	Модель	3
4.2	Критерий максимального правдоподобия	4
4.3	Алгоритм Левенберга–Марквардта	5
4.4	Метод N пеленгов	6
5	Моделирование	6
5.1	Сравнение алгоритмов N пеленгов и ЛМ	6
6	Выводы	9

1 Аннотация

Исследовалась возможность применения метода Левенберга–Маквардта к задаче определения траектории движущегося объекта с постоянной скоростью по результатам измерений направления на объект, полученных от пассивных средств наблюдения. В отчете приведены результаты определения параметров с помощью методов максимального правдоподобия и N пеленгов. Были смоделированы физические ситуации и получены сводные таблицы сравнения алгоритмов с помощью метода Монте-Карло.

2 Введение

При определении координат и параметров движения объекта (далее КПДО) используется массив данных пассивных средств наблюдения. Часто в качестве пассивного средства выступает гидроакустический комплекс (ГАК), то есть результатом измерений выступает пеленг объекта. Пеленг – это угол между севером и объектом. ГАК может быть переведен в активный режим работы для определения расстояния, но при этом теряется скрытность наблюдателя.

Результат определения КПДО зависит от точности исходных данных и от «хорошего» маневра наблюдателя. Вместе с тем, результат зависит от количества данных, то есть от времени наблюдения. Хочется отметить, что могут возникать аномалии (выбросы) в данных датчиков. Многие алгоритмы чувствительны к ним, особенно когда в качестве невязки выступает квадрат отклонения. Выбросы могут в дальнейшем приводить к ошибочной интерпретации исходных данных.

В данной работе рассмотрен классический подход к определению КПДО. Предполагается, что объект совершает равномерное и прямолинейное движение, часто это соответствует реальности. В качестве вероятностного распределения ошибок измерений принимается гауссовский шум. Для оптимизации предложено использовать алгоритм Левенберга–Марквардта (ЛМ).

3 Обзор литературы

3.1 Геометрические методы

Геометрические методы определения КПДО используют аналитические выражения, описывающие геометрические построения, позволяющие, при наличии априорной информации о некоторых параметрах движения объекта, найти недостающие параметры по «опорному» и «рабочему» измерениям. Расчет неизвестного параметра производится операторами с помощью графических построений на специальных планшетах или в корабельных информационно-управляющих системах с использованием аналитических выражений. [1]

3.2 Статистические методы, использующие априорную информацию

Здесь подразумевается байесовский подход к статистическому оцениванию. Байесовские методы предполагают, что оцениваемые параметры являются случайной величиной, и им соответствует своя функция распределения. Здесь идет речь о рекурсивных методах, которые пригодны для работы в реальном времени. Самый простой и эффективный рекурсивный фильтр – фильтр Калмана, он рассчитывает апостериорную плотность вероятности вектора состояния на каждый момент времени, используя априорную. Проблема в том, что обычный фильтр Калмана линейный, а функция измерения пеленгов нелинейная. Одним из способов обойти это ограничение является использование расширенного фильтра Калмана и различных модификаций к нему [3].

3.3 Статистические методы, не использующие априорную информацию

В этом случае предполагается только маневр наблюдателя для обеспечения единственности решения. Обработка данных происходит не в реальном времени, а «offline» с использованием большого количества данных. Под маневром подразумевается изменение курса или скорости, или одновременно скорости и курса. Наиболее часто встречающийся – маневр курсом. Ключевой фактор обеспечения высокой точности определения КПДО является выбор рационального маневра. В статье [6] рассмотрен выбор маневра при помощи оптимального управления для обеспечения высокой наблюдаемости. Часто выбор маневра осуществляется командиром на основе собственного опыта и тактических факторов. Основная статья в этом разделе [2]. В ней рассмотрен классический подход к оцениванию параметров – метод максимального правдоподобия. В этой работе сосредоточимся на одном из таких методов.

