PRECORSO DI MATEMATICA 2021/2022 – CLASSE N

LEZ. 3
01/10/2021

Teorema (divisione tra polinomi):
Siano $P(x)$ e $D(x)$ polinomi con $\deg D(x) \leq \deg P(x)$ e $D(x) \neq 0$. Allora esistono un polinomio $Q(x)$ e un polinomio $R(x)$ t.c.

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

e $R \equiv 0$ oppure $\deg R < \deg D$.

P : dividendo
D : divisore
Q : quoziente
R : resto

Osservazione: Se a è radice di $P(x)$, dividendo $P(x)$ per $(x-a)$:

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R(x),$$

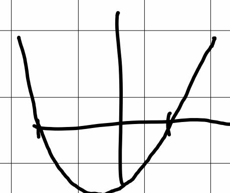
$R \equiv 0$ oppure $\deg R(x) = 0$

$$0 = P(a) = R(a)$$

Esercizio: $x^4+2x^3+6x^2+5x-14$ diviso per

$(x-1)(x+2) = x^2+x-2$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & +6x^2 & +5x & -14 & x^2+x-2 \\
x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & \\ \hline
// & x^3 & +8x^2 & +5x & -14 & x^2+x+7 \\
 & x^3 & +x^2 & -2x & & \\ \hline
 & // & 7x^2 & +7x & -14 & \\
 & & 7x^2 & +7x & -14 & \\ \hline
 & & // & // & // &
\end{array}$$



$\Delta < 0$

$x^4+2x^3+6x^2+5x-14 = (x-1)(x+2)\cdot(x^2+x+7)$

$x^4+2x^3+6x^2+5x-14 \geq 0$ $\qquad x \leq -2$ o $x \geq 1$

<u>Esercizio</u>: $x^3+4x^2+2x-3<0$

$1: \quad 1+4+2-3 \neq 0$

$-1: \quad -1+4-2-3 \neq 0$

$3: \quad \dots \neq 0$

$-3: \quad -27+36-6-3 = 0 \quad \checkmark$

dividiamo per $(x+3)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +4x^2 & +2x & -3 & x+3 \\
x^3 & +3x^2 & & & \\
\hline
// & x^2 & +2x & -3 & x^2+x-1 \\
 & x^2 & +3x & & \\
\hline
 & // & -x & -3 & \\
 & & -x & -3 & \\
\hline
 & & // & // &
\end{array}
$$

$\Delta > 0$

$$x^3+4x^2+2x-3 = (x+3)\cdot(x^2+x-1)$$

$$x^3+4x^2+2x-3 = (x+3)\cdot(x^2+x-1)$$

$$\Delta = 1+4 = 5$$

Radici di x^2+x-1 sono: $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$(x+3)\cdot\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0$$

$$-3 \overset{?}{<} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad 3 \overset{?}{>} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$6 \overset{?}{>} 1+\sqrt{5} \qquad\qquad 5 \overset{?}{>} \sqrt{5} \qquad \text{sì}$$

	-3		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
$x+3$	$-$		$+$		$+$	$+$
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$-$		$-$		$+$	$+$
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-$		$-$		$-$	$+$
	$-$		$+$		$-$	$+$

$x<-3$ oppure $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$(-\infty,-3)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Esercizio: $\dfrac{x^2-4x+4}{5x^2-x} < 0$

Attenzione: $5x^2 - x \neq 0$ $\qquad$ $x(5x-1) \neq 0$

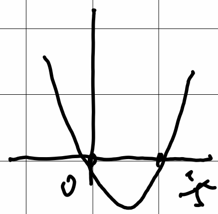
$x(5x-1) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = \frac{1}{5}$

$x(5x-1) \neq 0 \iff$ $\underline{x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{5}}$

