Tracce e soluzioni degli esami di

PROBABILITÀ E STATISTICA [3231]

Corso di Studi: Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale
Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Appelli a.a. 2023–2024

Gianluca Orlando

Indice

1 Tracce

Di seguito le tracce dell'a.a. 2023-2043.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________ Appello: giugno 2024 - turno 1
Matricola: ____________________ Data: 17/06/2024

È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Questa è la traccia n. 120. Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito.

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Una studentessa di Probabilità e Statistica vuole determinare se esiste una relazione tra le ore di studio giornaliere nella preparazione dell'esame e il voto all'esame. Per farlo, ha intervistato alcuni studenti e ha ottenuto i seguenti dati:

ore di studio	0	1	2	3	4	5	6
voto	0	12	11	25	26	30	30

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.
2. Calcolare la retta di regressione lineare (derivando le formule) e disegnarla.
3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione R^2.

Esercizio 2. (8 punti) Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con legge congiunta descritta dalla seguente tabella:

X \ Y	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	a
1	$\frac{1}{4}$	0	b
2	c	d	0

Si assuma che:

$$\bullet\ \mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{8}\,, \quad \bullet\ \mathbb{P}(\{Y = 1\}|\{X = 2\}) = 1\,, \quad \bullet\ \mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2}\,.$$

Dopo aver determinato i valori di a, b, c, d, rispondere ai seguenti quesiti:

1. Calcolare la covarianza tra X e Y e stabilire se X e Y sono indipendenti.
2. Calcolare $\mathrm{Var}(X + Y)$.
3. Si supponga di estrarre 14 realizzazioni indipendenti della variabile aleatoria Y. Calcolare la probabilità che l'evento $\{Y = 0\}$ si realizzi almeno 3 volte (3 incluso).

4. Si estraggono tante realizzazioni indipendenti della variabile aleatoria Y. In media, qual è la prima volta in cui si realizza l'evento $\{Y = 0\}$?

Esercizio 3. (7 punti) Una catena di fast food analizza il tempo di servizio dei suoi clienti. I clienti possono ordinare due tipi di menu: il menu A e il menu B. Si assuma che

- Il tempo di servizio per il menu A sia distribuito con legge esponenziale con media 2 minuti.
- Il tempo di servizio per il menu B sia distribuito con legge esponenziale con deviazione standard 3 minuti.
- Il 20% dei clienti ordina il menu A e il 80% il menu B.

Si risponda alle seguenti domande:

1. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu A. Qual è la probabilità che il suo tempo di servizio sia inferiore a 3 minuti?
2. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu B. Qual è la probabilità che il servizio avvenga esattamente al minuto 1?
3. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu B. Ha aspettato 2 minuti e non è ancora stato servito. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che debba aspettare in tutto almeno 5 minuti?
4. Un cliente ha fatto un ordine e ha aspettato un tempo compreso tra 1 e 4 minuti. Qual è la probabilità che abbia ordinato il menu A?

Esercizio 4. (7 punti) Una fabbrica di cereali vuole stimare la media del peso delle confezioni prodotte. Un controllo su un campione di alcune confezioni ha fornito i seguenti pesi in grammi:

500 506 499 507 502 500 496 501

Si supponga che il peso sia distribuito normalmente.

1. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la media del peso delle confezioni. (N.B.: derivare le formule)
2. Un intervallo di confidenza bilaterale al 91% calcolato sugli stessi dati è più grande o più piccolo di quello calcolato al punto 1? Perché?

Quesito teorico 1. (4 punti) Spiegare in che senso la legge di Poisson approssima la legge binomiale enunciando e dimostrando un teorema.

Quesito teorico 2. (2 punti) Calcolare media e varianza di $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: giugno 2024 - turno 2
Matricola: ______________________	Data: 17/06/2024

È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Questa è la traccia n. 120. Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito.

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si studia il tempo di attesa per il servizio clienti di una banca. I dati vengono raggruppati in classi nella seguente tabella:

intervalli (minuti)	frequenze assolute
$[0, 2)$	19
$[2, 5)$	18
$[5, 7)$	5
$[7, 11)$	16
$[11, 18)$	12
$[18, 100)$	10

1. Rappresentare un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale (o le classi modali, se più di una).
3. Calcolare un'approssimazione della media e della varianza dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del 55-esimo percentile.

Esercizio 2. (7 punti) Il numero di errori nelle soluzioni degli esercizi scritte dal docente di Probabilità e Statistica segue una distribuzione di Poisson con una media di 2 errori per soluzione. Si assuma che i numeri di errori in soluzioni di esercizi distinti siano indipendenti.

1. Qual è la probabilità che in una soluzione ci siano almeno 4 errori (inclusi)?
2. Qual è la deviazione standard del numero di errori in una soluzione?
3. Qual è la probabilità che in 5 soluzioni ci siano almeno 4 errori (inclusi)?
4. Consideriamo 5 soluzioni. Abbiamo letto le prime 3 soluzioni e abbiamo individuato almeno 4 errori (inclusi). Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che nelle 5 soluzioni ci siano in tutto 6 errori?

5. Uno studente legge le soluzioni degli esercizi in sequenza e si blocca quando trova la prima soluzione con almeno 1 errore (incluso). Qual è la probabilità che lo studente si blocchi entro la lettura della terza soluzione (inclusa)?

Esercizio 3. (8 punti) In un centro di assistenza, il tempo necessario per completare un backup di un computer segue una distribuzione esponenziale con un tempo medio di 2 ore.

1. Qual è la probabilità che il backup di un computer duri meno di 1 ora?
2. Qual è la varianza del tempo necessario per completare il backup di un computer?
3. Al centro di assistenza arrivano 16 computer per i quali occorre un backup. Qual è la probabilità che per almeno 3 computer (inclusi) il backup duri più di 3 ore? Si assuma che i tempi di backup dei computer siano indipendenti.
4. Al centro di assistenza arrivano 2 computer per i quali occorre un backup. Il backup del secondo computer inizia non appena il backup del primo computer è completato. Qual è la media del tempo necessario per completare il backup totale dei 2 computer? E la varianza? Si assuma che i tempi di backup dei computer siano indipendenti.
5. Nella situazione del punto 4., qual è la probabilità che il backup totale dei 2 computer sia inferiore a 7 ore?

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda sostiene che la durata media giornaliera degli smartphone che produce è di 12 ore. Un'indagine condotta su alcuni smartphone è volta a mostrare che la durata è in realtà inferiore. Vengono rilevate le seguenti durate (in ore):

11.2	15.2	12.1	10.8	8.6	11.7	13.6	12.7	9.5	11.0
18.2	11.9	14.2	12.5	10.0	11.3	11.4	9.3	10.3	9.5
10.5	13.6	10.8	9.6	13.3	8.9	13.8	12.7	8.9	15.5
11.7	13.2	9.6	10.4	12.2	11.9	9.1	12.2	12.6	9.6

La media calcolata sui dati risulta essere 11.63 ore. È noto che la deviazione standard della popolazione è di 4 ore.

1. È possibile sostenere con significatività 1% che la durata media degli smartphone è in realtà inferiore a 12 ore? (N.B.: derivare le formule)
2. Calcolare il p-value del test.

Quesito teorico 1. (4 punti) Sia $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Che legge ha Z^2? Motivare la risposta. Siano $Z_1, \ldots, Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ indipendenti. Che legge ha $\sum_{i=1}^n Z_i^2$? Motivare la risposta.

Quesito teorico 2. (2 punti) Calcolare media e varianza di $X \sim \mathrm{B}(n,p)$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________ Appello: luglio 2024 - turno 1
Matricola: ____________________ Data: 15/07/2024

È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Questa è la traccia n. 1. Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito.

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si studia il prezzo di affitto di appartamenti a Bari tramite annunci pubblicati su un servizio online. Vengono rilevati i seguenti dati (in euro):

750 700 550 650 900 780 1100 450 530 1650

1. Determinare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Tracciare un box plot.
4. Calcolare il 35-esimo percentile (esclusivo).

Esercizio 2. (7 punti) In una linea di produzione, il 5% dei prodotti è difettoso. Si assuma che prodotti diversi siano indipendenti tra loro.

Nei punti 1., 2., 3. vengono esaminati 10 prodotti.

1. Qual è la probabilità che (strettamente) più di 3 prodotti siano difettosi?
2. Qual è la probabilità che esattamente 3 prodotti siano difettosi?
3. Quali sono la media e la varianza del numero di prodotti difettosi?

Nel punto 4. vengono esaminati 100 prodotti.

4. Considerando che il numero di prodotti è elevato e la probabilità di difetto è piccola, qual è un'approssimazione adeguata della probabilità che almeno 4 (4 inclusi) prodotti siano difettosi? Motivare la risposta.

Nel punto 5. vengono esaminati prodotti in sequenza fino a trovare il primo difettoso.

5. Qual è la probabilità che il primo prodotto difettoso sia il quarto esaminato?

Esercizio 3. (8 punti) Alice e Bob generano due numeri casualmente. Alice genera un numero con una variabile casuale esponenziale con media 2, mentre Bob genera un numero in base al risultato ottenuto da Alice:

- Se il numero generato da Alice è minore di 1, Bob genera un numero con una variabile aleatoria uniforme $\mathrm{U}(0, 1)$.
- Se il numero generato da Alice è maggiore di 1, Bob genera un numero con una variabile aleatoria uniforme $\mathrm{U}(1, 2)$.

Si risponda alle seguenti domande:

1. Sapendo che Alice ha ottenuto un numero minore di 1, qual è la media del numero generato da Bob? E la deviazione standard?
2. Qual è la probabilità che il numero generato da Bob sia maggiore di $\frac{1}{2}$?
3. Bob ha generato un numero minore di $\frac{3}{2}$. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che il numero generato da Alice sia minore di 1?
4. Qual è la probabilità che il minimo tra il numero generato da Alice e quello generato da Bob sia minore di 1?

Esercizio 4. (7 punti) Una squadra di calcio lo scorso anno aveva una media di gol per partita pari a 2.5. Nel campionato di quest'anno, la squadra ha segnato un numero di gol per partita come descritto dai dati raccolti nella seguente tabella:

gol per partita	frequenza assoluta
0	5
1	9
2	13
3	7
4	4

Si assuma che la deviazione standard del numero di gol sia 2.

1. Si può stabilire con significatività del 5% che la media di gol per partita è diversa da quella dell'anno scorso? (N.B.: derivare le formule)
2. Stabilire in quali dei seguenti intervalli è collocato il p-value dei dati: $[0, 1\%)$, $[1\%, 2\%)$, $[2\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, $[10\%, 20\%)$, $[20\%, 100\%]$.

Quesito teorico 1. (4 punti) Siano $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ indipendenti. Che distribuzione ha $X_1 + \cdots + X_n$? Enunciare e dimostrare il risultato.

Quesito teorico 2. (2 punti) Dimostrare il legame tra il coefficiente di determinazione R^2 e il coefficiente di correlazione lineare per un campione di dati bivariato.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: luglio 2024 - turno 2
Matricola: ______________________	Data: 15/07/2024

È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Questa è la traccia n. 1. Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito.

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) In una partita di pallacanestro viene misurata la distanza dei tiri effettuati da un giocatore. Vengono misurati i seguenti dati (in metri):

$$2.3 \quad 8.6 \quad 3.1 \quad 5.2 \quad 1.1 \quad 5.6 \quad 6.3 \quad 1.1 \quad 7.5 \quad 6.8\,.$$

1. Determinare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Tracciare un box plot.
4. Calcolare il 65-esimo percentile (esclusivo).

Esercizio 2. (8 punti) Una compagnia aerea studia il numero di bagagli smarriti durante i voli intercontinentali su cui opera. Si osserva che il numero di bagagli smarriti in un mese è distribuito con legge di Poisson con una media di 4 bagagli smarriti al mese. Si assuma che i bagagli smarriti in mesi diversi siano indipendenti tra loro.

1. Qual è la probabilità che in un mese vengano smarriti almeno 3 bagagli (3 inclusi)?
2. Qual è la varianza del numero di bagagli smarriti in un mese?
3. Qual è la probabilità che in un anno vengano smarriti esattamente 50 bagagli?
4. L'azienda nota che a gennaio e febbraio sono stati smarriti in tutto 6 bagagli. Sapendo che si è verificato questo evento, qual è la probabilità che da gennaio ad aprile vengano smarriti in tutto al più 10 bagagli (10 inclusi)?
5. Applicare il Teorema del Limite Centrale per stimare la probabilità che in 3 anni vengano smarriti più di 150 bagagli.

Esercizio 3. (7 punti) Un call center studia la durata delle telefonate effettuate. Si osserva che:

- Se un cliente non abbandona la chiamata, la durata della telefonata è distribuita con legge uniforme nell'intervallo $[5, 10]$ minuti.
- Se un cliente abbandona la chiamata, la durata della telefonata è distribuita con legge uniforme nell'intervallo $[2, 5]$ minuti.
- La probabilità che un cliente abbandoni la chiamata è 80%.

Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Si consideri un cliente che abbandona la chiamata. Qual è la probabilità che la durata della telefonata sia inferiore a 3 minuti?
2. Si consideri un cliente che abbandona la chiamata. Dopo 3 minuti non è ancora terminata la chiamata. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che l'intera chiamata duri almeno 4 minuti? C'è un teorema che si può applicare per calcolare questa probabilità?
3. Calcolare la media e la varianza delle durate delle telefonate per un cliente che non abbandona la chiamata.
4. Si consideri un cliente qualunque. Calcolare la probabilità che la durata della telefonata sia superiore a 3 minuti.

Esercizio 4. (7 punti) Il prezzo medio degli immobili venduti in una città nel 2023 era 2100€/mq. Vengono esaminati i prezzi di alcuni immobili nel 2024, osservando i seguenti dati (in €/mq):

2111 2410 1600 3900 1988 1875 2250

Si assuma che il prezzo a metro quadro degli immobili sia distribuito con legge normale.

