Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisiplinaria de Ingenierias campus Zacatecas

Probabilidad Y Estadistica

Unidad 2 Tarea 2

Olando Odiseo Belmonte Flores

Maestro:
Rosendo Vasquez Bañuelos

October 3, 2019

2 Suponga que la temperatura de reaccion X (en °C) en cierto proceso químico tiene una distribución uniforme con $A = -5$ y $B = 5$

a) calule $P(X < 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & si\ x \in (A, B) \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-5}^{x} \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \int_{-5}^{x} dt = \left. \frac{t}{10} \right|_{-5}^{x} = \frac{x+5}{10}$$

$$P(X < 0) = \frac{0+5}{10} - \frac{(-5)+5}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

b) Calcule $P(-2.5 < X < 2.5)$

$$P(-2.5 < X < 2.5) = \frac{2.5+5}{10} - \frac{(-2.5)+5}{10} = \frac{7.5-2.5}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

c) Calcule $P(-2 \leq X \leq 3)$

$$P(-2 \leq X \leq 3) = \frac{3+5}{10} - \frac{(-2)+5}{10} = \frac{8-3}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

d) Para que k satisfaga $-5 < k < k+4 < 5$, calcule $P(k < X < k+4)$

$$P(k < X < k+4) = \frac{(k+4+5)-(k+5)}{10} = \frac{k+4+5-k-5}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

4 Sea X el esfuerzo vibratorio($lb/pulg^2$) en el aspa de una turbina de viento a una velocidad del viento particular en un túnel aerodinámico. El árticulo *"Blade Fatigue Life Assessment with Applications to VAWTS" (J. Solar Energy Enrg. 1982: 107-111)* propone la distribución Rayleigh, con función de densidad de probabilidad

$$f(x;0) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \cdot e^{-x^2/2\theta^2}, & x > 0 \\ \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

como modelo de la distribucion de X.

a) Verifique que $f(x;\theta)$ es una funcion de dencidad de probabilidad legitima

$$\int_0^\infty \frac{x}{\theta^2} e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}} dx = \frac{1}{\theta^2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t x e^u du \quad Sea\ u = \frac{-x^2}{2\theta^2} \quad du = \frac{-x}{\theta^2} dx$$
$$xdx = -\theta^2 du$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t -\theta^2 e^u du = \frac{-\theta^2}{\theta^2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^u du = - \lim_{t\to\infty} \left. e^u \right|_0^t = - \lim_{t\to\infty} \left. e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}} \right|_0^t$$

$$= - \lim_{t\to\infty} \left[e^{\frac{-t^2}{2\theta^2}} - e^{\frac{-0^2}{2\theta^2}} \right] = -(-1) = 1$$

b) Suponga que $\theta = 100$ (un valor sugerido por una gráfica en el artículo). ¿Cuál es la probabilidad de que X es cuando mucho de 200?¿Menos de 200?¿Por lo menos de 200?

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\theta^2} e^{\frac{-t^2}{2\theta^2}} dt = 1 + e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}$$

$$P(x \leq 200; \theta = 100) = 1 - e^{\frac{-(200^2)}{2(100^2)}} = 1 + e^{\frac{-40000}{20000}} = 1 - e^{-2} = 0.8646$$

$$P(x < 200; \theta = 100) = 1 - e^{\frac{-(200^2)}{2(100^2)}} = 1 + e^{\frac{-40000}{20000}} = 1 - e^{-2} = 0.8646$$

$$P(x \geq 200; \theta = 100) = \left(1 - e^{\frac{-\infty}{20000}}\right) - \left(1 + e^{\frac{-40000}{20000}}\right) = 1 + e^{-2} - 1 = 0.1353$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que X esté entre 100 y 200 (de nuevo con $\theta = 100$)?

$$P(100 < X < 200; \theta = 100) = \left(1 - e^{\frac{-(200^2)}{2(100^2)}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-100^2}{2(100^2)}}\right) = e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-40000}{20000}} + 1 - 1 = e^{\frac{-1}{2}} - e^{-2} = 0.4711$$

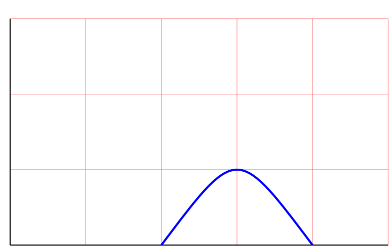
d) De una expresión para $P(X \leq x)$

$$\int_0^x \frac{t}{\theta^2} e^{\frac{-t}{2\theta^2}} dt = \frac{1}{\theta^2} \int_0^x t e^{\frac{-t}{2\theta^2}} dt \quad Sea\ u = \frac{-t^2}{2\theta^2} \quad du = \frac{-t}{\theta^2} dt \quad tdt = -\theta^2 du$$

$$\frac{-\theta^2}{\theta^2} \int_0^x e^u du? - \int_0^x e^u du = -e^u \Big|_0^x = -e^{\frac{-t}{2\theta^2}} \Big|_0^x = -e^{\frac{-x}{2\theta^2}} - (-e^{\frac{-0^2}{2\theta^2}}) = 1 - e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}$$

