Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: novembre 2023
Matricola: ______________________ Data: 06/11/2023

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) È stato misurato il tempo di attesa (in giorni) per un particolare intervento chirurgico su un campione di individui. La distribuzione dei tempi di attesa è riassunta nella seguente tabella:

intervalli (giorni)	frequenza assoluta
$[0, 60)$	1
$[60, 90)$	34
$[90, 100)$	16
$[100, 110)$	18
$[110, 130)$	19
$[130, 200)$	12

1. Rappresentare un istogramma delle densità di frequenze assolute.

2. Determinare la classe modale.

3. Calcolare un'approssimazione della media e della deviazione standard dei dati.

4. Calcolare un'approssimazione della mediana dei dati.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri un vettore aleatorio discreto (X_1, X_2) con $R(X_1) = \{0, 1\}$ e $R(X_2) = \{0, 1\}$. Si assuma che $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

1. Dimostrare che X_1 e X_2 sono indipendenti. (N.B.: Il punteggio massimo si ottiene se non si utilizzano le informazioni di sotto.)

Si assuma ulteriormente che: $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{4}$ e $\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}|\{X_1 = 1\}) = \frac{1}{3}$ Quesiti:

2. Calcolare $\mathbb{P}(\{X_1 \cdot X_2 > 0\})$.

3. Calcolare $\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = 1\})$.

4. Alice e Bob giocano al seguente gioco in cui si susseguono in *lanci*: Alice inizia e *lancia* generando un numero con X_1; Bob segue e *lancia* generando un numero con X_2. Alice e Bob continuano a *lanciare* alternandosi, finché i risultati degli ultimi due *lanci* non sono diversi. In tal caso vince chi dei due ha ottenuto il risultato più grande negli ultimi due lanci. Che probabilità di vincere ha Alice?

Esercizio 3. (8 punti) Si assuma che il ritardo di un singolo treno di un'azienda di trasporti sia distribuito con legge esponenziale. Sono gestiti due tipi di treni: il 20% dei treni sono treni veloci; il resto sono treni regionali. Si assumano i seguenti fatti:

- il ritardo medio di un treno veloce è 5 minuti;
- la probabilità che un treno regionale ritardi meno di $\ln(3^{10})$ minuti è uguale a $\frac{2}{3}$.

Rispondere ai seguenti quesiti:

1. Calcolare la probabilità che il ritardo di un treno veloce sia compreso tra 3 e 7 minuti.
2. Calcolare la deviazione standard del ritardo di un treno regionale.
3. Si consideri un treno qualunque. Qual è la probabilità che ritardi più di 8 minuti?
4. (Difficile) Sei su un treno veloce e devi prendere una coincidenza con un treno regionale. La tabella di marcia prevede che il treno veloce e il treno regionale arrivino alla stazione entrambi alle 14:00. Considerando i possibili ritardi, con che probabilità perderai la coincidenza? Supponi che i ritardi siano indipendenti e che il tempo per passare da un treno all'altro sia trascurabile.

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda farmaceutica produce tranquillanti. Si assuma che la distribuzione della durata della loro efficacia sia normale. Un laboratorio di un ospedale ha sperimentato il farmaco su un campione casuale di 6 pazienti. Il periodo di efficacia del tranquillante per ogni paziente (in ore) è stato il seguente:

$$2.7 \quad 2.8 \quad 3.0 \quad 2.3 \quad 2.3 \quad 2.2\,.$$

1. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la media.
2. Supponiamo che l'esperimento di sopra venga ripetuto 5 volte (in ogni esperimento vengono misurati i dati di 6 pazienti). Dopo ogni campionamento, viene calcolato un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la media come sopra. Qual è la probabilità che la media vera sia effettivamente negli intervalli calcolati almeno 4 volte?

Quesito teorico 1. (4 punti) Siano $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ indipendenti. Che legge ha $X + Y$? Dimostrare il risultato.

Quesito teorico 2. (2 punti) Sia $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Calcolare $\mathbb{E}(X)$.