1. È possibile affermare con significatività del 5% che il prezzo medio degli immobili nel 2024 è aumentato rispetto al 2023?
2. Stabilire in quali dei seguenti intervalli è collocato il p-value dei dati: $[0, 0.5\%]$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, $[10\%, 100\%]$.

Quesito teorico 1. (4 punti) Siano X e Y due variabili aleatorie continue indipendenti con densità di probabilità f_X e f_Y, rispettivamente. Che densità ha $X + Y$? Dimostrare il risultato.

Quesito teorico 2. (2 punti) Spiegare il fenomeno della scimmia instancabile di Borel.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: settembre 2024 - I
Matricola: ______________________ Data: 03/09/2024

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Vengono raccolti i risultati (in metri) nel salto in alto di un campione olimpionico ottenuti negli ultimi anni:

2.32 2.35 2.37 2.31 2.33 2.30 2.29 2.36 2.37 2.22

1. Calcolare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Disegnare il box-plot dei dati.
4. Calcolare il 35-esimo percentile (esclusivo).

Esercizio 2. (8 punti) Un piccolo bar in una località turistica pugliese vende pasticciotti. Il bar apre alle 08:00 e sforna ogni ora 4 pasticciotti. Si vuole capire se questa produzione è sufficiente a soddisfare la richiesta dei clienti: il numero di pasticciotti ordinati in un'ora è distribuito con una legge di Poisson con media 3. Si assuma che i numeri di ordini in ore diverse siano indipendenti. (Attenzione: nelle domande seguenti tenere conto del fatto che la richiesta in una fascia oraria può essere maggiore dei pasticciotti disponibili, lasciando alcuni ordini insoddisfatti!)

1. Mostrare che la probabilità che dalle 08:00 alle 09:00 vengano ordinati esattamente 2 pasticciotti è uguale alla probabilità che vengano ordinati 3 pasticciotti.
2. Qual è la probabilità che la richiesta di pasticciotti dalle 08:00 alle 09:00 sia soddisfatta?
3. Calcolare la probabilità che il numero di pasticciotti invenduti dalle 08:00 alle 09:00 sia uguale a k per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
4. Se nella fascia oraria dalle 08:00 alle 09:00 restano dei pasticciotti invenduti, questi vengono offerti nella fascia oraria successiva dalle 09:00–10:00, in aggiunta a quelli sfornati alle 09:00. Qual è la probabilità che la richiesta di pasticciotti della fascia oraria 09:00–10:00 sia soddisfatta? (Suggerimento: Sfruttare i risultati del punto 3.)

Esercizio 3. (8 punti) Un chiosco in uno stabilimento balneare vende gelati. Il tempo che impiega un cliente a scegliere il gelato è distribuito con legge uniforme tra 10 secondi e 60 secondi.

1. Qual è la probabilità che un cliente scelga il gelato in meno di 30 secondi?
2. Quali sono la media e la deviazione standard del tempo di scelta del gelato?
3. Arrivano due persone in coppia al chiosco. Iniziano a scegliere insieme il gelato indipendentemente. Il tempo in cui la loro ordinazione termina è il massimo tra i due tempi di scelta. Qual è la probabilità che l'ordinazione della coppia termini in più di 30 secondi?
4. Arrivano 10 clienti che scelgono i gelati indipendentemente. Qual è la probabilità che (strettamente) più di 4 di essi impieghino più di 30 secondi per scegliere il gelato?
5. In un momento della giornata vengono serviti 40 clienti indipendenti in sequenza (un cliente inizia a scegliere il gelato solo dopo che il cliente precedente ha terminato). Utilizzare il Teorema del Limite Centrale per stimare la probabilità che in totale il chiosco sia impegnato a servire i 40 clienti per più di 25 minuti.

Esercizio 4. (7 punti) Si vuole stimare la variabilità della temperatura in una località estiva di montagna. Vengono misurate le seguenti temperature (in gradi Celsius) in momenti diversi di una giornata:

$$23 \quad 27 \quad 30 \quad 31 \quad 26 \quad 23 \quad 22 \quad 21$$

Per risolvere l'esercizio, si assuma che la temperatura abbia distribuzione normale.

1. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la varianza della temperatura. (N.B.: derivare le formule)
2. Un intervallo di confidenza al 93% sarebbe più grande o più piccolo di quello calcolato nel punto precendente?
3. Le misurazioni vengono ripetute per vari giorni consecutivi e per ogni giorno viene calcolato l'intervallo di confidenza al 90% come nel punto 1. Qual è la probabilità che la prima volta in cui la varianza appartiene all'intervallo di confidenza sia il quinto giorno?

Quesito teorico 1. (3 punti) Siano $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ indipendenti. Calcolare la densità di $X + Y$.

Quesito teorico 2. (2 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema di Bayes e spiegarne il significato.

2 Soluzioni

Di seguito le soluzioni relative alle tracce di sopra.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: giugno 2024 - turno 1
Matricola: ______________________ Data: 16/04/2024

Viene usata come riferimento la traccia n. 120.

Esercizio 1. Una studentessa di Probabilità e Statistica vuole determinare se esiste una relazione tra le ore di studio giornaliere nella preparazione dell'esame e il voto all'esame. Per farlo, ha intervistato alcuni studenti e ha ottenuto i seguenti dati:

ore di studio	0	1	2	3	4	5	6
voto	0	12	11	25	26	30	30

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.

2. Calcolare la retta di regressione lineare (derivando le formule) e disegnarla.

3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione R^2.

Soluzione. 1. Segue lo scatterplot (con la retta di regressione lineare):

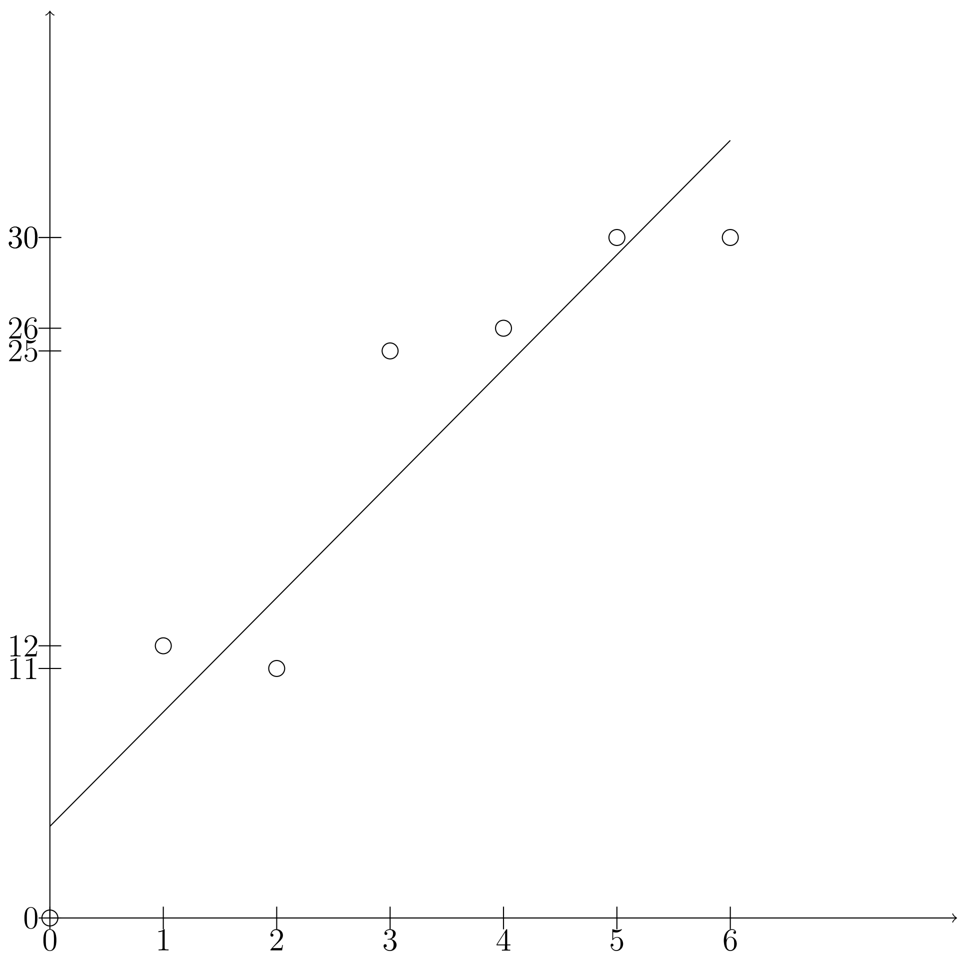


Figura 1: Scatterplot e retta di regressione lineare.

2. Denotiamo con $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n = 6$, i dati del campione. Cerchiamo la retta di equazione

$$y = ax + b$$

che meglio approssima i dati, utilizzando il metodo dei minimi quadrati. Vogliamo minimizzare l'errore

$$e(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \,.$$

Imponiamo che il gradiente rispetto ad (a, b) sia nullo, ovvero,

$$0 = \partial_a e(a, b) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) \,,$$

$$0 = \partial_b e(a, b) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)$$

Dalla seconda equazione segue che

$$nb = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i) \implies b = \overline{y} - a\overline{x} \,.$$

Sostituendo nella prima,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - ax_i^2 - x_i\overline{y} + a\overline{x}x_i) = 0$$

$$\implies a\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i - n\overline{x}\,\overline{y}$$

$$\implies a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}\,.$$

Completiamo la tabella con i valori necessari a calcolare a e b:

								somma
x_i	0	1	2	3	4	5	6	21
y_i	0	12	11	25	26	30	30	134
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	91
y_i^2	0	144	121	625	676	900	900	3366
x_iy_i	0	12	22	75	104	150	180	543

Pertanto $\overline{x} = 21/7 = 3$ e $\overline{y} = 134/7 = 19.14$. Segue che

$$a = \frac{543 - 7\cdot 3\cdot 19.14}{91 - 7\cdot 3^2} = \frac{141}{28} \simeq 5.04\,,$$

$$b = 19.14 - 5.04\cdot 3 = 4.02\,,$$

ovvero, la retta di regressione lineare ha equazione

$$y = 5.04x + 4.02\,.$$

3. Per calcolare il coefficiente di correlazione lineare usiamo la formula

$$\rho_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2}} = \frac{543 - 7\cdot 3\cdot 19.14}{\sqrt{91 - 7\cdot 3^2}\sqrt{3366 - 7\cdot 19.14^2}}$$
$$= 0.9411\,.$$

Il coefficiente di determinazione è $R^2 = \rho_{x,y}^2 = 0.8857$.

Esercizio 2. (8 punti) Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con legge congiunta descritta dalla seguente tabella:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	a
1	$\frac{1}{4}$	0	b
2	c	d	0

Si assuma che:

$$\bullet\ \mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{8}\,, \quad \bullet\ \mathbb{P}(\{Y = 1\}|\{X = 2\}) = 1\,, \quad \bullet\ \mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2}\,.$$

Dopo aver determinato i valori di a, b, c, d, rispondere ai seguenti quesiti:

1. Calcolare la covarianza tra X e Y e stabilire se X e Y sono indipendenti.

2. Calcolare $\mathrm{Var}(X+Y)$.

3. Si supponga di estrarre 14 realizzazioni indipendenti della variabile aleatoria Y. Calcolare la probabilità che l'evento $\{Y=0\}$ si realizzi almeno 3 volte (3 incluso).

4. Si estraggono tante realizzazioni indipendenti della variabile aleatoria Y. In media, qual è la prima volta in cui si realizza l'evento $\{Y=0\}$?

Soluzione. Per determinare i valori di a, b, c, d usiamo le informazioni fornite. Poiché le probabilità devono sommare a 1, otteniamo che

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+b+c+d=1 \implies a+b+c+d=\frac{1}{2}\,.$$

Dalla condizione $\mathbb{P}(\{X=2\})=1/8$ otteniamo che

$$c+d=\frac{1}{8}\,.$$

Dalla condizione $\mathbb{P}(\{Y=1\}|\{X=2\})=1$ otteniamo che

$$\frac{\mathbb{P}(\{Y=1\}\cap\{X=2\})}{\mathbb{P}(\{X=2\})}=1 \implies \frac{d}{1/8}=1 \implies d=\frac{1}{8}\,.$$

Dalla condizione $\mathbb{E}(XY)=1/2$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\mathbb{E}(XY)=\sum_{x,y}xy\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})\\ &=0\cdot0\cdot0+1\cdot0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot0\cdot c+0\cdot1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot1\cdot0+2\cdot1\cdot d+0\cdot2\cdot a+1\cdot2\cdot b+2\cdot2\cdot0\\ &=2d+2b \implies d+b=\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases}a+b+c+d=\frac{1}{2}\\ c+d=\frac{1}{8}\\ d=\frac{1}{8}\\ d+b=\frac{1}{4}\end{cases}$$

ottenendo $a=1/4$, $b=1/8$, $c=0$, $d=1/8$.

La tabella completa è la seguente:

X \ Y	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	0

1. Per calcolare la covarianza utilizziamo la formula

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

Calcoliamo

$$\mathbb{E}(X)=\sum_x x\mathbb{P}(\{X=x\}=0\cdot\left(0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{8}\right)+2\cdot\left(0+\frac{1}{8}+0\right)=\frac{5}{8}\,,$$

e

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_y y\mathbb{P}(\{Y = y\} = 0 \cdot \left(0 + \frac{1}{4} + 0\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0\right) = \frac{9}{8}.$$

Segue che

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{8} = -\frac{13}{64}.$$

Poiché $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$, X e Y non sono indipendenti.