6 El peso de lectura real de una pastilla de etéreo ajustado a 3 gramos en un tocadiscos particular puede ser considerado como na variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \begin{cases} k[1-(x-3)^2], & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \textit{de lo contrario} \end{cases}$

a) Trace la graic de $f(x)$



b) Determine ek valor de k

$$\int_2^4 k[1-(x-3)^2]dx = k\int_2^4 dx - k\int_2^4 (x-3)^2 dx = k\left[\int_2^4 dx - \int_2^4 x^2 dx + 6\int_2^4 x dx - 9\int_2^4 dx\right] =$$

$$k\left[-\int_2^4 x^2 dx + 6\int_2^4 x dx - 8\int_2^4 dx\right] = k\left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right]\Bigg|_2^4 = k\left[\frac{-(4^3-2^3)}{3} + 3(4^2-2^2) - 8(4-2)\right] =$$

$$k\left[\frac{-56}{3} + 36 - 16\right] = \frac{4}{3}k = 1$$

$k = \dfrac{3}{4}$

c) ¿Cuál es la probabiliad de que el peso real de lectura sea mayor que el peso prescrito?

$$P(3 < X < 4) = \frac{3}{4}\int_3^4 [1-(x-3)^2]dx = \frac{3}{4}\left[-\int_3^4 x^2dx + 6\int_3^4 xdx - 8\int_3^4 dx\right] = \frac{3}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right]\Bigg|_3^4$$
$$\frac{3}{4}\left[\frac{-(4^3-3^3)}{3} + 3(4^2-3^2) - 8(4-3)\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso real de lectura esté dentro de 0.25 gramos el peso prescrito?

$$P(2.25 < X < 3) = \frac{3}{4}\int_{2.25}^3 [1-(x-3)^2]dx = \frac{3}{4}\left[-\int_{2.25}^3 x^2dx + 6\int_{2.25}^3 xdx - 8\int_{2.25}^3 dx\right] =$$
$$\frac{3}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right]\Bigg|_{2.25}^3 \frac{3}{4}\left[\frac{-(3^3-2.5^3)}{3} + 3(3^2-2.5^2) - 8(3-2.5)\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{607}{1000}$$
$$= \frac{1821}{4000} = 0.455$$

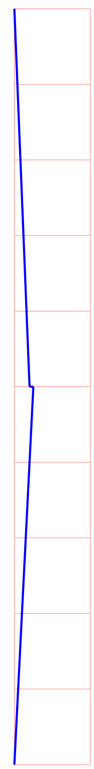
e) ¿Cuál es la probabilidad d eque el peso real difiera del peso prescrito por más de 0.5 gramos?

$$P(3.5 < X < 4) = \frac{3}{4}\int_{3.5}^4 [1-(x-3)^2]dx = \frac{3}{4}\left[-\int_{3.5}^4 x^2dx + 6\int_{3.5}^4 xdx - 8\int_{3.5}^4 dx\right] =$$
$$\frac{3}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right]\Bigg|_{3.5}^4 \frac{3}{4}\left[\frac{-(4^3-3.5^3)}{3} + 3(4^2-3.5^2) - 8(4-3.5)\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{26}{125} = \frac{78}{500}$$
$$= \frac{39}{250} = 0.156$$

8 Para ir al trabajo primero tengo que tomar un camión cerca de mi casa y luego tomar un segundo camión. Si el tiempo de espera (en minutos) en cada parada tiene una distribución uniforme con $A = 0$ y $B = 5$, entonces se puede demostrar que el tiempo de espea total Y tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}y, & 0 \le y < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}y, & 5 \le y \le 10 \\ 0, & y < 0 \text{ o } y > 10 \end{cases}$$

a) Trace a gráfica de la función dedensdad de probabilidad de Y



b) Verifique que $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$

$$\int_0^5 \frac{1}{25}ydy + \int_5^{10}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{25}y\right]dy = \frac{1}{25}\int_0^5 ydy - \frac{1}{25}\int_5^{10} ydy + \frac{2}{5}\int_5^{10} dy = \left.\frac{y^2}{50}\right|_0^5 - \left.\frac{y^2}{50}\right|_5^{10} + \left.\frac{2}{5}y\right|_5^{10}$$

$$= \frac{25}{50} - \frac{100-25}{50} + \frac{20-10}{5} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{10}{5} = \frac{-2}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$$

c) ¿Cuál es la probabulidad de que el tiempo de espera total sea cuando mucho de tres minutos?