$\dfrac{(x-2)^2}{x(5x-1)} < 0$ $\qquad$ $(x-2)^2 \geq 0$

$x(5x-1) > 0$

se $x < 0$ o $x > \frac{1}{5}$



$\downarrow$

verificata per $x \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$

Esercizio: $\dfrac{|x+7|}{x-1} \geq 0$

Attenzione: $x - 1 \neq 0$ $\quad$ $x \neq 1$

$|x+7| \geq 0$

$x - 1 > 0$ per $x > 1$

Soluzione $(1, +\infty)$

Esercizio: $\dfrac{|x-7|}{x-1} > 0$

$|x-7| \geq 0$

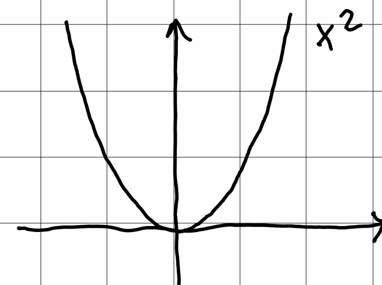
$x - 1 > 0$ per $x > 1$ $\quad$ $(1, +\infty) \setminus \{7\}$

Esercizi: $\sqrt{3x-1} \geq 2$

Attenzione: ben definita per

$$3x-1 \geq 0$$

$$x \geq \frac{1}{3}$$



Poiché $t \mapsto t^2$ è crescente per $t \in [0,+\infty)$:

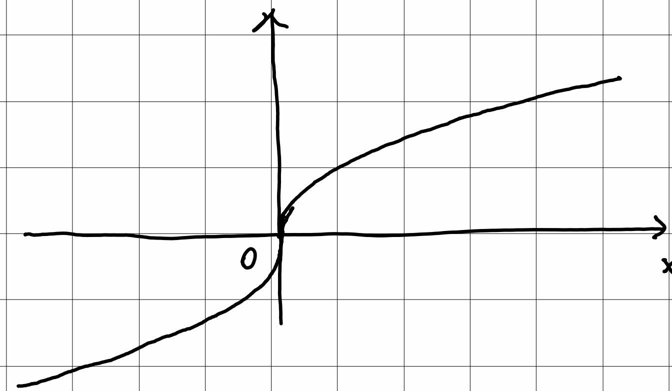
$$3x-1 \geq 4 \qquad 3x \geq 5 \qquad x \geq \frac{5}{3}$$

Soluzione $x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

- $\sqrt{3x-1} < -2$

Sempre falsa per $3x-1 \geq 0$ $\quad x \geq \frac{1}{3}$.

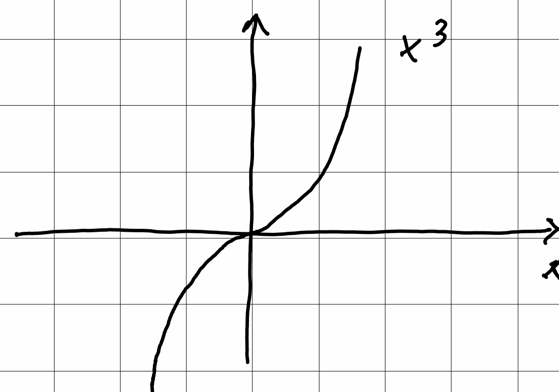
- $\sqrt[3]{3x-1} < -2$



Poiché $t \mapsto t^3$ è strettamente crescente per $t \in \mathbb{R}$:

$$3x-1 < -8$$
$$3x < -7$$
$$x < -\frac{7}{3}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$$



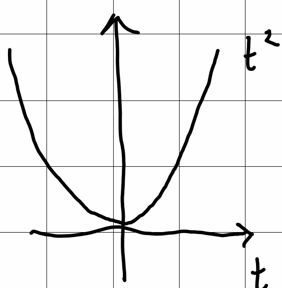
- $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < 1$

Attenzione: È ben definita per $2x+1 \geq 0$ e $x-1 \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{2}$ e $x \geq 1$

$$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap [1, +\infty) = \underline{[1, +\infty)}$$

$t \longmapsto t^2$ è strettamente crescente per $t \in [0, +\infty)$



I CASO: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < 0$?