2. Calcoliamo $\mathrm{Var}(X + Y)$ utilizzando la formula

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Utilizzando le formule $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ e $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, occorre calcolare solo

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2\mathbb{P}(\{X = x\} = 0^2 \cdot \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 1^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8}\right) + 2^2 \cdot \left(0 + \frac{1}{8} + 0\right) = \frac{7}{8},$$

e

$$E(Y^2) = \sum_y y^2\mathbb{P}(\{Y = y\} = 0^2 \cdot \left(0 + \frac{1}{4} + 0\right) + 1^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0\right) = \frac{15}{8}.$$

Quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{31}{64},$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{15}{8} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{39}{64}.$$

Concludiamo che

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \frac{31}{64} + \frac{39}{64} + 2 \cdot \left(-\frac{13}{64}\right) = \frac{44}{64}.$$

3. Per calcolare la probabilità che l'evento $\{Y = 0\}$ si realizzi almeno 4 volte (4 incluso) in 14 estrazioni, possiamo utilizzare la distribuzione binomiale. La probabilità di successo è

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{1}{4}.$$

Consideriamo una variabile aleatoria

$$Z = \text{“numero di successi in 14 prove”} \sim \mathrm{B}(14, 1/4).$$

Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Z \geq 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{Z < 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z = 0\}) - \mathbb{P}(\{Z = 1\}) - \mathbb{P}(\{Z = 2\}) - \mathbb{P}(\{Z = 3\}) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{14} - 14 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} - \binom{14}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{12} = 71.89\%\end{aligned}$$

4. Consideriamo la variabile aleatoria

$$W = \text{“prima volta nella successione di estrazioni in cui si verifica l'evento } \{Y = 0\}\text{”} \sim \mathrm{Geo}(1/4),$$

poiché

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{1}{4}.$$

Vogliamo calcolare

$$\mathbb{E}(W) = \frac{1}{1/4} = 4\,.$$

Esercizio 3. (7 punti) Una catena di fast food analizza il tempo di servizio dei suoi clienti. I clienti possono ordinare due tipi di menu: il menu A e il menu B. Si assuma che

- Il tempo di servizio per il menu A sia distribuito con legge esponenziale con media 2 minuti.
- Il tempo di servizio per il menu B sia distribuito con legge esponenziale con deviazione standard 3 minuti.
- Il 20% dei clienti ordina il menu A e il 80% il menu B.

Si risponda alle seguenti domande:

1. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu A. Qual è la probabilità che il suo tempo di servizio sia inferiore a 3 minuti?
2. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu B. Qual è la probabilità che il servizio avvenga esattamente al minuto 1?
3. Si consideri un cliente che ha ordinato il menu B. Ha aspettato 2 minuti e non è ancora stato servito. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che debba aspettare in tutto almeno 5 minuti?
4. Un cliente ha fatto un ordine e ha aspettato un tempo compreso tra 1 e 4 minuti. Qual è la probabilità che abbia ordinato il menu A?

Soluzione. Consideriamo le variabili aleatorie

$$X_A = \text{“tempo di servizio per il menu A”} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$X_B = \text{“tempo di servizio per il menu B”} \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$X = \text{“tempo di servizio (senza specificare il menu)”}\,.$$

Abbiamo che

$$2 = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{2}\,,$$

$$3 = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{1}{\mu} \implies \mu = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi $X_A \sim \text{Exp}(1/2)$ e $X_B \sim \text{Exp}(1/3)$.

Consideriamo infine la variabile aleatoria

$$Y = \text{“1 se ordinato il menu A, 0 altrimenti”} \sim \text{Be}(0.2)\,.$$

1. Calcoliamo

$$\mathbb{P}(\{X_A < 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_A \geq 3\}) = 1 - e^{-3/2} = 77.69\%\,.$$

2. Poiché X_B è una variabile continua con densità, la probabilità che il servizio avvenga esattamente al minuto 1 è nulla:

$$\mathbb{P}(\{X_B = 1\}) = 0\,.$$

3. La probabilità che il cliente debba aspettare in tutto almeno 5 minuti, sapendo che ha già aspettato 2 minuti, si può calcolare utilizzando la proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale:

$$\mathbb{P}(\{X_B \geq 5\}|\{X_B \geq 2\}) = \mathbb{P}(\{X_B \geq 3\}) = e^{-3/3} = 36.79\% \,.$$

4. La probabilità che un cliente abbia ordinato il menu A, sapendo che ha aspettato un tempo compreso tra 1 e 4 minuti, si può calcolare utilizzando la formula di Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y=1\}|\{1 \leq X \leq 4\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\} \cap \{Y=1\})}{\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\}|\{Y=1\})\mathbb{P}(\{Y=1\})}{\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{1 \leq X_A \leq 4\})\mathbb{P}(\{Y=1\})}{\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\})} \,.\end{aligned}$$

Calcoliamo i tre termini:

$$\mathbb{P}(\{1 \leq X_A \leq 4\}) = \int_1^4 \frac{1}{2} e^{-x/2} \, \mathrm{d}x = e^{-1/2} - e^{-2} = 47.12\% \,.$$

$$\mathbb{P}(\{Y=1\}) = 20\% \,.$$

Utilizzando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\}) &= \mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\} \cap \{Y=1\}) + \mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\} \cap \{Y=0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{1 \leq X_A \leq 4\})\mathbb{P}(\{Y=1\}) + \mathbb{P}(\{1 \leq X_B \leq 4\})\mathbb{P}(\{Y=0\}) \\ &= (e^{-1/2} - e^{-2})20\% + (e^{-1/3} - e^{-4/3})80\% = 45.66\% \,.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\mathbb{P}(\{Y=1\}|\{1 \leq X \leq 4\}) = \frac{47.12\% \cdot 20\%}{45.66\%} = 20.64\% \,.$$

Esercizio 4.(7 punti) Una fabbrica di cereali vuole stimare la media del peso delle confezioni prodotte. Un controllo su un campione di alcune confezioni ha fornito i seguenti pesi in grammi:

500 506 499 507 502 500 496 501

Si supponga che il peso sia distribuito normalmente.

1. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la media del peso delle confezioni. (N.B.: derivare le formule)

2. Un intervallo di confidenza bilaterale al 91% calcolato sugli stessi dati è più grande o più piccolo di quello calcolato al punto 1? Perché?

Soluzione. 1. La popolazione è descritta da una variabile aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. I parametri μ e σ^2 non sono noti. Dalla popolazione viene estratto un campione $X_1, \ldots, X_n$ di $n = 8$ osservazioni. Dalla definizione di IC si ha che

$$\beta = \mathbb{P}(\{U_n \leq \mu \leq V_n\}) \,.$$

Per stimare μ sfrutteremo lo stimatore media campionaria $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Per stimare σ^2 sfrutteremo lo stimatore varianza campionaria $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. Poiché $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sono indipendenti, $T_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. Allora

$$
\begin{aligned}
\beta = \mathbb{P}(\{U_n \leq \mu \leq V_n\}) &= \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}_n - U_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}} \leq T_{n-1} \leq \frac{\overline{X}_n - U_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} < \frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) - \mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} > \frac{\overline{X}_n - U_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) .
\end{aligned}
$$

Segue che

$$
\mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} < \frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} > \frac{\overline{X}_n - U_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = 1 - \beta = \alpha .
$$

Decidiamo di equipartire α:

$$
\mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} < \frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} < \frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \frac{\alpha}{2} .
$$

Definiamo $t_{n-1,\alpha/2}$ come il punto tale che

$$
\mathbb{P}(\{T_{n-1} \geq t_{n-1,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} .
$$

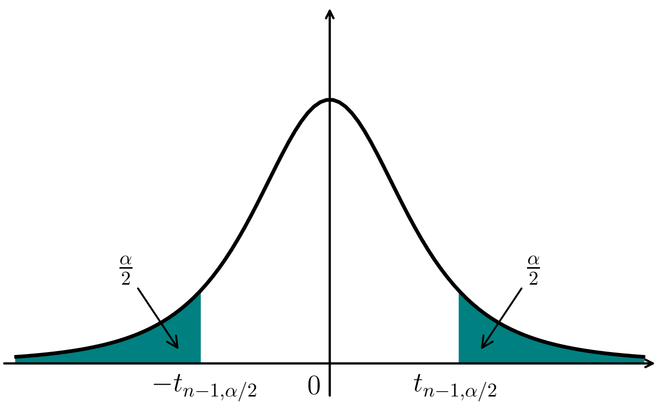


Figura 2: Definizione di $t_{n-1,\alpha/2}$.

Scegliendo

$$
\frac{\overline{X}_n - U_n}{S_n/\sqrt{n}} = t_{n-1,\alpha/2} \implies U_n = \overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2} ,
$$

$$
\frac{\overline{X}_n - V_n}{S_n/\sqrt{n}} = -t_{n-1,\alpha/2} \implies V_n = \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2} ,
$$

si ottiene la condizione che definisce l'intervallo di confidenza. In conclusione

$$
\Big[\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}, \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\Big]
$$

è un intervallo di confidenza bilaterale per μ con livello di confidenza $\beta = 1 - \alpha$.

Calcoliamo l'intervallo di confidenza sui dati. Per farlo, calcoliamo

$$\overline{x}_n = \frac{1}{8}(500 + 506 + 499 + 507 + 502 + 500 + 496 + 501) = 501.375\,,$$

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{7}(500^2 + 506^2 + 499^2 + 507^2 + 502^2 + 500^2 + 496^2 + 501^2 - 8 \cdot 501.375^2) = 13.125 \\ \implies s_n &= \sqrt{13.125} = 3.623\,. \end{aligned}$$

Infine, per $\beta = 90\%$ abbiamo che $\alpha/2 = 0.05$. Dalla tabella della t di Student, $t_{7,0.05} = 1.895$. Pertanto l'intervallo di confidenza è

$$\left[501.375 - \frac{3.623}{\sqrt{8}} \cdot 1.895, 501.375 + \frac{3.623}{\sqrt{8}} \cdot 1.895\right] = [498.95, 503.80]\,.$$

Un intervallo di confidenza al 91% sarebbe più grande di quello al 90% poiché $\alpha/2$ sarebbe più piccolo e di conseguenza il quantile $t_{7,\alpha/2}$ sarebbe più grande.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: giugno 2024 - turno 2
Matricola: ______________________	Data: 17/06/2024

Viene usata come riferimento la traccia n. 120.

Esercizio 1. (6 punti) Si studia il tempo di attesa per il servizio clienti di una banca. I dati vengono raggruppati in classi nella seguente tabella:

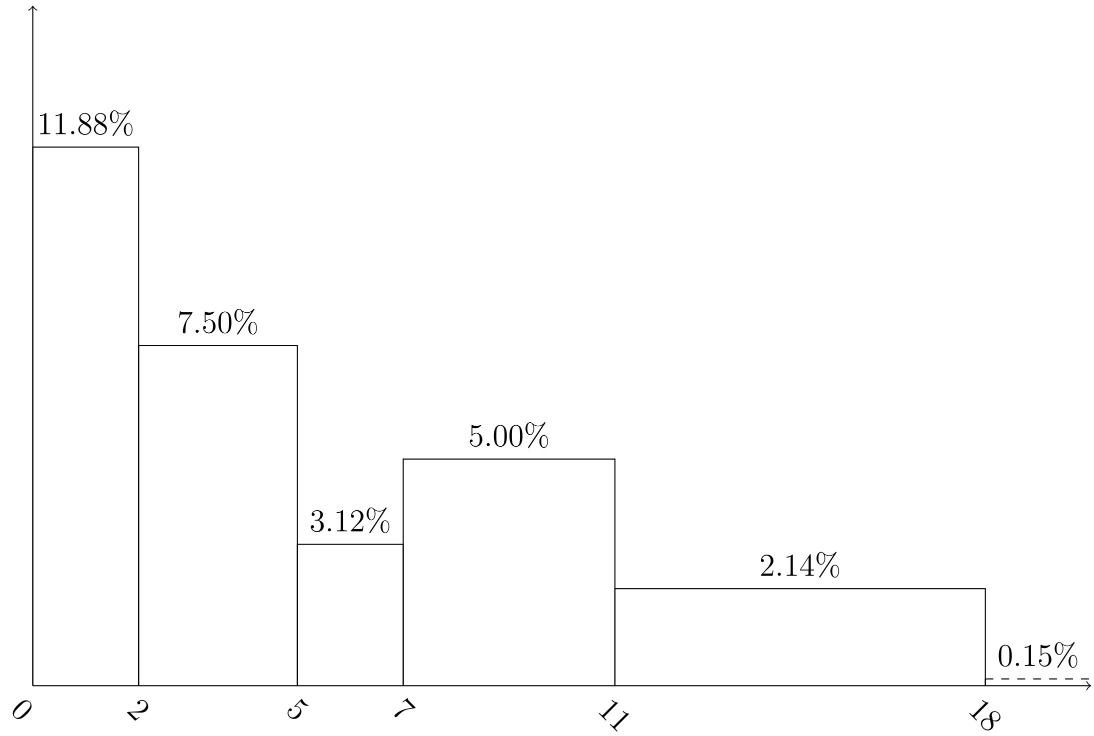
intervalli (minuti)	frequenze assolute
$[0, 2)$	19
$[2, 5)$	18
$[5, 7)$	5
$[7, 11)$	16
$[11, 18)$	12
$[18, 100)$	10

1. Rappresentare un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale (o le classi modali, se più di una).
3. Calcolare un'approssimazione della media e della varianza dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del 55-esimo percentile.

Soluzione. 1. Completiamo la tabella:

intervallo	freq. assolute	freq. relative	densità di freq. rel.	freq. cumulate
$[0, 2)$	19	23.75%	11.88%	19
$[2, 5)$	18	22.50%	7.50%	37
$[5, 7)$	5	6.25%	3.12%	42
$[7, 11)$	16	20.00%	5.00%	58
$[11, 18)$	12	15.00%	2.14%	70
$[18, 100)$	10	12.50%	0.15%	80

Rappresentiamo le densità di frequenze relative in un istogramma.