$$P(y \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{25}ydy = \frac{1}{25}\int_0^3 ydy = \left.\frac{y^2}{25}\right|_0^3 = \frac{9}{50} = 0.18$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total sea de cuando mucho de ocho minutos?

$$P(y \leq 8) = \int_0^5 \frac{1}{25}ydy + \int_5^8 \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{25}y\right]dy = \frac{1}{25}\int_0^5 ydy - \frac{1}{25}\int_5^8 ydy + \frac{2}{5}\int_5^8 dy$$

$$= \left.\frac{y^2}{50}\right|_0^5 - \left.\frac{y^2}{50}\right|_5^8 + \left.\frac{2}{5}y\right|_5^8 = \frac{25}{50} - \frac{39}{50} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} - \frac{14}{50} = \frac{23}{25} = 0.92$$

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total sea de cuadno esté entre tres y ocho minutos?

$$P(3 \leq y \leq 8) = \int_3^5 \frac{1}{25}ydy + \int_5^8 \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{25}y\right]dy = \frac{1}{25}\int_3^5 ydy - \frac{1}{25}\int_5^8 ydy + \frac{2}{5}\int_5^8 dy$$

$$= \left.\frac{y^2}{50}\right|_3^5 - \left.\frac{y^2}{50}\right|_5^8 + \left.\frac{2}{5}y\right|_5^8 = \frac{16}{50} - \frac{39}{50} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} - \frac{23}{50} = \frac{37}{50} = 0.74$$

f) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de esperatotal sea de menos de 2 minutos o de mas de 6 minutos?

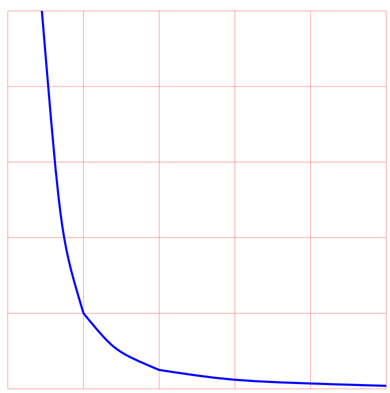
$$P(y<2, y>6)=\int_0^2 \frac{1}{25}ydy+\int_6^{10}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{25}y\right]dy=\frac{1}{25}\int_0^2 ydy-\frac{1}{25}\int_6^{10} ydy+\frac{2}{5}\int_6^{10} dy$$

$$=\left.\frac{y^2}{50}\right|_0^2-\left.\frac{y^2}{50}\right|_6^{10}+\left.\frac{2}{5}y\right|_6^{10}=\frac{4}{50}-\frac{64}{50}+\frac{8}{5}=\frac{8}{5}-\frac{60}{50}=\frac{2}{5}=0.4$$

10 Una familia de funciones de densidad de probabilidad que ha sido utilizada para aproximar la disribución del ingreso, el tamaño de la población de una ciudad y el tamaño de firmas es de la familia Pareto. La familia tine dos parametros ky θ, ambos >0 y la funcion de densidad de probabilidad es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\theta^k}{x^{k+1}}, & x>\theta\\[2ex] 0, & x<\theta\end{cases}$$

a) trace la grafica de $f(x;k,\theta)$



b) Verifique que el área total bajo la grafica es igual a 1

$$\int_\theta^\infty \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}dx=k\theta^k\lim_{t\to\infty}\int_\theta^t \frac{1}{x^{k+1}}dx=k\theta^k\lim_{t\to\infty}\left.\frac{1}{-kx^k}\right|_\theta^t=k\theta^k\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{-kt^k}-\frac{1}{-k\theta^k}\right]=\frac{-k\theta^k}{-k\theta^k}=1$$

c) Si la variable aleatoria X tiene una funcion de densidad de probabilidad $f(x;k,\theta)$, con cualquier $b>\theta$, obtenga una exprecion para $P(X\leq b)$

$$P(X\leq b)=\int_\theta^b \frac{k\theta^k}{x^k+1}dx=k\theta^k\int_\theta^b \frac{1}{x^{k+1}}dx=\left.\frac{k\theta^k}{-kx^k}\right|_\theta^b=\left.\frac{\theta^k}{-x^k}\right|_\theta^b=\frac{\theta^k}{-b^k}-\frac{\theta^k}{-\theta^k}=1+\frac{\theta^k}{-b^k}$$

d) Con $\theta<a<b$, obtenga una expresión para la probabilidad $P(a\leq X\leq b)$

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b \frac{k\theta^k}{x^k+1}dx=k\theta^k\int_a^b \frac{1}{x^{k+1}}dx=\left.\frac{k\theta^k}{-kx^k}\right|_a^b=\left.\frac{\theta^k}{-x^k}\right|_a^b=\frac{\theta^k}{-b^k}-\frac{\theta^k}{-a^k}=\frac{\theta^k}{a^k}+\frac{\theta^k}{-b^k},\ \theta<a<b$$