Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________	A.A.: 2021/2022
Nome: ____________________	Docente: Gianluca Orlando
Matricola: ____________________	Appello: giugno 2022
Corso di studi: ____________________	Data: 20/06/2022

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si pensa che la massa di vapore utilizzato al mese da un impianto chimico sia correlato alla temperatura ambiente media di quel mese. L'utilizzo e la temperatura dell'ultimo anno sono riportati nella tabella seguente:

mese	temperatura ($°C$)	vapore ($kg/1000$)
gen.	-6	84.25
feb.	-4	97.26
mar.	0	130.62
apr.	8	192.67
mag.	10	206.15
giu.	15	244.45
lug.	20	288.88
ago.	23	306.14
set.	16	254.88
ott.	10	205.41
nov.	5	167.77
dic.	-1	124.25

1. Rappresentare i dati in un diagramma a dispersione.
2. Calcolare e rappresentare la retta di regressione lineare.
3. Calcolare il coefficiente di correlazione.

Esercizio 2. (7 punti) Una cioccolateria produce due varietà di cioccolatini (fondenti oppure al latte). Vende confezioni assortite composte da 10 cioccolatini. I cioccolatini possono essere indipendentemente fondenti o al latte e, in media, ci sono 6 cioccolatini al latte in una confezione.

1. Compri una confezione di cioccolatini. Qual è la probabilità di trovare almeno 8 cioccolatini fondenti?

2. Compri e ricompri confezioni di 10 cioccolatini (ogni acquisto è indipendente dal successivo) finché non hai una confezione con un ugual numero di cioccolatini fondenti e al latte. In media, quante confezioni devi acquistare prima di avere una confezione con con un ugual numero di cioccolatini fondenti e al latte?

3. Nella stessa situazione del punto 2., qual è la probabilità di dover acquistare più di 10 confezioni per avere una confezione con con un ugual numero di cioccolatini fondenti e al latte?

Esercizio 3. (7 punti) Sia (X_1, X_2) il vettore aleatorio con la seguente funzione di probabilità congiunta:

X_2 \ X_1	-1	0	1
-1	a	$2a$	b
1	b	a	$2a$

1. Calcolare la varianza di X_2.

2. Determinare a e b tali che $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

3. Per i valori a e b trovati nel punto 2., le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti?

Esercizio 4. (8 punti) Il contenuto di catrame (in mg) in sigarette prodotte da un'azienda si può supporre distribuito con legge normale. Dalle misurazione di 15 campioni di sigarette si ottengono i seguenti risultati:

$$6.9 \quad 7.4 \quad 7.3 \quad 6.6 \quad 7.0 \quad 6.7 \quad 7.1 \quad 6.2 \quad 7.2 \quad 6.6 \quad 6.9 \quad 6.5 \quad 7.2 \quad 7.7 \quad 7.5\,.$$

1. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la media del contenuto di catrame calcolata sui dati.

2. La realizzazione di un intervallo di confidenza al 97% sugli stessi dati (calcolata con lo stesso metodo del punto 1.) sarebbe più più o meno grande dell'intervallo trovato nel punto 1.? Motivare la risposta (N.B.: non è richiesto calcolare esplicitamente l'intervallo!)

Quesito teorico 1. (2 punti) Dimostrare che la covarianza di due variabili aleatorie indipendenti discrete (con valore atteso finito) è zero.

Quesito teorico 2. (4 punti) Siano $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$ indipendenti. Dimostrare che $X + Y$ è distribuita con legge Gamma. Quali sono i parametri?