

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: _____
Nome: _____
Matricola: _____
Corso di studi: _____

A.A.: 2020/2021
Docente: Gianluca Orlando
Appello: VII Appello
Data: 27/09/2021

È richiesto di risolvere *al massimo* 3 dei 5 esercizi in un tempo massimo di 90 minuti.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è di 10 punti.

Si può scegliere di rispondere a uno dei due quesiti teorici facoltativi. Il punteggio massimo per i quesiti teorici è di 6 punti.

Indicare esplicitamente sulla traccia gli esercizi e il quesito teorico da valutare.

Esercizio 1. Due candidati alle elezioni, T e C , competono per la presidenza di un piccolo paese di 5 abitanti (T e C inclusi). Da un sondaggio risulta che:

- T (elettore 1) voterà per sé stesso;
- C (elettore 2) voterà per sé stesso;
- l'elettore 3 voterà per C ;
- gli elettori 4 e 5 discutono di politica e sono ancora indecisi: si sa che ciascuno di loro voterà per T con il 40% di probabilità. Ma il voto dell'elettore 4 influenza il voto dell'elettore 5: se l'elettore 4 decide di votare per C , l'elettore 5 farà lo stesso con $\frac{2}{3}$ di probabilità.

Rispondere ai seguenti quesiti, descrivendo lo spazio campione.

1. Qual è la probabilità che C vinca le elezioni?
2. Qual è la probabilità che C ottenga esattamente il 40% dei voti degli elettori nel paese?
3. Sono finite le elezioni. Supponiamo di sapere che l'elettore 5 abbia votato per T , ma di non conoscere ancora il voto dell'elettore 4. Con che probabilità l'elettore 4 ha votato per C ?

Esercizio 2. In una certa regione, i terremoti si susseguono secondo una distribuzione di Poisson con una media di 5 terremoti all'anno.

1. Qual è la probabilità che si verifichi almeno 1 terremoto nella prima metà del 2022?
2. Assumendo che si sia verificato almeno 1 terremoto nella prima metà del 2022, qual è la probabilità che si verifichino esattamente 3 terremoti nei primi 9 mesi del 2022?

Esercizio 3. Sia (X, Y) una variabile aleatoria continua bidimensionale con la seguente densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} C & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini C in modo che f sia una densità di probabilità.
2. Si calcoli la funzione di densità di probabilità marginale g di X .
3. Si calcoli la funzione di densità di probabilità marginale h di Y .
4. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Esercizio 4. Un produttore afferma che la carica media di un certo tipo di batterie è maggiore o uguale a 240 ampere-ora. Un campione di 18 batterie di questo tipo che è stato analizzato ha fornito i valori seguenti:

237	242	244	262	225	218	242	248	243
234	236	228	232	230	254	220	232	240

Assumendo che la distribuzione della carica sia normale, si può accettare l'affermazione del produttore con un livello di significatività del 5%?

Esercizio 5. I valori che seguono sono le percentuali di ceneri residue per dei campioni di carbone trovati in uno stesso sito.

9.2	14.1	9.8	12.4	16.0	12.6	22.7	18.9	21.0	14.5	20.4	16.9
-----	------	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

1. Determinare i quartili del campione.
2. Individuare dati anomali o sospetti.
3. Tracciare un box plot.

Quesito teorico 1 (facoltativo). Sia X_1, \dots, X_n un campione estratto da una v.a. X normale con media μ e varianza σ^2 , dove i parametri (μ, σ^2) sono da stimare. Sia (x_1, \dots, x_n) una realizzazione del campione.

1. Determinare la funzione di verosimiglianza in funzione di (μ, σ^2) .
2. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di (μ, σ^2) .
3. Lo stimatore ottenuto nel punto precedente è uno stimatore corretto o distorto?

Quesito teorico 2 (facoltativo). Siano X e Y due variabili aleatorie.

1. Dimostrare che il loro coefficiente di correlazione ρ è un numero compreso tra -1 e 1 .
2. Cosa si può dire di ρ se $Y = \alpha X + \beta$? Motivare la risposta.