$\sqrt{2x+1} < \sqrt{x-1}$

$2x+1 < x-1$

$x < -2$

$(-\infty, -2) \cap [1, +\infty) = \emptyset$

II caso: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} \geq 0$?

$$\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{x-1}$$

$$2x+1 \geq x-1$$

$$x \geq -2 \quad \text{sempre verificata}$$

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < 1$$

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$\underline{2x} + \cancel{1} + \underline{x} - \cancel{1} - 2\sqrt{(2x+1)(x-1)} < \underline{1}$$

$$3x - 1 < 2\sqrt{(2x+1)(x-1)}$$

I caso: $3x-1<0 \qquad x < \frac{1}{3}$

$$\left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right) \cap [1, +\infty) = \emptyset$$

II caso: $3x-1 \geq 0 \qquad x \geq \frac{1}{3}$

$$(3x-1)^2 < 4 \cdot (2x+1)(x-1)$$

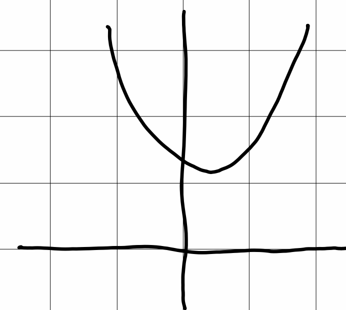
$$(3x-1)^2 < 4\cdot(2x+1)(x-1)$$

$$9x^2-6x+1 < 4(2x^2-x-1) =$$

$$= 8x^2-4x-4$$

$$x^2-2x+5<0$$

$$\Delta = 4-20<0$$



Non è verificata per alcun x per cui è ben definita l'espressione nella disequazione.

In conclusione, la disequazione non è verificata per alcun $x\in\mathbb{R}$ (per cui è ben definita)

$\cdot \quad \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < 0$

$$\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$\frac{2x+1 - x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{x+2}{\cdot}$$

$\sqrt{2x+1} < \sqrt{x-1}$

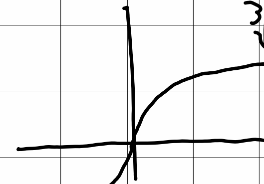
$2x+1 < x-1$

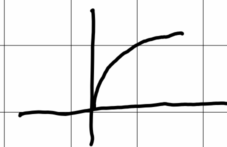
$x < -2$

Esercizio: (per casa)

$$\frac{\sqrt[3]{(3-2x)x}-x}{\sqrt{x^2-4}-x} \leq 0$$

$\sqrt[3]{\cdot}$

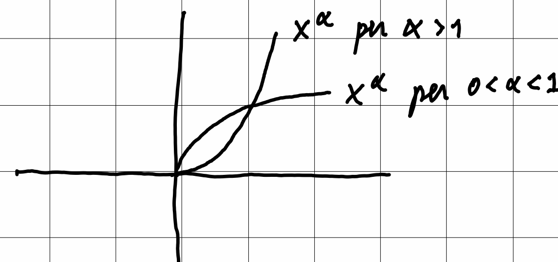


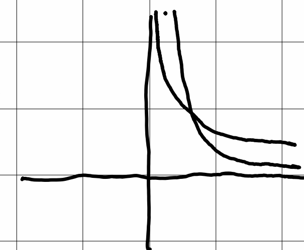


Funzione esponenziale

Da non confondere con la funzione potenza reale

$x \longmapsto x^{\alpha}$, $(\alpha > 0$ per $x \geq 0)$, $(\alpha < 0$, $x > 0)$