3.4 Дополнение

Можно строить и другие модели при решении проблем определения КПДО. Марковские цепи были рассмотрены в [4] и [5]. В первой статье использовалась скрытая марковская модель и рассмотрен случай маневрирующего объекта. Был найден оптимальный маневр наблюдателя путем управления частично наблюдаемым марковским процессом. Во второй статье построен марковский процесс принятия решений при нахождении наблюдателя в опасной среде. Проблема изначально включала в себя нелинейную фильтрацию, уклонение от угроз и оптимальную стратегию маневра.

4 Методы и алгоритмы решения задачи определения координат и параметров движения

4.1 Модель

Траектория наблюдателя состоит из нескольких отрезков (галсов) равномерного и прямолинейного движения, а объект движется равномерно прямолинейно в течение всего времени:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t\end{aligned}\tag{1}$$

Пусть (\tilde{x}, \tilde{y}) – положение наблюдателя, а (x, y) – положение объекта. Обозначим за $\theta = (x_0, y_0, v_x, v_y)$ – начальные параметры объекта, а $f(\theta)$ за функцию измерения пеленга

$$f_t(\theta) = \arctan\left(\frac{\theta_2 + \theta_4 t - \tilde{y}}{\theta_1 + \theta_3 t - \tilde{x}}\right) = \arctan\left(\frac{y_0 + v_y t - \tilde{y}}{x_0 + v_x t - \tilde{x}}\right)\tag{2}$$

На практике не существует идеальных датчиков, при измерениях присутствует шум (ошибка измерения), таким образом наши измерения выбираются из распределения

$$X_t(\theta) \sim f_t(\theta) + \mathcal{N}(0, \sigma^2) = \mathcal{N}(f_t(\theta), \sigma^2) \quad (3)$$

Аддитивная случайная величина – гауссовский шум, то есть это нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Имеется в виду, что для любого момента времени t случайная величина X подчиняется нормальному распределению со средним $f_t(\theta)$ и дисперсией σ^2 . Таким образом мы определили гауссовский процесс.

Заметим, что последнее преобразование не совсем корректно, потому что $f \in S^1$. То есть, образ функции f лежит в многообразии S^1 (в окружности), а нормальная случайная величина лежит в \mathbb{R}^1 . Далее мы будем считать, что все вычисления проводятся в одной карте многообразия.

4.2 Критерий максимального правдоподобия

Будем рассматривать конечный промежуток времени $t = (t_1, \dots, t_n)$, X_1, \dots, X_n – измерения в соответствующее время. Выпишем функцию правдоподобия для (3)

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^n p(X_1, \dots, X_n | \theta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_k - f_{t_k}(\theta))^2} \quad (4)$$

Критерий заключается в максимизации функции (4) по θ

$$\theta_{ML} = \operatorname{argmax}_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \operatorname{argmin}_{\theta} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\sigma^2} (X_k - f_{t_k}(\theta))^2 + \ln \sigma^2 \right]$$

Приходим к

$$\theta_{ML} = \operatorname{argmin}_{\theta} \sum_{k=1}^n (X_k - f_{t_k}(\theta))^2 = F(\theta) \quad (5)$$

Минимизацию (5) можно свести к решению системы нелинейных уравнений $\nabla F(\theta) = 0$. Далее мы будем считать, что $F(\theta)$ имеет один глобальный минимум, совпадающий с локальным. Поэтому система уравнений гарантировано будет иметь одно решение, это подтверждается экспериментами. Известно, что система неразрешима аналитически [7], таким образом может быть решена только с помощью численных методов. Существует много методов оптимизации (5). Так как функция (5) нелинейная, для лучшего решения задачи требуются «нелинейные» методы.

θ_{ML} обладает целым рядом полезных свойств. Оценка максимального

правдоподобия асимптотически нормальная и эффективная [8]. Асимптотическая нормальность значит, что распределение оценки с ростом n стремится к нормальному. Асимптотическая эффективность значит, что она достигает асимптотически нижнюю границу Крамера-Рао.