2. La classe modale è quella con maggiore densità di frequenza relativa, quindi è l'intervallo $[0, 2)$.

3. Per calcolare un'approssimazione della media utilizziamo le frequenze relative ottenute da $p_j = f_j/n$ dove $n = 80$ e i valori centrali $\tilde{v}_j$ degli intervalli

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \simeq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_j\tilde{v}_j = \sum_{j=1}^{k} p_j\tilde{v}_j \\ &= 23.75\% \cdot 1 + 22.50\% \cdot 3.5 + 6.25\% \cdot 6 + 20.00\% \cdot 9 + 15.00\% \cdot 14.5 + 12.50\% \cdot 59 = 12.75\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo un'approssimazione della varianza

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\Big) \simeq \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j\tilde{v}_j^2 - n\overline{x}^2\Big) = \frac{n}{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j\tilde{v}_j^2 - \overline{x}^2\Big) \\ &= \frac{80}{79}\Big(23.75\% \cdot 1^2 + 22.50\% \cdot 3.5^2 + 6.25\% \cdot 6^2 + 20.00\% \cdot 9^2 + 15.00\% \cdot 14.5^2 + 12.50\% \cdot 59^2 \\ &\quad - 12.75^2\Big) = 329.66\,.\end{aligned}$$

4. Per calcolare un'approssimazione del 55-esimo percentile dei dati, usiamo le frequenze cumulate. Troviamo l'intervallo I_j tale che $F_j \leq 55\%n = 44 < F_{j+1}$. Si tratta dell'intervallo $[7, 11)$. Approssimiamo la mediana con

$$Q_2 \simeq a_j + \lambda_j(b_j - a_j)$$

dove

$$\lambda_j = \frac{55\%n - F_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} = \frac{44 - 42}{58 - 42} = 0.125\,.$$

Quindi

$$P_{55} \simeq 7 + 0.125 \cdot (11 - 7) = 7.5\,.$$

Esercizio 2. (7 punti) Il numero di errori nelle soluzioni degli esercizi scritte dal docente di Probabilità e Statistica segue una distribuzione di Poisson con una media di 2 errori per soluzione. Si assuma che i numeri di errori in soluzioni di esercizi distinti siano indipendenti.

1. Qual è la probabilità che in una soluzione ci siano almeno 4 errori (inclusi)?
2. Qual è la deviazione standard del numero di errori in una soluzione?
3. Qual è la probabilità che in 5 soluzioni ci siano almeno 4 errori (inclusi)?
4. Consideriamo 5 soluzioni. Abbiamo letto le prime 3 soluzioni e abbiamo individuato almeno 4 errori (inclusi). Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che nelle 5 soluzioni ci siano in tutto 6 errori?
5. Uno studente legge le soluzioni degli esercizi in sequenza e si blocca quando trova la prima soluzione con almeno 1 errore (incluso). Qual è la probabilità che lo studente si blocchi entro la lettura della terza soluzione (inclusa)?

Soluzione. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X = \text{“numero di errori in una soluzione”} \sim \mathrm{P}(\lambda)\,.$$

Poiché

$$\lambda = \mathbb{E}(X) = 2 \implies X \sim \mathrm{P}(2)\,.$$

1. La probabilità che in una soluzione ci siano almeno 4 errori è

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \geq 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) \\
&= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = 14.30\%\,.
\end{aligned}$$

2. La deviazione standard del numero di errori in una soluzione è

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41\,.$$

3. Per calcolare questa probabilità, consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 indipendenti e identicamente distribuite con $X_i \sim \mathrm{P}(2)$. La variabile X_i rappresenta il numero di errori nella i-esima soluzione. Poiché la somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti è ancora una variabile aleatoria di Poisson, la variabile aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ ha distribuzione $\mathrm{P}(5 \cdot 2) = \mathrm{P}(10)$. La probabilità che in 5 soluzioni ci siano almeno 4 errori è quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y \geq 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(Y < 4) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) - \mathbb{P}(Y = 3) \\
&= 1 - e^{-10}\left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!}\right) = 98.97\%\,.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo le variabili aleatorie

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathrm{P}(6) \quad \text{e} \quad Z = X_4 + X_5 \sim \mathrm{P}(4)\,.$$

La probabilità che nelle 5 soluzioni ci siano in tutto 6 errori, sapendo che nelle prime 3 soluzioni ci sono almeno 4 errori, è, utilizzando l'indipendenza tra Y e Z,

$$\mathbb{P}(\{Y+Z=6\}|\{Y\geq 4\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Y+Z=6\}\cap\{Y\geq 4\})}{\mathbb{P}(\{Y\geq 4\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{Y=4\}\cap\{Z=2\})+\mathbb{P}(\{Y=5\}\cap\{Z=1\})+\mathbb{P}(\{Y=6\}\cap\{Z=0\})}{1-\mathbb{P}(\{Y<4\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{Y=4\})\mathbb{P}(\{Z=2\})+\mathbb{P}(\{Y=5\})\mathbb{P}(\{Z=1\})+\mathbb{P}(\{Y=6\})\mathbb{P}(\{Z=0\})}{1-\mathbb{P}(\{Y=0\})-\mathbb{P}(\{Y=1\})-\mathbb{P}(\{Y=2\})-\mathbb{P}(\{Y=3\})}$$
$$= \frac{e^{-6}\frac{6^4}{4!}e^{-4}\frac{4^2}{2!}+e^{-6}\frac{6^5}{5!}e^{-4}\frac{4^1}{1!}+e^{-6}\frac{6^6}{6!}e^{-4}\frac{4^0}{0!}}{1-e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right)} = 4.04\%\,.$$

5. Consideriamo la variabile aleatoria

$$Y = \text{“prima soluzione con almeno 1 errore”} \sim \mathrm{Geo}(p)\,,$$

dove p è la probabilità che una soluzione abbia almeno 1 errore, ovvero

$$p = \mathbb{P}(\{X\geq 1\}) = 1-\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-e^{-2} = 86.47\%\,.$$

La probabilità che lo studente si blocchi entro la lettura della terza soluzione è

$$\mathbb{P}(\{Y\leq 3\}) = 1-\mathbb{P}(\{Y>3\})1-(1-p)^3 = 1-(1-86.47\%)^3 = 99.75\%\,.$$

Esercizio 3. (8 punti) In un centro di assistenza, il tempo necessario per completare un backup di un computer segue una distribuzione esponenziale con un tempo medio di 2 ore.

1. Qual è la probabilità che il backup di un computer duri meno di 1 ora?
2. Qual è la varianza del tempo necessario per completare il backup di un computer?
3. Al centro di assistenza arrivano 16 computer per i quali occorre un backup. Qual è la probabilità che per almeno 3 computer (inclusi) il backup duri più di 3 ore? Si assuma che i tempi di backup dei computer siano indipendenti.
4. Al centro di assistenza arrivano 2 computer per i quali occorre un backup. Il backup del secondo computer inizia non appena il backup del primo computer è completato. Qual è la media del tempo necessario per completare il backup totale dei 2 computer? E la varianza? Si assuma che i tempi di backup dei computer siano indipendenti.
5. Nella situazione del punto 4., qual è la probabilità che il backup totale dei 2 computer sia inferiore a 7 ore?

Soluzione. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X = \text{“tempo necessario per completare un backup”} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)\,.$$

Poiché

$$\frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X) = 2 \implies \lambda = \frac{1}{2} \implies X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

1. La probabilità che il backup di un computer duri meno di 1 ora è

$$\mathbb{P}(\{X < 1\}) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 39.35\% \,.$$

2. La varianza del tempo necessario per completare il backup di un computer è

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 2^2 = 4 \,.$$

3. Per calcolare questa probabilità, consideriamo la variabile aleatoria

$$Y = \text{“numero dei 16 computer per i quali il backup dura più di 3 ore”} \sim \mathrm{B}(16, p) \,,$$

dove

$$p = \mathbb{P}(\{X > 3\}) = e^{-\frac{3}{2}} = 22.31\% \,.$$

La probabilità che per almeno 3 computer il backup duri più di 3 ore è

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{Y \geq 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Y < 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Y = 0\}) - \mathbb{P}(\{Y = 1\}) - \mathbb{P}(\{Y = 2\}) \\
&= 1 - \binom{16}{0}(22.31\%)^0(77.69\%)^{16} - \binom{16}{1}(22.31\%)^1(77.69\%)^{15} - \binom{16}{2}(22.31\%)^2(77.69\%)^{14} \\
&= 72.72\% \,.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo le variabili aleatorie

$$X_1 = \text{“tempo necessario per completare il backup del primo computer”} \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X_2 = \text{“tempo necessario per completare il backup del secondo computer”} \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \,.$$

Per calcolare il valore atteso, sfruttiamo la linearità del valore atteso per ottenere che

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2 + 2 = 4 \,.$$

Per calcolare la varianza, sfruttiamo l'indipendenza delle variabili aleatorie per ottenere che

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 4 + 4 = 8 \,.$$

5. La variabile aleatoria $X_1 + X_2$ ha distribuzione Gamma$(2, 1/2)$, quindi ha densità (ricordiamo che $\Gamma(2) = 1! = 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 x e^{-\frac{1}{2}x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \,. \end{cases}$$

La probabilità che il backup totale dei 2 computer sia inferiore a 7 ore è quindi, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 < 7\}) &= \int_0^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 x e^{-\frac{1}{2}x} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^7 + \int_0^7 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{7}{2} e^{-\frac{7}{2}} + \left[-e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^7 = -\frac{7}{2} e^{-\frac{7}{2}} + 1 - e^{-\frac{7}{2}} \\
&= 1 - \frac{9}{2} e^{-\frac{7}{2}} = 86.41\% \,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. (7 punti) (7 punti) Un'azienda sostiene che la durata media giornaliera degli smartphone che produce è di 12 ore. Un'indagine condotta su alcuni smartphone è volta a mostrare che la durata è in realtà inferiore. Vengono rilevate le seguenti durate (in ore):

11.2	15.2	12.1	10.8	8.6	11.7	13.6	12.7	9.5	11.0
18.2	11.9	14.2	12.5	10.0	11.3	11.4	9.3	10.3	9.5
10.5	13.6	10.8	9.6	13.3	8.9	13.8	12.7	8.9	15.5
11.7	13.2	9.6	10.4	12.2	11.9	9.1	12.2	12.6	9.6

La media calcolata sui dati risulta essere 11.63 ore. È noto che la deviazione standard della popolazione è di 4 ore.

1. È possibile sostenere con significatività 1% che la durata media degli smartphone è in realtà inferiore a 12 ore? (N.B.: derivare le formule)

2. Calcolare il p-value del test.

Soluzione. Si deve impostare un test di ipotesi. La popolazione è descritta da una variabile aleatoria X con media $\mathbb{E}(X) = \mu$ e varianza $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 4^2$. La legge di X non è nota. Dalla popolazione viene estratto un campione $X_1, \ldots, X_n$ con $n = 40 > 30$. Osserviamo che il campione è numeroso. Sia $\mu_0 = 12$. Il test di ipotesi è il seguente:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \,, \quad H_1 : \mu < \mu_0 \,,$$

con livello di significatività $\alpha = 1\%$.

Poiché l'ipotesi alternativa è $H_1 : \mu < \mu_0$, i dati saranno significativi se la media è sufficiente più piccola di μ_0. La regione critica è allora della forma

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \ : \ \overline{x}_n < \mu_0 - \delta\} \,,$$

dove $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ è la media calcolata sulla realizzazione $x_1, \ldots, x_n$ del campione casuale.

Assumiamo l'ipotesi nulla H_0 vera, cioè $\mu = \mu_0$, ovvero $\mathbb{E}(X_i) = \mu_0$. Consideriamo la media campionaria $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ e utilizziamo la definizione di significatività per ottenere

$$\alpha = \mathbb{P}(\{(X_1, \ldots, X_n) \in R_c\}) = \mathbb{P}(\{\overline{X}_n < \mu_0 - \delta\}) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Non conosciamo la distribuzione della popolazione, ma il campione è numeroso ($n \geq 30$). Per il Teorema del Limite Centrale, si ha che $\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{n\to+\infty}{\to} Z$ in legge, dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Quindi

$$\alpha = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \simeq \mathbb{P}\Big(\Big\{Z < -\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Introduciamo il valore z_α tale che

$$\mathbb{P}(\{Z > z_\alpha\}) = \alpha \,.$$

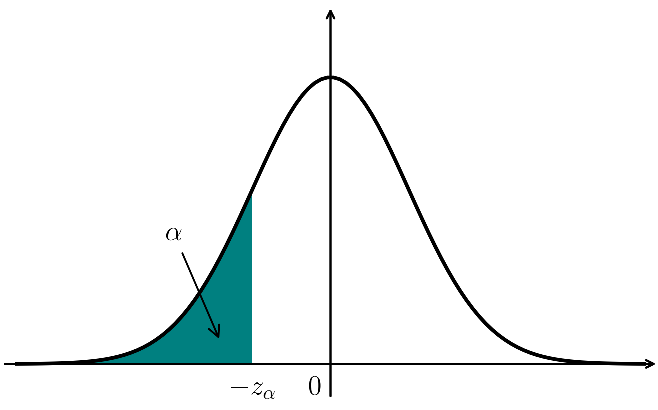


Figura 1: Coda sinistra della legge normale con probabilità α.

Allora, scegliendo

$$\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \implies \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \,,$$

otteniamo la condizione desiderata sulla probabilità di errore del primo tipo.

In conclusione, la regione critica è

$$R_c = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \ : \ \overline{x}_n < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \right\},$$

e decidiamo come segue:

- Se $\overline{x}_n < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, i dati sono sufficientemente significativi da rifiutare H_0. L'ipotesi nulla H_0 viene rifiutata (con livello di significatività α).