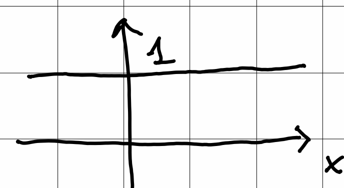




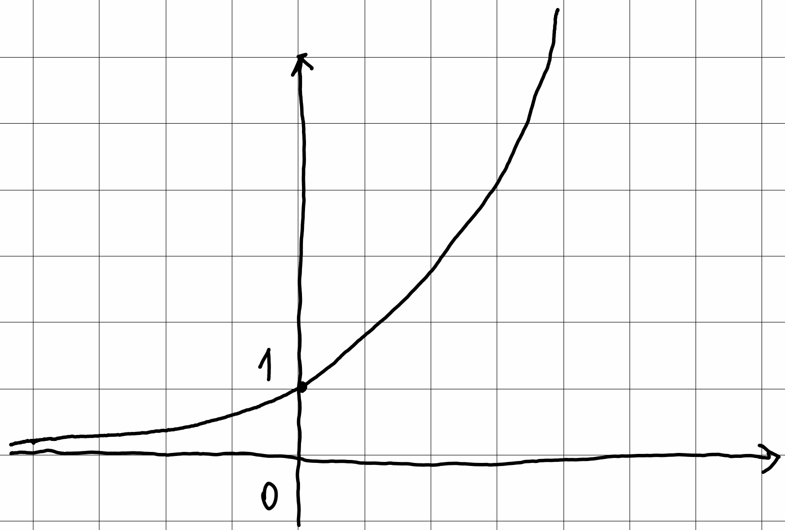
Def: La funzione esponenziale con base $a \in (0, +\infty)$ è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) := a^{x}$$

$a = 1$ $\qquad 1^{x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$a > 1$



$x_1 < x_2$ $\qquad a^{x_1} < a^{x_2}$ $\qquad a^0 = 1$

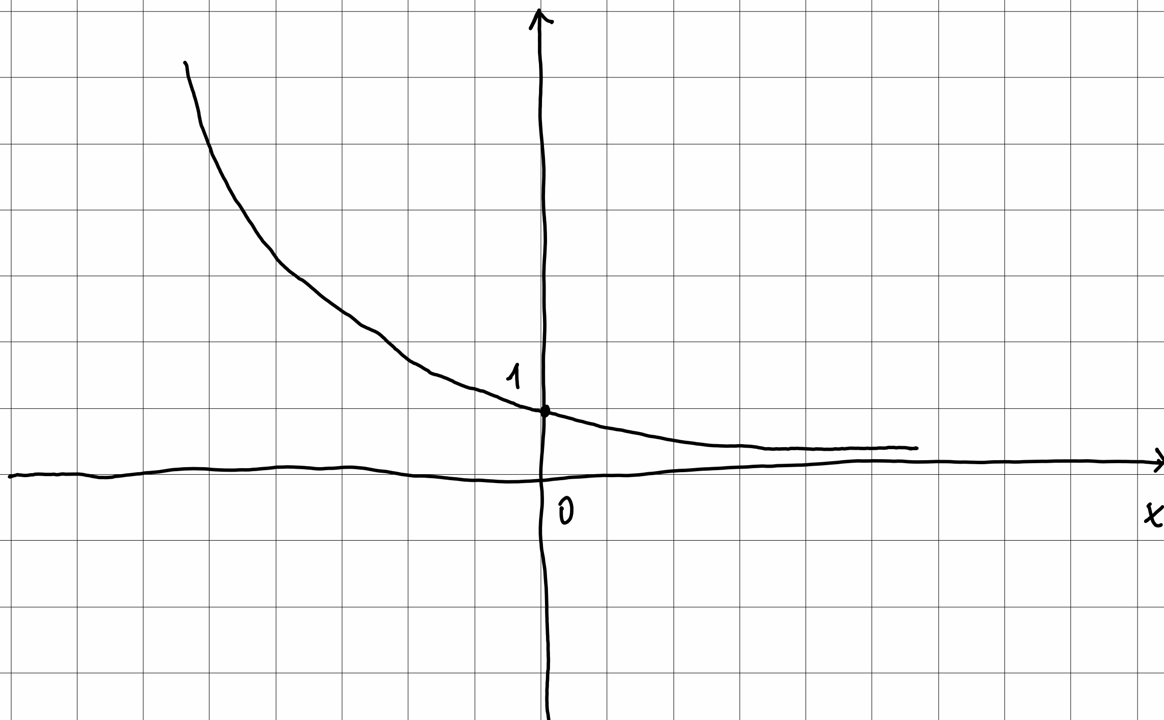
$a^x \geq 0$

$1 < a$ $\qquad x_2 - x_1 > 0$ $\qquad \underline{a^x > 0}$

$1 < a^{x_2 - x_1}$ $\qquad a^{x_1} < a^{x_1} a^{x_2 - x_1} = a^{x_2}$

$0 < a < 1 \qquad 1 < \frac{1}{a}$

$$a^x = a^{-(-x)} = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$



$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è iniettiva e suriettiva (quindi biettiva)