Заметим, что $F(\theta)/\sigma \sim \chi^2(n-4)$. Можно сказать, что мы минимизируем дисперсию отклонения. Таким образом мы получаем критерий для определения «успешности» определения КПДО. Можем проверять с помощью критерия хи-квадрат гипотезу H_0 , что $F(\theta)$ из распределения хи-квадрат. Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ минимум функции $\min_{\theta} F(\theta)/n \rightarrow \sigma^2$.

4.3 Алгоритм Левенберга–Марквардта

Алгоритм ЛМ является промежуточным методом между градиентным спуском и методом Ньютона-Рафсона. Он показывает лучший результат в сравнении с обычными градиентными для такого типа задач [9], [10]. Введем обозначения: $X = (X_1, \dots, X_n)$, $f(\theta) = f_{t_k}(\theta)$, $J(\theta) = \nabla f(\theta)$. Опишем алгоритм:

1. Задаём начальное приближение θ , параметры $\lambda, \lambda_{up}, \lambda_{down}, F_{tol}$
2. Вычисляем $F(\theta)$ и $J(\theta)$, полагаем $H = J^T J$
3. $A = H + \lambda \text{diag}(H)$
4. A положительно определена? Если нет, тогда $\lambda = \lambda \times \lambda_{up} \rightarrow 3$
5. Решаем СЛАУ $A\Delta\theta = J^T(X - f(\theta))$
6. Вычисляем $\theta_{new} = \theta + \Delta\theta$, $\Delta F = F(\theta) - F(\theta_{new})$
7. $\Delta F \geq 0$? Нет, тогда $\lambda = \lambda \times \lambda_{up} \rightarrow 3$
8. $\theta = \theta_{new}$, $\lambda = \lambda \times \lambda_{down}$
9. Проверка условия выхода: $\Delta F < F_{tol}$? Нет $\rightarrow 2$

$\lambda, \lambda_{up}, \lambda_{down}$ – являются гиперпараметрами метода. Описанный алгоритм отличается от общепринятого, здесь к матрице Гессе H прибавляется не λI , а $\lambda \text{diag}(H)$ (модификация Марквардта), таким образом учитывается информация о кривизне. Вдобавок меняется λ . Шаг 3 объясняет схожесть алгоритма ЛМ, градиентного спуска и метода Ньютона-Рафсона. При $\lambda \rightarrow 0$ шаг происходит в направлении метода Ньютона-Рафсона, при $\lambda \rightarrow \infty$ – в направлении градиентного спуска. Часто получается так, что чем меньше λ , тем больше шаг. Шаг 4 позволяет двигаться так, чтобы на каждой итерации $F(\theta)$ уменьшалась. Потому что существует такой множитель λ , что в направлении антиградиента функция уменьшается. Мы уменьшаем λ на шаге 8 для того, чтобы в окрестности минимума преимущество отдавалось методу Ньютона-Рафсона, так как у него лучше скорость сходимости, когда функция – квадратичная. Желательно, чтобы все значения f были

возле 0, где поведение \arctan близко к линейному. В нашем алгоритме оптимизации в каком-то роде используется градиент. Производная арктангенса $\frac{d}{dx} \arctan(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \infty$, поэтому алгоритм будет сходиться медленно из-за малого шага. Вместе с тем существует проблема не только в малости шага, но и потери значимости

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

$$x = g^{-1}(10^{-15}) = \sqrt{10^{15} - 1} \approx 10^{7.5}$$

10^{-15} – приблизительная точность python. Получим, что при $x : |x| > 10^{7.5}$ теряется точность градиента.