- Se $\overline{x}_n \geq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, i dati non sono sufficientemente significativi da rifiutare. L'ipotesi nulla H_0 non viene rifiutata (con livello di significatività α).

È anche possibile calcolare esplicitamente il p-value dei dati. Utilizzando il fatto che la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard è strettamente crescente, otteniamo che

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= \inf\left\{\alpha \ : \ \overline{x}_n - \mu_0 < -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right\} = \inf\left\{\alpha \ : \ \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right\} \\ &= \inf\left\{\alpha \ : \ \Phi\Big(\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) < \Phi(-z_\alpha)\right\} = \inf\left\{\alpha \ : \ \Phi\Big(\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) < \alpha\right\} \\ &= \Phi\Big(\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) \,. \end{aligned}$$

Calcoliamo il p-value dei dati:

$$\Phi\Big(\frac{11.63 - 12}{4/\sqrt{40}}\Big) = \Phi(-0.58) = 1 - \Phi(0.58) = 1 - 71.90\% = 28.1\% \,.$$

Poiché $1\% < 28.1\%$, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla H_0 con significatività 1%.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: luglio 2024 - turno 1
Matricola: ______________________	Data: 15/07/2024

Viene usata come riferimento la traccia n. 120.

Esercizio 1. (6 punti) Si studia il prezzo di affitto di appartamenti a Bari tramite annunci pubblicati su un servizio online. Vengono rilevati i seguenti dati (in euro):

$$750 \quad 700 \quad 550 \quad 650 \quad 900 \quad 780 \quad 1100 \quad 450 \quad 530 \quad 1650$$

1. Determinare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Tracciare un box plot.
4. Calcolare il 35-esimo percentile (esclusivo).

Soluzione. 1. Per prima cosa ordiniamo i dati:

$$450 \quad 530 \quad 550 \quad 650 \quad 700 \quad 750 \quad 780 \quad 900 \quad 1100 \quad 1650\,.$$

Abbiamo $n = 10$ dati.

Calcoliamo il primo quartile: $\frac{n+1}{4} = \frac{11}{4} = 2 + 0.75$. Allora

$$Q_1 = (1 - 0.75)x_2 + 0.75x_3 = 0.25 \cdot 530 + 0.75 \cdot 550 = 545\,.$$

Calcoliamo il secondo quartile: $(n+1)\frac{2}{4} = 11\frac{2}{4} = 5 + 0.5$. Allora

$$Q_2 = (1 - 0.5)x_5 + 0.5x_6 = 0.5 \cdot 700 + 0.5 \cdot 750 = 725\,.$$

Calcoliamo il terzo quartile: $(n+1)\frac{3}{4} = 11\frac{3}{4} = 8 + 0.25$. Allora

$$Q_3 = (1 - 0.25)x_8 + 0.25x_9 = 0.75 \cdot 900 + 0.25 \cdot 1100 = 950\,.$$

2. Per determinare i dati anomali e sospetti calcoliamo il range interquartile

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 950 - 545 = 405\,.$$

I dati anomali apparterrebbero agli intervalli

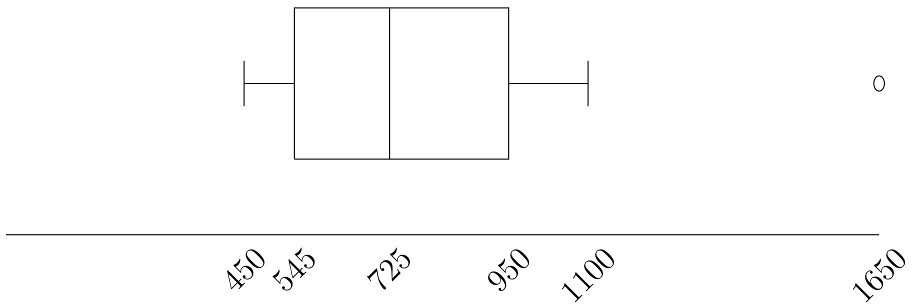
$$(-\infty, Q_1 - 3 \cdot IQR] \cup [Q_3 + 3 \cdot IQR, +\infty) = (-\infty, -670] \cup [2165, +\infty)\,,$$

quindi non ci sono dati anomali. I dati sospetti appartengono agli intervalli

$$(Q_1 - 3 \cdot IQR, Q_1 - 1.5 \cdot IQR] \cup [Q_3 + 1.5 \cdot IQR, Q_3 + 3 \cdot IQR) = (-670, -62.5] \cup [1557.5, 2165)\,,$$

quindi 1650 è un dato sospetto.

3. Segue il box-plot.



4. Calcoliamo il 35-esimo percentile. Osserviamo che $(n+1)35\% = 11 \cdot 35\% = 3 + 0.85$. Allora il 35-esimo percentile è

$$P_{35} = (1 - 0.85)x_3 + 0.85x_4 = 0.15 \cdot 550 + 0.85 \cdot 650 = 635\,.$$

Esercizio 2. (7 punti) In una linea di produzione, il 5% dei prodotti è difettoso. Si assuma che prodotti diversi siano indipendenti tra loro.

Nei punti 1., 2., 3. vengono esaminati 10 prodotti.

1. Qual è la probabilità che (strettamente) più di 3 prodotti siano difettosi?
2. Qual è la probabilità che esattamente 3 prodotti siano difettosi?
3. Quali sono la media e la varianza del numero di prodotti difettosi?

Nel punto 4. vengono esaminati 100 prodotti.

4. Considerando che il numero di prodotti è elevato e la probabilità di difetto è piccola, qual è un'approssimazione adeguata della probabilità che almeno 4 (4 inclusi) prodotti siano difettosi? Motivare la risposta.

Nel punto 5. vengono esaminati prodotti in sequenza fino a trovare il primo difettoso.

5. Qual è la probabilità che il primo prodotto difettoso sia il quarto esaminato?

Soluzione. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X = \text{numero di prodotti difettosi tra 10} \sim \mathrm{B}(10, 5\%).$$

1. La probabilità che più di 3 prodotti siano difettosi è

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X > 3\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{X \le 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X = 0\}) - \mathbb{P}(\{X = 1\}) - \mathbb{P}(\{X = 2\}) - \mathbb{P}(\{X = 3\}) \\ &= 1 - \binom{10}{0}0.05^0 0.95^{10} - \binom{10}{1}0.05^1 0.95^9 - \binom{10}{2}0.05^2 0.95^8 - \binom{10}{3}0.05^3 0.95^7. \\ &\simeq 0.10\%.\end{aligned}$$

2. La probabilità che esattamente 3 prodotti siano difettosi è

$$\mathbb{P}(\{X = 3\}) = \binom{10}{3} 0.05^3 0.95^7 \simeq 1.05\%.$$

3. La media e la varianza di X sono

$$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0.05 = 0.5,$$
$$\mathrm{Var}(X) = 10 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.475.$$

4. Una legge binomiale con un numero elevato di prove e probabilità di successo piccola può essere approssimata con una legge di Poisson con parametro uguale al prodotto del numero di prove e della probabilità di successo.

Consideriamo allora la variabile aleatoria

$$Y = \text{numero di prodotti difettosi tra } 100 \sim \mathrm{P}(100 \cdot 5\%) = \mathrm{P}(5).$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y \geq 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{Y < 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Y = 0\}) - \mathbb{P}(\{Y = 1\}) - \mathbb{P}(\{Y = 2\}) - \mathbb{P}(\{Y = 3\}) \\ &= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6}\right) \simeq 73.50\%.\end{aligned}$$

5. Consideriamo la variabile aleatoria

$$Z = \text{numero di prodotti esaminati fino al primo difettoso} \sim \mathrm{Geo}(5\%).$$

La probabilità che il primo difettoso sia il quarto esaminato è

$$\mathbb{P}(\{Z = 4\}) = 0.95^3 \cdot 0.05 \simeq 4.29\%\,.$$

Esercizio 3. (8 punti) Alice e Bob generano due numeri casualmente. Alice genera un numero con una variabile casuale esponenziale con media 2, mentre Bob genera un numero in base al risultato ottenuto da Alice:

- Se il numero generato da Alice è minore di 1, Bob genera un numero con una variabile aleatoria uniforme $\mathrm{U}(0, 1)$.
- Se il numero generato da Alice è maggiore di 1, Bob genera un numero con una variabile aleatoria uniforme $\mathrm{U}(1, 2)$.

Si risponda alle seguenti domande:

1. Sapendo che Alice ha ottenuto un numero minore di 1, qual è la media del numero generato da Bob? E la deviazione standard?
2. Qual è la probabilità che il numero generato da Bob sia maggiore di $\frac{1}{2}$?
3. Bob ha generato un numero minore di $\frac{3}{2}$. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che il numero generato da Alice sia minore di 1?
4. Qual è la probabilità che il minimo tra il numero generato da Alice e quello generato da Bob sia minore di 1?

Soluzione. Consideriamo le variabili aleatorie

$$X = \text{numero generato da Alice} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

$$Y = \text{numero generato da Bob}\,.$$

Per la X sappiamo che $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 2$, quindi $\lambda = 1/2$, cioè $X \sim \text{Exp}(1/2)$.

Per la Y, conviene distinguere in base all'esito di X:

$$Y_{<1} = \text{numero generato da Bob se } X < 1 \sim \text{U}(0,1),$$

$$Y_{>1} = \text{numero generato da Bob se } X > 1 \sim \text{U}(1,2).$$

1. La media del numero generato da Bob sapendo che $X < 1$ è

$$\mathbb{E}(Y_{<1}) = \frac{0+1}{2}\,.$$

La deviazione standard è

$$\sqrt{\text{Var}(Y_{<1})} = \sqrt{\frac{(1-0)^2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\,.$$

2. Per calcolare la probabilità che il numero generato da Bob sia maggiore di 1/2 possiamo usare il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y > 1/2\}) &= \mathbb{P}(\{Y > 1/2\}|\{X < 1\})\mathbb{P}(\{X < 1\}) + \mathbb{P}(\{Y > 1/2\}|\{X > 1\})\mathbb{P}(\{X > 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_{<1} > 1/2\})\mathbb{P}(\{X < 1\}) + \mathbb{P}(\{Y_{>1} > 1/2\})\mathbb{P}(\{X > 1\})\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\mathbb{P}(\{X > 1\}) = e^{-1/2} \simeq 60.65\%\,.$$

Inoltre

$$\mathbb{P}(\{Y_{<1} > 1/2\}) = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-0}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,,$$

$$\mathbb{P}(\{Y_{>1} > 1/2\}) = 1\,.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(\{Y > 1/2\}) = \frac{1}{2}\cdot(1-e^{-1/2}) + 1\cdot e^{-1/2} = 80.33\%\,.$$

3. Utilizziamo il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X < 1\}|\{Y < 3/2\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{Y < 3/2\}|\{X < 1\})\mathbb{P}(\{X < 1\})}{\mathbb{P}(\{Y < 3/2\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{Y_{<1} < 3/2\})\mathbb{P}(\{X < 1\})}{\mathbb{P}(\{Y_{<1} < 3/2\})\mathbb{P}(\{X < 1\}) + \mathbb{P}(\{Y_{>1} < 3/2\})\mathbb{P}(\{X > 1\})} \\ &= \frac{1\cdot(1-e^{-1/2})}{1\cdot(1-e^{-1/2}) + \frac{3/2-1}{1}\cdot e^{-1/2}} \simeq 56.47\%\,.\end{aligned}$$

4. Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(\{\min\{X,Y\} < 1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\min\{X,Y\} \geq 1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \geq 1\} \cap \{Y \geq 1\})\,.$$

Le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti, quindi per calcolare la probabilità dell'intersezione dobbiamo utilizzare la formula della probabilità condizionata:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \geq 1\} \cap \{Y \geq 1\}) &= \mathbb{P}(\{Y \geq 1\} | \{X \geq 1\}) \mathbb{P}(\{X \geq 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_{>1} \geq 1\}) \mathbb{P}(\{X \geq 1\}) \\ &= 1 \cdot e^{-1/2} \simeq 60.65\% \,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{P}(\{\min\{X, Y\} < 1\}) \simeq 39.35\% \,.$$

Esercizio 4. (7 punti) Una squadra di calcio lo scorso anno aveva una media di gol per partita pari a 2.5. Nel campionato di quest'anno, la squadra ha segnato un numero di gol per partita come descritto dai dati raccolti nella seguente tabella:

gol per partita	frequenza assoluta
0	5
1	9
2	13
3	7
4	4

Si assuma che la deviazione standard del numero di gol sia 2.

1. Si può stabilire con significatività del 5% che la media di gol per partita è diversa da quella dell'anno scorso? (N.B.: derivare le formule)

2. Stabilire in quali dei seguenti intervalli è collocato il p-value dei dati: $[0, 1\%)$, $[1\%, 2\%)$, $[2\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, $[10\%, 20\%)$, $[20\%, +\infty)$.

Soluzione. Si deve impostare un test di ipotesi. La popolazione è descritta da una variabile aleatoria X con media $\mathbb{E}(X) = \mu$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = 2^2$. La legge di X non è nota. Dalla popolazione viene estratto un campione $X_1, \ldots, X_n$ con $n = 5+9+13+7+4 = 38 > 30$. Osserviamo che il campione è numeroso. Sia $\mu_0 = 2.5$. Il test di ipotesi è il seguente:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \,, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \,,$$

con livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Poiché l'ipotesi alternativa è $H_1 : \mu \neq \mu_0$, i dati saranno significativi se la media è sufficientemente distante da μ_0. La regione critica è allora della forma

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \;:\; |\overline{x}_n - \mu_0| > \delta\} \,,$$

dove $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ è la media calcolata sulla realizzazione $x_1, \ldots, x_n$ del campione casuale.