<u>Def</u>: l'inversa di $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ si chiama <u>logaritmo con base</u> a e si denota con $\log_a$

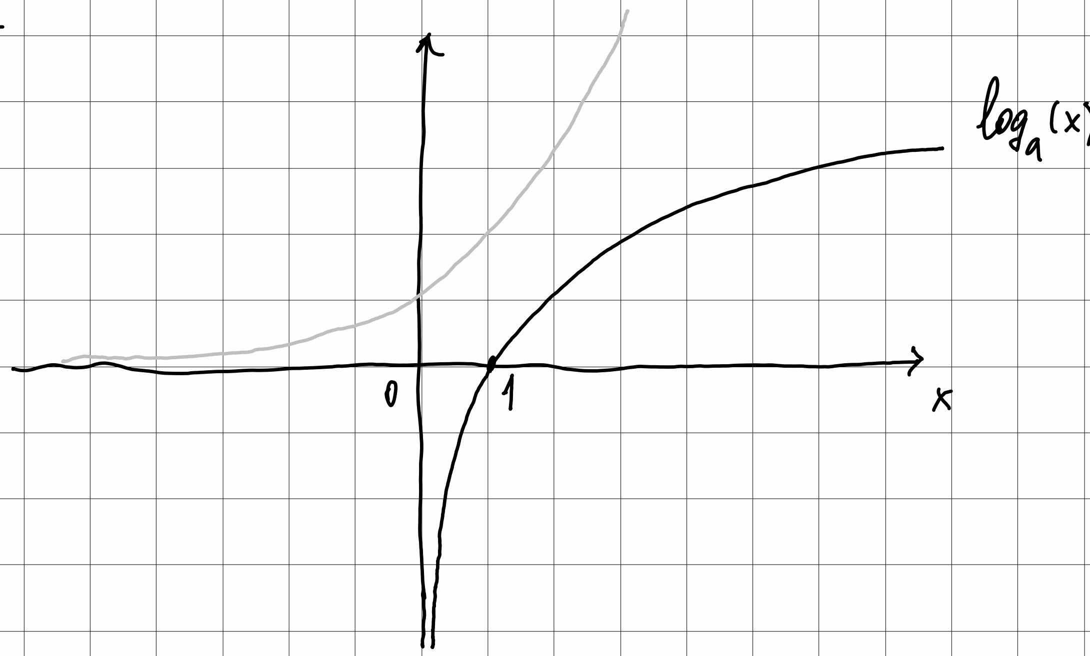
$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