4.4 Метод N пеленгов

Считаем, что начальные координаты объекта заданы в полярных координатах. Получаем, что мы можем оценить угол ϕ_0 по измерению первого пеленга. Обозначим оставшиеся параметры за вектор $x = (r_0, v_x, v_y)$, где r_0 – дистанция до объекта. Теперь выпишем уравнения, описывающие эволюцию системы за время Δt_i в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} r_0 \cos \phi_0 + v_x \Delta t_i &= \Delta \tilde{x}_i + r_0 \cos \phi_0 \\ r_0 \sin \phi_0 + v_y \Delta t_i &= \Delta \tilde{y}_i + r_0 \sin \phi_0 \end{aligned}$$

$\Delta \tilde{x}_i, \Delta \tilde{y}_i$ – проекции перемещения наблюдателя за Δt_i . Умножая первое уравнение на $\sin \phi_0$, а второе – на $\cos \phi_0$ и вычитая из одного другое, а затем, переобозначив множители, получим линейную систему уравнений относительно x : $Hx = b$, где

$$\begin{aligned} H_{i1} &= \sin(\phi_i - \phi_0) \\ H_{i2} &= \sin \phi_i \Delta t \\ H_{i3} &= -\cos \phi_i \Delta t \\ b_i &= \Delta \tilde{x}_i \sin \phi_i - \Delta \tilde{y}_i \cos \phi_i \end{aligned}$$

Таким образом мы получили классическую линейную регрессионную модель, которая может быть решена многими способами, например, с помощью нормальных уравнений. Главный недостаток метода N пеленгов состоит в том, что он страдает из-за неустранимой погрешности начального пеленга. Вследствие этого оценки получаются сильно смещенными.

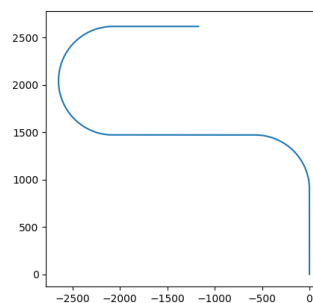
5 Моделирование

5.1 Сравнение алгоритмов N пеленгов и ЛМ

В этом разделе мы рассмотрим результаты моделирования и определения КПДО с помощью python. Был рассмотрен алгоритм Левенберга – Марк-

вардта и метод N пеленгов, в их работе участвует массив данных, полученный за все время измерений. Траектория движения наблюдателя состоит из трех прямолинейных участков (галсов). Объект все время наблюдения движется с постоянной скоростью. Переход с галса на галс (изменение курса наблюдателя) моделируется циркуляцией с постоянной угловой скоростью $\omega = 0.5$ градус/с по кратчайшему направлению. При моделировании во всех случаях (для всех имитируемых объектов наблюдения) принималась трехгалсовая траектория движения наблюдателя со скоростью 5 м/с общей продолжительностью 20 мин со следующей схемой галсов:

- Наблюдатель движется по курсу 0° 180с
- Наблюдатель перешёл на курс 270° за 180с
- Наблюдатель движется по курсу 270° 300с
- Наблюдатель перешёл на курс 90° за 360с
- Наблюдатель движется по курсу 90° 180с