Assumiamo l'ipotesi nulla H_0 vera, cioè $\mu = \mu_0$, ovvero $\mathbb{E}(X_i) = \mu_0$. Consideriamo la media campionaria $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ e utilizziamo la definizione di significatività per ottenere

$$\alpha = \mathbb{P}(\{(X_1, \ldots, X_n) \in R_c\}) = \mathbb{P}(\{|\overline{X}_n - \mu_0| > \delta\}) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Non conosciamo la distribuzione della popolazione, ma il campione è numeroso ($n \geq 30$). Per il Teorema del Limite Centrale, si ha che $\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{n\to+\infty}{\to} Z$ in legge, dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi

$$\alpha = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{|\overline{X}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \simeq \mathbb{P}\Big(\Big\{|Z| > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Per la simmetria della gaussiana

$$
\begin{aligned}
\alpha \simeq \mathbb{P}\Big(\Big\{|Z| > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\Big\{Z < -\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \\
&= 2\mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \frac{\alpha}{2}.
$$

Introduciamo il valore $z_{\alpha/2}$ tale che

$$
\mathbb{P}(\{Z > z_{\alpha/2}\}) = \frac{\alpha}{2}.
$$

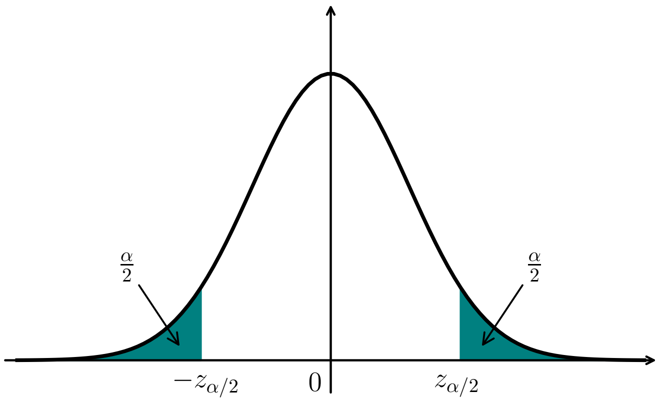


Figura 1: Code della legge normale con probabilità $\frac{\alpha}{2}$.

Allora, scegliendo

$$
\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \implies \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},
$$

otteniamo la condizione che definisce la significatività.

In conclusione, la regione critica è

$$
R_c = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \ : \ |\overline{x}_n - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\Big\},
$$

e decidiamo come segue:

- Se $|\overline{x}_n - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$, i dati sono sufficientemente significativi da rifiutare H_0. L'ipotesi nulla H_0 viene rifiutata (con livello di significatività α).
- Se $|\overline{x}_n - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$, i dati non sono sufficientemente significativi da rifiutare. L'ipotesi nulla H_0 non viene rifiutata (con livello di significatività α).

In questo caso è anche possibile calcolare esplicitamente il p-value dei dati. Utilizzando il fatto che la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard è strettamente crescente, otteniamo che

$$
\begin{aligned}
p\text{-value} = \inf\Big\{\alpha \ : \ |\overline{x}_n - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\Big\} &= \inf\Big\{\alpha \ : \ \frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}\Big\} \\
= \inf\Big\{\alpha \ : \ \Phi\Big(\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) > \Phi(z_{\alpha/2})\Big\} &= \inf\Big\{\alpha \ : \ \Phi\Big(\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) > 1 - \frac{\alpha}{2}\Big\} \\
= \inf\Big\{\alpha \ : \ \alpha > 2 - 2\Phi\Big(\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\Big\} &= 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il p-value sui dati:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_j v_j = \frac{1}{38}(0 \cdot 5 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4) \simeq 1.89\,.$$

Lo z-score è quindi:

$$\frac{|\overline{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{|1.89 - 2.5|}{2/\sqrt{38}} = 1.88\,.$$

Quindi

$$p\text{-value} = 2\Big(1 - \Phi(1.88)\Big) \simeq 2(1 - 0.9699) = 6.02\%\,.$$

Concludiamo che:

1. L'ipotesi nulla non può essere rifiutata con significatività $5\% < 6.02\%$.
2. Il p-value è collocato nell'intervallo $[5\%, 10\%)$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: luglio 2024 - turno 2
Matricola: ______________________ Data: 15/07/2024

Viene usata come riferimento la traccia n. 1.

Esercizio 1. (6 punti) In una partita di pallacanestro viene misurata la distanza dei tiri effettuati da un giocatore. Vengono misurati i seguenti dati (in metri):

$$2.3 \quad 8.6 \quad 3.1 \quad 5.2 \quad 1.1 \quad 5.6 \quad 6.3 \quad 1.1 \quad 7.5 \quad 6.8\,.$$

1. Determinare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Tracciare un box plot.
4. Calcolare il 65-esimo percentile (esclusivo).

Soluzione. 1. Per prima cosa ordiniamo i dati:

$$1.1 \quad 1.1 \quad 2.3 \quad 3.1 \quad 5.2 \quad 5.6 \quad 6.3 \quad 6.8 \quad 7.5 \quad 8.6\,.$$

Abbiamo $n = 10$ dati.

Calcoliamo il primo quartile: $\frac{n+1}{4} = \frac{11}{4} = 2 + 0.75$. Allora

$$Q_1 = (1 - 0.75)x_2 + 0.75x_3 = 0.25 \cdot 1.1 + 0.75 \cdot 2.3 = 2\,.$$

Calcoliamo il secondo quartile: $(n+1)\frac{2}{4} = 11\frac{2}{4} = 5 + 0.5$. Allora

$$Q_2 = (1 - 0.5)x_5 + 0.5x_6 = 0.5 \cdot 5.2 + 0.5 \cdot 5.6 = 5.4\,.$$

Calcoliamo il terzo quartile: $(n+1)\frac{3}{4} = 11\frac{3}{4} = 8 + 0.25$. Allora

$$Q_3 = (1 - 0.25)x_8 + 0.25x_9 = 0.75 \cdot 6.8 + 0.25 \cdot 7.5 = 6.975\,.$$

2. Per determinare i dati anomali e sospetti calcoliamo il range interquartile

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 6.975 - 2 = 4.975\,.$$

I dati anomali apparterrebbero agli intervalli

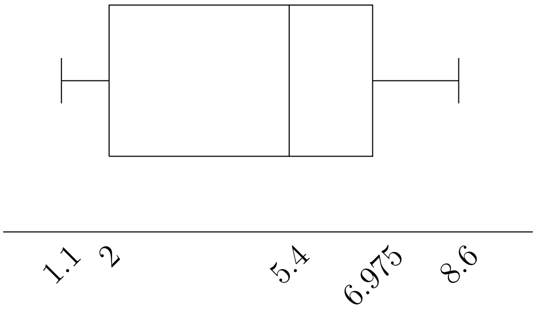
$$(-\infty, Q_1 - 3 \cdot IQR] \cup [Q_3 + 3 \cdot IQR, +\infty) = (-\infty, -12.925] \cup [21.9, +\infty)\,,$$

quindi non ci sono dati anomali. I dati sospetti appartengono agli intervalli

$$(Q_1-3\cdot IQR, Q_1-1.5\cdot IQR]\cup[Q_3+1.5\cdot IQR, Q_3+3\cdot IQR) = (-12.925, -5.4625]\cup[14.4375, 21.9)\,,$$

quindi non ci sono dati sospetti.

3. Segue il box-plot.



4. Calcoliamo il 65-esimo percentile. Osserviamo che $(n+1)65\% = 11 \cdot 65\% = 7 + 0.15$. Allora il 65-esimo percentile è

$$P_{65} = (1-0.15)x_7 + 0.15x_8 = 0.85 \cdot 6.3 + 0.15 \cdot 6.8 = 6.375\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Una compagnia aerea studia il numero di bagagli smarriti durante i voli intercontinentali su cui opera. Si osserva che il numero di bagagli smarriti in un mese è distribuito con legge di Poisson con una media di 4 bagagli smarriti al mese. Si assuma che i bagagli smarriti in mesi diversi siano indipendenti tra loro.

1. Qual è la probabilità che in un mese vengano smarriti almeno 3 bagagli (3 inclusi)?
2. Qual è la varianza del numero di bagagli smarriti in un mese?
3. Qual è la probabilità che in un anno vengano smarriti esattamente 50 bagagli?
4. L'azienda nota che a gennaio e febbraio sono stati smarriti in tutto 6 bagagli. Sapendo che si è verificato questo evento, qual è la probabilità che da gennaio ad aprile vengano smarriti in tutto al più 10 bagagli (10 inclusi)?
5. Applicare il Teorema del Limite Centrale per stimare la probabilità che in 3 anni vengano smarriti più di 150 bagagli.

Soluzione. Sappiamo che la variabile aleatoria

$$X = \text{“numero di bagagli smarriti in un mese”}$$

è distribuita con legge $\mathrm{P}(\lambda)$. Inoltre

$$4 = \mathbb{E}(X) = \lambda \implies X \sim \mathrm{P}(4).$$

1. Ricordando che $\mathbb{P}(\{X=k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X\geq 3\}) &= 1-\mathbb{P}(\{X<3\}) = 1-\Big(e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\lambda+e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}\Big) = 1-e^{-4}\Big(1+4+8\Big)\\ &= 1-13e^{-4} \simeq 76.19\%\,.\end{aligned}$$

2. La varianza di X è $\mathrm{Var}(X) = \lambda = 4$.

3. Definiamo $X_1, \dots, X_{12} \sim \mathrm{P}(4)$ le variabili aleatorie che rappresentano il numero di bagagli smarriti nei 12 mesi dell'anno, cioè

$$X_i = \text{“numero di bagagli smarriti nel mese } i\text{”}.$$

Il numero di bagagli smarriti in un anno è la variabile aleatoria

$$Y = X_1 + \cdots + X_{12}.$$

Poiché le variabili X_i sono indipendenti tra loro, possiamo stabilire che $Y \sim \mathrm{P}(4 \cdot 12) = \mathrm{P}(48)$. Dunque

$$\mathbb{P}(\{Y = 50\}) = e^{-48} \frac{48^{20}}{20!} \simeq 5.4\%.$$

4. La variabile aleatoria che rappresenta il numero di bagagli smarriti nei mesi da gennaio ad aprile è

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim \mathrm{P}(4 + 4 + 4 + 4) = \mathrm{P}(16).$$

La variabile aleatoria che rappresenta il numero di bagagli smarriti nei mesi da gennaio a febbraio è

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{P}(4 + 4) = \mathrm{P}(8).$$

La variabile aleatoria che rappresenta il numero di bagagli smarriti nei mesi da marzo ad aprile è

$$X_3 + X_4 \sim \mathrm{P}(4 + 4) = \mathrm{P}(8).$$

Dunque, la probabilità che da gennaio ad aprile vengano smarriti in tutto al più 10 bagagli sapendo che a gennaio e febbraio sono stati smarriti in tutto 6 bagagli è, utilizzando l'indipendenza,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 10\} | \{X_1 + X_2 = 6\}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 10\} \cap \{X_1 + X_2 = 6\})}{\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = 6\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X_3 + X_4 \leq 4\} \cap \{X_1 + X_2 = 6\})}{\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = 6\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X_3 + X_4 \leq 4\})\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = 6\})}{\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = 6\})} \\
&= \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 \leq 4\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 = 2\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_3 + X_4 = 4\}) \\
&= e^{-8} \frac{8^0}{0!} + e^{-8} \frac{8^1}{1!} + e^{-8} \frac{8^2}{2!} + e^{-8} \frac{8^3}{3!} + e^{-8} \frac{8^4}{4!} \simeq 9.96\%.
\end{aligned}$$

5. La variabile aleatoria che rappresenta il numero di bagagli smarriti in 3 anni è

$$X_1 + \cdots + X_{36} \sim \mathrm{P}(4 \cdot 12 \cdot 3) = \mathrm{P}(144).$$

Applichiamo il Teorema del Limite Centrale alla media campionaria $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, dove $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{P}(4)$ sono indipendenti e identicamente distribuite. La media e la varianza delle X_i sono rispettivamente

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = \lambda = 4 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = \lambda = 4.$$

Per il Teorema del Limite Centrale, la variabile aleatoria

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

è approssimata da una variabile aleatoria normale standard $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ per n grande. Nel nostro caso, $n = 36 > 30$.

Allora possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_1 + \cdots + X_{36} > 150\}) = \mathbb{P}(\{X_1 + \cdots + X_{36} > 150.5\}) \\
&\simeq \mathbb{P}\Big(\Big\{\overline{X}_n \geq 4.18\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{4.18 - 4}{2/\sqrt{36}}\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 0.54\Big\}\Big) \\
&\simeq \mathbb{P}(\{Z \geq 0.54\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z < 0.54\}) \simeq 1 - 70.54\% = 29.46\%\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la tabella della distribuzione normale standard per calcolare $\mathbb{P}(\{Z < 0.54\}) \simeq 70.54\%$.

Esercizio 3. (7 punti) Un call center studia la durata delle telefonate effettuate. Si osserva che:

- Se un cliente non abbandona la chiamata, la durata della telefonata è distribuita con legge uniforme nell'intervallo $[5, 10]$ minuti.
- Se un cliente abbandona la chiamata, la durata della telefonata è distribuita con legge uniforme nell'intervallo $[2, 5]$ minuti.
- La probabilità che un cliente abbandoni la chiamata è 80%.

Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Si consideri un cliente che abbandona la chiamata. Qual è la probabilità che la durata della telefonata sia inferiore a 3 minuti?
2. Si consideri un cliente che abbandona la chiamata. Dopo 3 minuti non è ancora terminata la chiamata. Sapendo questo fatto, qual è la probabilità che l'intera chiamata duri almeno 4 minuti? C'è un teorema che si può applicare per calcolare questa probabilità?
3. Calcolare la media e la varianza delle durate delle telefonate per un cliente che non abbandona la chiamata.
4. Si consideri un cliente qualunque. Calcolare la probabilità che la durata della telefonata sia superiore a 3 minuti.