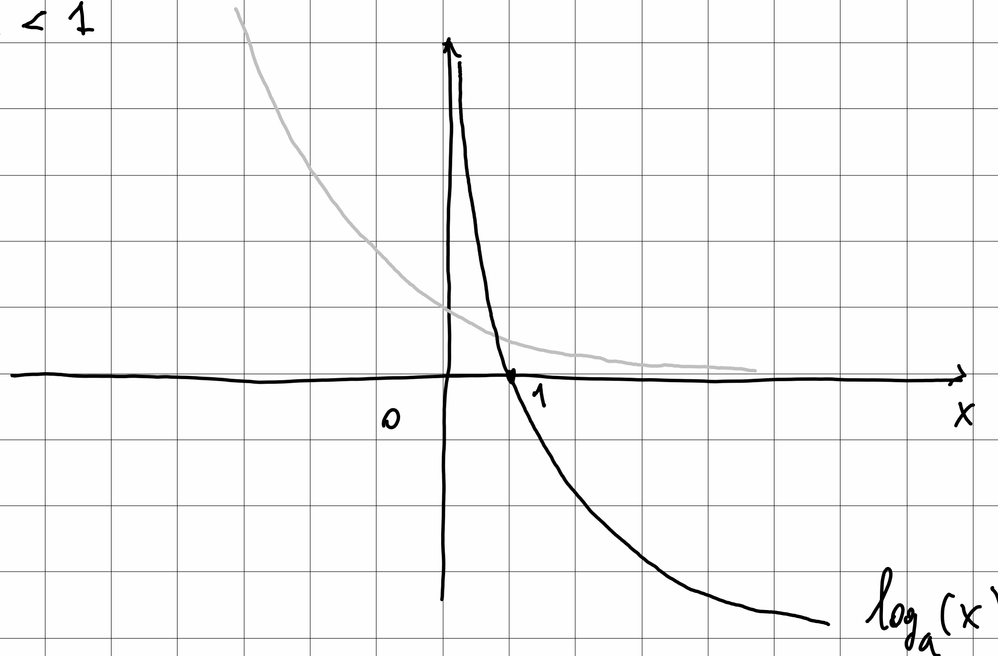
$\log_a$ è ben definito per $a > 1$ e $0 < a < 1$ (non è definito per $a = 1$)

$\log_a x$ è ben definito per $x > 0$

$a > 1$



$0 < a < 1$



$a = e$ log   ln

$a = 10$ Log

Proprietà:

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = x y = a^{\log_a (x y)}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x y)$$

NO!!! $\log_a (x+y) = \log_a x \cdot \log_a y$ FALSO!!!

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^{y \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = (x)^y = \cancel{a}\, x^y = a^{\log_a (x^y)}$$

$$\log_a (x^y) = y \log_a x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$$

$$a^0 = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

$\log_a x$ in termini di una base b

$$\underline{x = a^{\log_a x}} = b^{\log_b x} = b^{\log_b a \frac{\log_b x}{\log_b a}} =$$

$$= \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{\log_b x}{\log_b a}} = \underline{a^{\frac{\log_b x}{\log_b a}}}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-\underbrace{\log_a a}_{1}} = -\log_a x$$

<u>Esercizi</u>: Calcolare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log_\pi\left(\sqrt{x^2-4x+3} - 2x + 1\right)$$

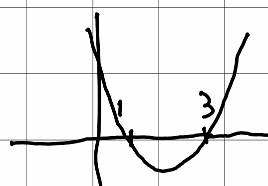
$\sqrt{x^2-4x+3}$ è ben definita per $x^2-4x+3 \geq 0$

$\log_\pi(\cdot)$ è ben definita per $\sqrt{x^2-4x+3} - 2x + 1 > 0$

f è ben definita per l'insieme ottenuto dall'intersezione.

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \qquad (x-3)(x-1) \geq 0$$

$$\underline{x \leq 1 \text{ oppure } x \geq 3}$$



$$\sqrt{x^2-4x+3} - 2x + 1 > 0$$

$$\sqrt{x^2-4x+3} > 2x - 1$$

I CASO: $2x - 1 < 0$ $\qquad \underline{x < \frac{1}{2}}$

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap \Big((-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \Big) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

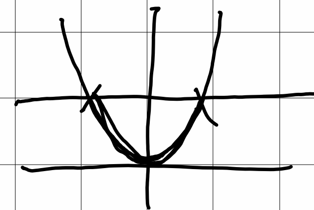
La disequazione è sempre verificata per $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

II CASO: $2x - 1 \geq 0$ $\qquad \underline{x \geq \frac{1}{2}}$

$t \longmapsto t^2$ è strettamente crescente per $t \in [0, +\infty)$

$$x^2 - 4x + 3 > (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - \cancel{4x} + 3 > 4x^2 - \cancel{4x} + 1$$



$$3x^2 < 2 \qquad x^2 < \frac{2}{3}$$

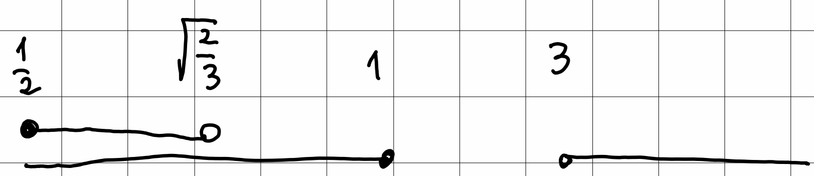
$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \overset{?}{<} \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} < \frac{1}{4} \qquad 8 < 3 \text{ NO.}$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cap \left(\left(-\infty, 1\right] \cup \left[3, +\infty\right)\right) = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$