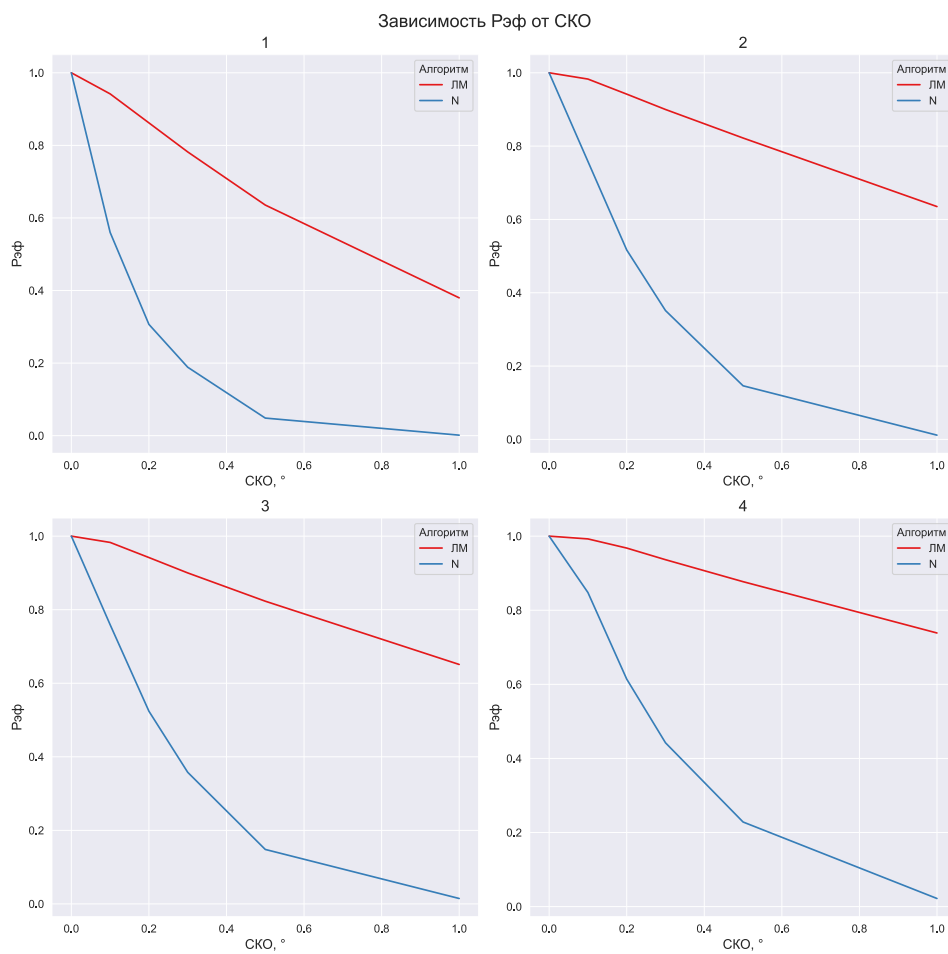


Априорные значения КПДО во всех случаях: $P_0=0^\circ$, $D_0=25$ км, $K=90^\circ$, $V=10$ м/с. При моделировании рассматривалась следующая область возможных значений КПДО на момент начала наблюдений: $P_0=0^\circ$, $D_0=5...50$ км, $K=0...180^\circ$, $V=5...15$ м/с. Интервал поступления пеленгов принят равным 2 с. В ходе моделирования используются четыре диапазона предельно допустимых отклонений:

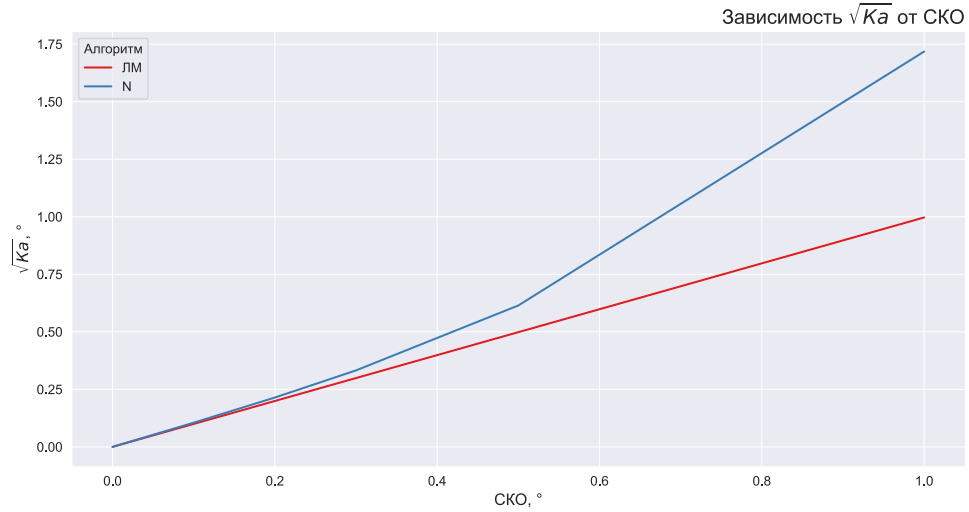
- Рэф1: 0.5° - по пеленгу, 5%D - дистанции, 5° - курсу, 5%V - скорости
- Рэф2: 1.0° - по пеленгу, 10%D - дистанции, 10° - курсу, 10%V - скорости
- Рэф3: 1.0° - по пеленгу, 15%D - дистанции, 10° - курсу, 10%V - скорости
- Рэф4: 1.0° - по пеленгу, 15%D - дистанции, 10° - курсу, 15%V - скорости

Алгоритм срабатывает, если полученные значения КПДО попадают в область Рэф. В таблице приведены данные, полученные в процессе обработки результатов определения КПДО для 10000 объектов с помощью метода Монте-Карло.