Soluzione.

Definiamo le variabili aleatorie

$$X_0 = \text{“durata della telefonata se il cliente non abbandona”} \sim \mathrm{U}(5, 10)$$

e

$$X_1 = \text{“durata della telefonata se il cliente abbandona”} \sim \mathrm{U}(2, 5)\,.$$

Inoltre definiamo

$$Y = \text{“il cliente abbandona la chiamata”} \sim \mathrm{Be}(80\%)\,.$$

Infine definiamo la variabile aleatoria

$$X = \text{“durata della telefonata”}.$$

1. La probabilità che la durata della telefonata sia inferiore a 3 minuti sapendo che il cliente ha abbandonato la chiamata è

$$\mathbb{P}(\{X < 3\}|\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X_1 < 3\}) = \int_2^3 \frac{1}{5-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

2. Attenzione: non si può usare l'assenza di memoria perché non si tratta di una legge esponenziale. Calcoliamo la probabilità richiesta utilizzando la definizione di probabilità condizionata:

$$\mathbb{P}(\{X_1 > 4\}|\{X_1 > 3\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 > 4\} \cap \{X_1 > 3\})}{\mathbb{P}(\{X_1 > 3\})} = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 > 4\})}{\mathbb{P}(\{X_1 > 3\})} = \frac{\int_4^5 \frac{1}{5-2}\,\mathrm{d}x}{\int_3^5 \frac{1}{5-2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

3. La media e la varianza della variabile aleatoria X_0 sono rispettivamente

$$\mathbb{E}(X_0) = \frac{5+10}{2} = 7.5 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X_0) = \frac{(10-5)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

4. Utilizzando il teorema della probabilità totale, la probabilità che la durata della telefonata sia superiore a 3 minuti è

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X > 3\}) &= \mathbb{P}(\{X > 3\}|\{Y = 0\})\mathbb{P}(\{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X > 3\}|\{Y = 1\})\mathbb{P}(\{Y = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X_0 > 3\})\mathbb{P}(\{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X_1 > 3\})\mathbb{P}(\{Y = 1\})\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\mathbb{P}(\{X_0 > 3\}) = 1\,, \quad \mathbb{P}(\{X_1 > 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq 3\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

quindi

$$\mathbb{P}(\{X > 3\}) = 1 \cdot 20\% + \frac{2}{3} \cdot 80\% = 73.33\%.$$

Esercizio 4. (7 punti) Il prezzo medio degli immobili venduti in una città nel 2023 era 2100€/mq. Vengono esaminati i prezzi di alcuni immobili nel 2024, osservando i seguenti dati (in €/mq):

2111 2410 1600 3900 1988 1875 2250

Si assuma che il prezzo a metro quadro degli immobili sia distribuito con legge normale.

1. È possibile affermare con significatività del 5% che il prezzo medio degli immobili nel 2024 è aumentato rispetto al 2023?
2. Stabilire in quali dei seguenti intervalli è collocato il p-value dei dati: $[0, 0.5\%]$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, $[10\%, 100\%]$.

Soluzione. 1. Dobbiamo impostare un test di ipotesi. Sia $\mu_0 = 2100$. Consideriamo il seguente test di ipotesi

$$H_0 : \mu = \mu_0\,, \quad H_1 : \mu > \mu_0\,,$$

con livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Poiché l'ipotesi alternativa è $H_1 : \mu > \mu_0$, i dati saranno significativi se con media calcolata sui dati sufficientemente più grande di μ_0. La regione critica è allora della forma

$$R_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \ : \ \overline{x}_n > \mu_0 + \delta\} \,,$$

dove $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ è la media calcolata sulla realizzazione $x_1, \ldots, x_n$ del campione casuale.

Assumiamo l'ipotesi nulla H_0 vera, cioè $\mu = \mu_0$. Quindi $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$. Non è nota σ^2, quindi verrà stimata dalla varianza campionaria $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$, dove $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ è la media campionaria. Dalla definizione di livello di significatività:

$$\alpha = \mathbb{P}(\{(X_1, \ldots, X_n) \in R_c\}) = \mathbb{P}(\{\overline{X}_n > \mu_0 + \delta\}) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} > \frac{\delta}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Poiché $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ indipendenti, si ha che $T_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. Quindi

$$\alpha = \mathbb{P}\Big(\Big\{T_{n-1} > \frac{\delta}{S_n/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \,.$$

Introduciamo il valore $t_{n-1,\alpha}$ tale che

$$\mathbb{P}(\{T_{n-1} > t_{n-1,\alpha}\}) = \alpha \,.$$

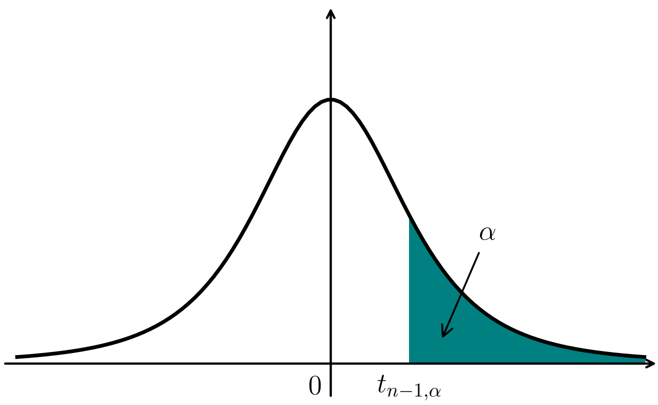


Figura 1: Coda destra della legge t-Student con probabilità α.

Allora, scegliendo

$$\frac{\delta}{S_n/\sqrt{n}} = t_{n-1,\alpha} \implies \delta = \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha} \,,$$

otteniamo la condizione che definisce la significatività.

In conclusione, la regione critica è

$$R_c = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in R(X_1, \ldots, X_n) \ : \ \overline{x}_n > \mu_0 + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}\Big\} \,,$$

e decidiamo come segue:

- Se $\overline{x}_n > \mu_0 + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}$, i dati sono sufficientemente significativi da rifiutare H_0. L'ipotesi nulla H_0 viene rifiutata (con livello di significatività α).
- Se $\overline{x}_n \leq \mu_0 + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha}$, i dati non sono sufficientemente significativi da rifiutare. L'ipotesi nulla H_0 non viene rifiutata (con livello di significatività α).

Calcoliamo sui dati:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7}(2111 + 2410 + 1600 + 3900 + 1988 + 1875 + 2250) \simeq 2304.86\,.$$

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}_n^2\Big) \\ &= \frac{1}{6}\Big(2111^2 + 2410^2 + 1600^2 + 3900^2 + 1988^2 + 1875^2 + 2250^2 - 7\cdot 2304.86^2\Big) \simeq 563005.44\,, \end{aligned}$$

da cui

$$s_n = \sqrt{563005.44} \simeq 750.34\,.$$

Dalle tavole otteniamo che

$$t_{n-1,\alpha} = t_{6,0.05} \simeq 1.943\,.$$

In conclusione

$$\mu_0 + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha} = 2100 + \frac{750.34}{\sqrt{7}}\cdot 1.943 \simeq 2651.04\,.$$

Poiché $\overline{x}_n = 2304.86 < 2651.04$, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.

2. Dalla tavola della distribuzione t-Student, non possiamo calcolare esplicitamente il p-value. Tuttavia, calcolando il t-score, abbiamo che

$$\frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n/\sqrt{n}} = \frac{2304.86 - 2100}{750.34/\sqrt{7}} = 0.722\,.$$

Osserviamo che $0.722 < 1.440 = t_{6,0.1}$. Quindi il p-value dei dati è maggiore del 10%.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: __________________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: __________________________ Appello: settembre 2024 - I
Matricola: __________________________ Data: 03/09/2024

Esercizio 1. (6 punti) Vengono raccolti i risultati (in metri) nel salto in alto di un campione olimpionico ottenuti negli ultimi anni:

$$2.32 \quad 2.35 \quad 2.37 \quad 2.31 \quad 2.33 \quad 2.30 \quad 2.29 \quad 2.36 \quad 2.37 \quad 2.22$$

1. Calcolare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Disegnare il box-plot dei dati.
4. Calcolare il 35-esimo percentile (esclusivo).

Soluzione. 1. Per prima cosa ordiniamo i dati:

$$2.22 \quad 2.29 \quad 2.30 \quad 2.31 \quad 2.32 \quad 2.33 \quad 2.35 \quad 2.36 \quad 2.37 \quad 2.37\,.$$

Abbiamo $n = 10$ dati.

Calcoliamo il primo quartile: $\frac{n+1}{4} = \frac{11}{4} = 2 + 0.75$. Allora

$$Q_1 = (1 - 0.75)x_2 + 0.75x_3 = 0.25 \cdot 2.29 + 0.75 \cdot 2.30 = 2.2975\,.$$

Calcoliamo il secondo quartile: $(n+1)\frac{2}{4} = 11\frac{2}{4} = 5 + 0.5$. Allora

$$Q_2 = (1 - 0.5)x_5 + 0.5x_6 = 0.5 \cdot 2.32 + 0.5 \cdot 2.33 = 2.325\,.$$

Calcoliamo il terzo quartile: $(n+1)\frac{3}{4} = 11\frac{3}{4} = 8 + 0.25$. Allora

$$Q_3 = (1 - 0.25)x_8 + 0.25x_9 = 0.75 \cdot 2.36 + 0.25 \cdot 2.37 = 2.3625\,.$$

2. Per determinare i dati anomali e sospetti calcoliamo il range interquartile

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 2.3625 - 2.2975 = 0.065\,.$$

I dati anomali apparterrebbero agli intervalli

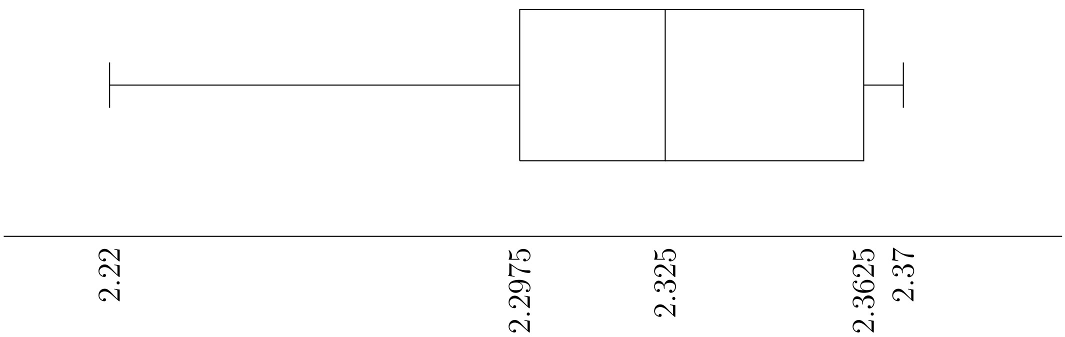
$$(-\infty, Q_1 - 3 \cdot IQR] \cup [Q_3 + 3 \cdot IQR, +\infty) = (-\infty, 2.1025] \cup [2.5575, +\infty)\,,$$

quindi non ci sono dati anomali. I dati sospetti appartengono agli intervalli

$$(Q_1 - 3 \cdot IQR, Q_1 - 1.5 \cdot IQR] \cup [Q_3 + 1.5 \cdot IQR, Q_3 + 3 \cdot IQR) = (2.1025, 2.2] \cup [2.46, 2.5575)\,,$$

quindi non ci sono dati sospetti.

3. Segue il box-plot.



4. Calcoliamo il 35-esimo percentile. Osserviamo che $(n+1)35\% = 11 \cdot 35\% = 3.85$. Allora il 35-esimo percentile è

$$P_{35} = (1 - 0.85)x_3 + 0.85x_4 = 2.3085\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Un piccolo bar in una località turistica pugliese vende pasticciotti. Il bar apre alle 08:00 e sforna ogni ora 4 pasticciotti. Si vuole capire se questa produzione è sufficiente a soddisfare la richiesta dei clienti: il numero di pasticciotti ordinati in un'ora è distribuito con una legge di Poisson con media 3. Si assuma che i numeri di ordini in ore diverse siano indipendenti. (Attenzione: nelle domande seguenti tenere conto del fatto che la richiesta in una fascia oraria può essere maggiore dei pasticciotti disponibili, lasciando alcuni ordini insoddisfatti!)

1. Mostrare che la probabilità che dalle 08:00 alle 09:00 vengano ordinati esattamente 2 pasticciotti è uguale alla probabilità che vengano ordinati 3 pasticciotti.
2. Qual è la probabilità che la richiesta di pasticciotti dalle 08:00 alle 09:00 sia soddisfatta?
3. Calcolare la probabilità che il numero di pasticciotti invenduti dalle 08:00 alle 09:00 sia uguale a k per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
4. Se nella fascia oraria dalle 08:00 alle 09:00 restano dei pasticciotti invenduti, questi vengono offerti nella fascia oraria successiva dalle 09:00–10:00, in aggiunta a quelli sfornati alle 09:00. Qual è la probabilità che la richiesta di pasticciotti della fascia oraria 09:00–10:00 sia soddisfatta? (Suggerimento: Sfruttare i risultati del punto 3.)