In conclusione: $x \in (-\infty, \sqrt{\frac{2}{3}})$

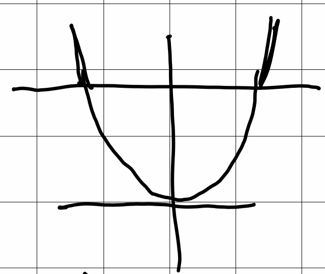
<u>Esercizio</u>: Dominio di $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{\log(x^2-3)}}$

1. $\log(x^2-3)$ e' ben definito per $x^2-3>0$

2. $\dfrac{1}{\log(x^2-3)}$ e' ben " " $\log(x^2-3) \neq 0$

3. $\sqrt{\cdot}$ e' " " per $\dfrac{x^2-2x+3}{\log(x^2-3)} \geq 0$

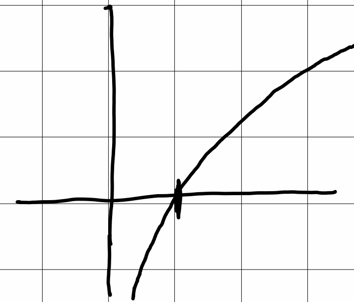
1. $x^2-3>0$ $\quad x^2>3$



$x<-\sqrt{3}$ o $x>\sqrt{3}$

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

2. $\log(x^2-3)=0$



$x^2-3=1$

$x^2=4$

$x=2$ oppure $x=-2$

$2>\sqrt{3}$ $\qquad$ $4>3$

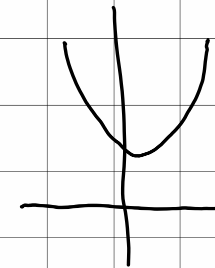
$\log(x^2-3)\neq 0$ per $x\neq 2$ e $x\neq -2$

$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)\setminus\{2,-2\}$

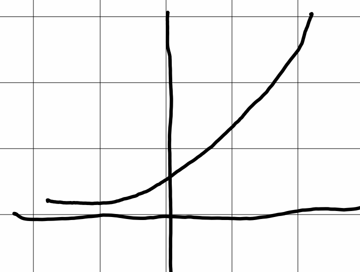
3. $$\frac{x^2-2x+3}{\log(x^2-3)} \geq 0$$

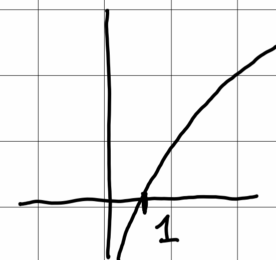
$x^2-2x+3 \geq 0$ $\quad \Delta = 4-12 < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2-2x+3 > 0$



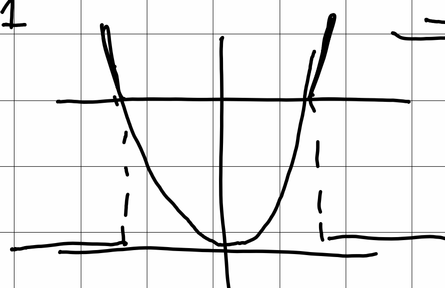
$\log(x^2-3) > 0$





$x^2-3 > 1$

$x^2 > 4$



$x < -2$ oppure $x > 2$

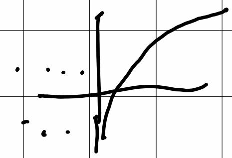
In conclusione: la disuguaglianza è verificata per x nell'insieme

$$\Big(\big((-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)\big)\setminus\{2,-2\}\Big)\cap\Big(\big((-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\big)\Big)$$