Алгоритм	σ	Рэф1	Рэф2	Рэф3	Рэф4	\sqrt{Ka}	Nf	Iter
ЛМ	0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.00	10	9
N	0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.00	nan	nan
ЛМ	0.1	0.942	0.983	0.983	0.992	0.10	10	9
N	0.1	0.560	0.758	0.759	0.848	0.11	nan	nan
ЛМ	0.2	0.862	0.942	0.942	0.968	0.20	10	9
N	0.2	0.307	0.517	0.524	0.614	0.21	nan	nan
ЛМ	0.3	0.782	0.900	0.900	0.936	0.30	10	9
N	0.3	0.189	0.351	0.358	0.442	0.33	nan	nan
ЛМ	0.5	0.636	0.822	0.823	0.877	0.50	10	9
N	0.5	0.049	0.146	0.148	0.228	0.61	nan	nan
ЛМ	1.0	0.380	0.635	0.651	0.739	1.00	10	9
N	1.0	0.001	0.012	0.015	0.022	1.72	nan	nan



Ka – критерий «близости пеленгов» $Ka = \frac{F(\theta_{ML})}{n}$, переведенный в квадратные градусы, Nf – число вычислений F , $Iter$ – число итераций. Как было показано ранее, чем ближе значение \sqrt{Ka} к σ , тем лучше алгоритм работал. Из таблицы и графиков мы видим, что алгоритм ЛМ показывает лучшие результаты в сравнении с методом N пеленгов. Рэф для ЛМ линейно уменьшается с ростом среднеквадратичного отклонения.



Алгоритм ЛМ в среднем всегда достигает минимума. \sqrt{Ka} алгоритма ЛМ растет линейно относительно σ , что является наилучшим результатом.

6 Выводы

Таким образом, мы видим, что метод максимального правдоподобия вместе с алгоритмом ЛМ применим при определении координат объекта по данным пассивных средств. В сравнении с методом N пеленгов алгоритм ЛМ всегда показывает лучшие результаты, его минус только в том, что он работает медленнее. Отметим, что для работы алгоритма требуется начальное приближение, хотя, как показывают результаты моделирования при удачном маневре, оно не обязательно должно быть «близко» к истинному значению, приближение влияет только на количество итераций. Без удачного маневра очень вероятно, что существуют кривые и поверхности, на которых достигается минимум, поэтому большой интерес представляет дальнейшее изучение выбора оптимального маневра и особенности минимизируемой функции.

Список литературы

- [1] А. Б. Король, "Определение КПДО на планшете Ш-26Б"
- [2] S. Nardone, A. Lindgren and Kai Gong, "Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis"
- [3] V. J. Aidala, "Kalman Filter Behavior in Bearings-Only Tracking Applications"
- [4] O. Tremois and J. P. Le Cadre, "Maneuvering target motion analysis using hidden Markov model"
- [5] Renke He , Shuxin Chen, Hao Wu , Zhuowei Liu, and Jianhua Chen, "Optimal Maneuver Strategy of Observer for Bearing-Only Tracking in Threat Environment"
- [6] Y. Oshman and P. Davidson, "Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization"
- [7] K. Dogancay, "Least squares algorithms for constant acceleration target tracking"
- [8] C.R. Rao, "Linear Statistical Inference and Its Applications"
- [9] D. W. Marquardt, "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters"
- [10] R. Poisel, "Electronic Warfare Target Location Methods"