Soluzione. 1. Definiamo la variabile aleatoria

$$X = \text{“numero di pasticciotti ordinati dalle 08:00 alle 09:00”} \sim \mathrm{P}(\lambda).$$

Poiché $\mathbb{E}(X) = \lambda$, otteniamo che $\lambda = 3$. Quindi

$$\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} \simeq 22.40\%\,,$$

$$\mathbb{P}(\{X=3\}) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = \frac{e^{-3}3^2}{2!} \simeq 22.40\%\,.$$

2. La richiesta di pasticciotti dalle 08:00 alle 09:00 è soddisfatta se il numero di pasticciotti ordinati è minore o uguale a 4 (ovvero i pasticciotti sfornati). Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \le 4\}) &= \mathbb{P}(\{X=0\}) + \mathbb{P}(\{X=1\}) + \mathbb{P}(\{X=2\}) + \mathbb{P}(\{X=3\}) + \mathbb{P}(\{X=4\}) \\
&= \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^4}{4!} \\
&\simeq 81.53\%\,.
\end{aligned}$$

3. Definiamo la variabile aleatoria

$$Y = \text{“numero di pasticciotti invenduti dalle 08:00 alle 09:00”}$$

e calcoliamo la probabilità richiesta utilizzando la variabile aleatoria X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y=0\}) = \mathbb{P}(\{X \ge 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{X \le 3\}) \\
&= 1 - \Big(\mathbb{P}(\{X=0\}) + \mathbb{P}(\{X=1\}) + \mathbb{P}(\{X=2\}) + \mathbb{P}(\{X=3\})\Big) \\
&= 1 - \Big(\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^3}{3!}\Big) \\
&\simeq 35.28\%\,.
\end{aligned}$$

Per le altre probabilità, si ha semplicemente che (utilizzando anche i risultati del punto 1.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y=1\}) = \mathbb{P}(\{X=3\}) &= \frac{e^{-3}3^3}{3!} \simeq 22.40\%\,, \\
\mathbb{P}(\{Y=2\}) = \mathbb{P}(\{X=2\}) &= \frac{e^{-3}3^2}{2!} \simeq 22.40\%\,, \\
\mathbb{P}(\{Y=3\}) = \mathbb{P}(\{X=1\}) &= \frac{e^{-3}3^1}{1!} \simeq 14.94\%\,, \\
\mathbb{P}(\{Y=4\}) = \mathbb{P}(\{X=0\}) &= \frac{e^{-3}3^0}{0!} \simeq 4.98\%\,.
\end{aligned}$$

4. Definiamo la variabile aleatoria

$$Z = \text{“numero di pasticciotti ordinati dalle 09:00 alle 10:00”} \sim \mathrm{P}(3)\,.$$

Utilizziamo il teorema della probabilità totale, considerando i vari possibili casi di pasticciotti invenduti dalle 08:00 alle 09:00 e utilizzando l'indipendenza tra Z e Y (conseguenza dell'indipendenza tra Z e X):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{“richiesta delle 09:00–10:00 soddisfatta”}) = \\
&= \mathbb{P}(\{Z \le 4\}|\{Y=0\})\mathbb{P}(\{Y=0\}) + \mathbb{P}(\{Z \le 5\}|\{Y=1\})\mathbb{P}(\{Y=1\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{Z \le 6\}|\{Y=2\})\mathbb{P}(\{Y=2\}) + \mathbb{P}(\{Z \le 7\}|\{Y=3\})\mathbb{P}(\{Y=3\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{Z \le 8\}|\{Y=4\})\mathbb{P}(\{Y=4\}) \\
&= \mathbb{P}(\{Z \le 4\})\mathbb{P}(\{Y=0\}) + \mathbb{P}(\{Z \le 5\})\mathbb{P}(\{Y=1\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{Z \le 6\})\mathbb{P}(\{Y=2\}) + \mathbb{P}(\{Z \le 7\})\mathbb{P}(\{Y=3\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{Z \le 8\})\mathbb{P}(\{Y=4\})\,.
\end{aligned}$$

Poiché Z e X sono identicamente distribuite, si ha che

$$\mathbb{P}(\{Z \le 4\}) = \mathbb{P}(\{X \le 4\}) = 81.53\%\,.$$

Quindi resta solo da calcolare

$$\mathbb{P}(\{Z \leq 5\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 4\}) + \mathbb{P}(\{Z = 5\}) = 81.53\% + \frac{e^{-3}3^5}{5!} \simeq 86.51\%\,,$$

$$\mathbb{P}(\{Z \leq 6\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 5\}) + \mathbb{P}(\{Z = 6\}) = 86.51\% + \frac{e^{-3}3^6}{6!} \simeq 91.55\%\,,$$

$$\mathbb{P}(\{Z \leq 7\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 6\}) + \mathbb{P}(\{Z = 7\}) = 91.55\% + \frac{e^{-3}3^7}{7!} \simeq 93.71\%\,,$$

$$\mathbb{P}(\{Z \leq 8\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 7\}) + \mathbb{P}(\{Z = 8\}) = 93.71\% + \frac{e^{-3}3^8}{8!} \simeq 94.52\%\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“richiesta delle 09:00–10:00 soddisfatta”})\\ &\simeq 81.53\% \cdot 35.28\% + 86.51\% \cdot 22.40\% + 91.55\% \cdot 22.40\% + 93.71\% \cdot 14.94\% + 94.52\% \cdot 4.98\%\\ &= 87.36\%\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3. (8 punti) Un chiosco in uno stabilimento balneare vende gelati. Il tempo che impiega un cliente a scegliere il gelato è distribuito con legge uniforme tra 10 secondi e 60 secondi.

1. Qual è la probabilità che un cliente scelga il gelato in meno di 30 secondi?
2. Quali sono la media e la deviazione standard del tempo di scelta del gelato?
3. Arrivano due persone in coppia al chiosco. Iniziano a scegliere insieme il gelato indipendentemente. Il tempo in cui la loro ordinazione termina è il massimo tra i due tempi di scelta. Qual è la probabilità che l'ordinazione della coppia termini in più di 30 secondi?
4. Arrivano 10 clienti che scelgono i gelati indipendentemente. Qual è la probabilità che (strettamente) più di 4 di essi impieghino più di 30 secondi per scegliere il gelato?
5. In un momento della giornata vengono serviti 40 clienti indipendenti in sequenza (un cliente inizia a scegliere il gelato solo dopo che il cliente precedente ha terminato). Utilizzare il Teorema del Limite Centrale per stimare la probabilità che in totale il chiosco sia impegnato a servire i 40 clienti per più di 25 minuti.

Soluzione. 1. Consideriamo

$$X = \text{“tempo di scelta del gelato”} \sim \mathrm{U}(10, 60)\,.$$

Allora

$$\mathbb{P}(\{X < 30\}) = \int_{10}^{30} \frac{1}{60-10}\,\mathrm{d}x = \frac{20}{50} = 40\%\,.$$

2. Poiché $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Quindi

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{10+60}{2} = 35\,,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(60-10)^2}{12} = 208.33 \implies \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \simeq 14.43\,.$$

3. Consideriamo le variabili aleatorie indipendenti X_1 e X_2 che rappresentano i tempi di scelta del gelato delle due persone, con $X_1, X_2 \sim \mathrm{U}(10, 60)$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\max\{X_1, X_2\} > 30\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{\max\{X_1, X_2\} \leq 30\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq 30\} \cap \{X_2 \leq 30\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leq 30\})\mathbb{P}(\{X_2 \leq 30\}) = 1 - 0.4^2 = 84\% \,.\end{aligned}$$

4. Definiamo la variabile aleatoria Y che rappresenta il numero di clienti che impiegano più di 30 secondi per scegliere il gelato. Allora $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$ dove $n = 10$ è il numero di tentativi e

$$p = \mathbb{P}(\{X > 30\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 30\}) = 1 - 0.4 = 0.6 \,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y > 4\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{Y = 0\}) - \mathbb{P}(\{Y = 1\}) - \mathbb{P}(\{Y = 2\}) - \mathbb{P}(\{Y = 3\}) - \mathbb{P}(\{Y = 4\}) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.6^0 (1 - 0.6)^{10} - \binom{10}{1} 0.6^1 (1 - 0.6)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} 0.6^2 (1 - 0.6)^8 - \binom{10}{3} 0.6^3 (1 - 0.6)^7 - \binom{10}{4} 0.6^4 (1 - 0.6)^6 \\ &\simeq 83.38\% \,.\end{aligned}$$

5. Consideriamo le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{U}(10, 60)$ con $n = 40$. Il tempo totale impegnato a servire i clienti è $X_1 + \cdots + X_n$. Poiché n è grande ($n \geq 30$), grazie al Teorema del Limite Centrale possiamo approssimare la media campionaria standardizzata $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ con una variabile aleatoria normale standard $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Utilizzando i risultati del punto 2., otteniamo quindi che (25 minuti sono 1500 secondi)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_1 + \cdots + X_n > 1500\}) &= \mathbb{P}(\{\overline{X}_n > 37.5\}) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{37.5 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) \\ &\simeq \mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{45 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{Z > \frac{37.5 - 35}{14.43/\sqrt{40}}\Big\}\Big) \\ &\simeq \mathbb{P}(\{Z > 1.095\}) = 86.32\% \,.\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le tavole per calcolare l'ultima probabilità.

Esercizio 4. (7 punti) Si vuole stimare la variabilità della temperatura in una località estiva di montagna. Vengono misurate le seguenti temperature (in gradi Celsius) in momenti diversi di una giornata:

23 27 30 31 26 23 22 21

Per risolvere l'esercizio, si assuma che la temperatura abbia distribuzione normale.

1. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza bilaterale al 90% per la varianza della temperatura. (N.B.: derivare le formule)

2. Un intervallo di confidenza al 93% sarebbe più grande o più piccolo di quello calcolato nel punto precendente?

3. Le misurazioni vengono ripetute per vari giorni consecutivi e per ogni giorno viene calcolato l'intervallo di confidenza al 90% come nel punto 1. Qual è la probabilità che la prima volta in cui la varianza appartiene all'intervallo di confidenza sia il quinto giorno?

Soluzione. 1. Abbiamo a che fare con una popolazione $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e un campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ estratto dalla popolazione con $n = 8$. Sia μ che σ^2 non sono note.

Dalla definizione di IC si ha che

$$90\% = \beta = \mathbb{P}(\{U_n \leq \sigma^2 \leq V_n\})\,.$$

Per stimare σ^2 sfrutteremo lo stimatore varianza campionaria $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. Poiché $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sono indipendenti, $Q_{n-1} = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. Allora

$$\begin{aligned}
\beta = \mathbb{P}(\{U_n \leq \sigma^2 \leq V_n\}) &= \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{(n-1)S_n^2}{V_n} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\{\frac{(n-1)S_n^2}{V_n} \leq Q_{n-1} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{V_n}\Big\}\Big) - \mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} > \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Segue che

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{V_n}\Big\}\Big) + \mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} > \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big) = 1 - \beta = \alpha = 10\%\,.$$

Decidiamo di equipartire α:

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{V_n}\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} > \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big) = \frac{\alpha}{2}\,,$$

da cui

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} > \frac{(n-1)S_n^2}{U_n}\Big\}\Big) = \frac{\alpha}{2}\,, \quad \mathbb{P}\Big(\Big\{Q_{n-1} \geq \frac{(n-1)S_n^2}{V_n}\Big\}\Big) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,.$$

Definiamo $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ e $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ come i punti tali che

$$\mathbb{P}(\{Q_{n-1} \geq \chi^2_{n-1,\alpha/2}\}) = \frac{\alpha}{2}\,, \quad \mathbb{P}(\{Q_{n-1} \geq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,.$$

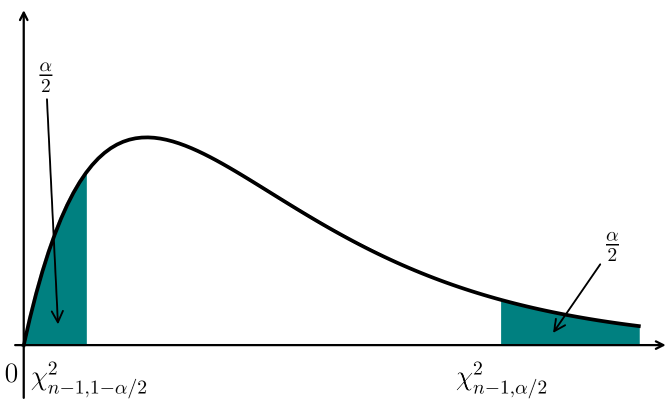


Figura 1: Definizione di $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ e $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$.

Scegliendo

$$\frac{(n-1)S_n^2}{U_n} = \chi^2_{n-1,\alpha/2} \implies U_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\,,$$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{V_n} = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \implies V_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\,,$$

si ottiene la condizione che definisce l'intervallo di confidenza. In conclusione

$$\Big[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\Big]$$

è un intervallo di confidenza bilaterale per σ^2 con livello di confidenza $\beta = 1-\alpha$.

Calcoliamo la sua realizzazione sui dati:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{8}(23+27+30+31+26+23+22+21) = 25.375\,,$$

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}_n^2\Big) \\ &= \frac{1}{7}\Big(23^2+27^2+30^2+31^2+26^2+23^2+22^2+21^2-8\cdot 25.375^2\Big) \\ &\simeq 13.98\,, \end{aligned}$$

e dalle tavole

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{7,0.05} \simeq 14.067\,, \quad \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{7,0.95} \simeq 2.167\,.$$

Quindi l'intervallo di confidenza al 90% per la varianza della temperatura calcolato sui dati è

$$\Big[\frac{7\cdot 13.98}{14.067}, \frac{7\cdot 13.98}{2.167}\Big] \simeq [6.96, 45.16]\,.$$

2. Un intervallo di confidenza al 93% sarebbe più grande di quello calcolato nel punto precedente, poiché il livello di confidenza è maggiore. Infatti, al crescere di β, decresce α, cresce quindi il quantile $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ e decresce $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$. Poiché questi termini compaiono a denominatore nell'intervallo di confidenza, esso diventa più ampio.

3. Consideriamo la variabile aleatoria

$$Y = \text{“primo giorno in cui la varianza appartiene all'IC al 90\%”} \sim \mathrm{Geo}(p)\,,$$

dove

$$p = 90\%\,.$$

Allora

$$\mathbb{P}(\{Y=5\}) = (1-p)^4 p = (1-0.9)^4\cdot 0.9 = 0.009\%\,.$$