$$=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

Quindi questo è l'insieme di definizione di f

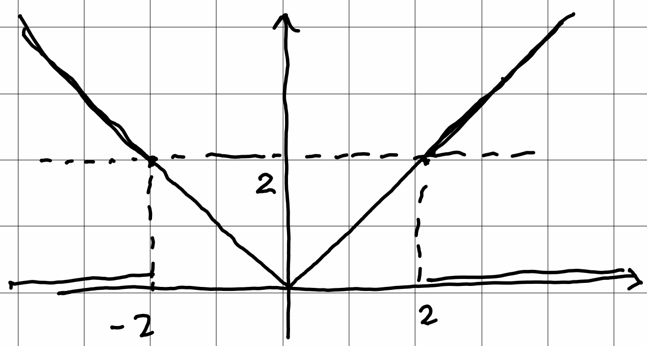
• Dominio di $\sqrt{\log_2 (|x|-2)^2 - 4}$



1. $\log_2(|x|-2)$ è ben definita per $|x|-2 > 0$

2. $\sqrt{\cdot}$ è ben definita per $\log_2(|x|-2)^2 - 4 \geq 0$

1. $|x|-2 > 0$ $\quad |x| > 2$ $\quad$ per $x < -2$ oppure $x > 2$

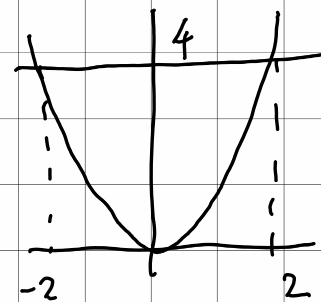


$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- $\log_2 (|x|-2)^2 - 4 \geq 0$

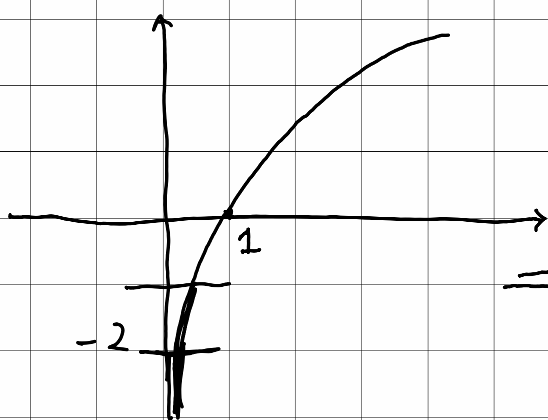
$y := \log_2 (|x|-2)$

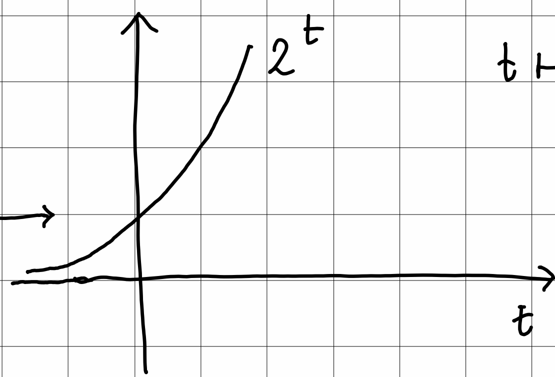
$y^2 - 4 \geq 0 \qquad y^2 \geq 4$



$y \leq -2$ oppure $y \geq 2$

$\log_2 (|x|-2) \leq -2$ oppure $\log_2 (|x|-2) \geq 2$





$t \mapsto 2^t$ è crescente

$\log_2(|x|-2) \leq -2$ oppure $\log_2(|x|-2) \geq 2$

$2^{\log_2(|x|-2)} \leq 2^{-2}$ oppure $2^{\log_2(|x|-2)} \geq 2^2$

$|x| - 2 \leq \frac{1}{4}$ oppure $|x| - 2 \geq 4$

$|x| \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ oppure $|x| \geq 6$

$|x| \leq \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ $\quad -\frac{9}{4} < x < \frac{9}{4}$

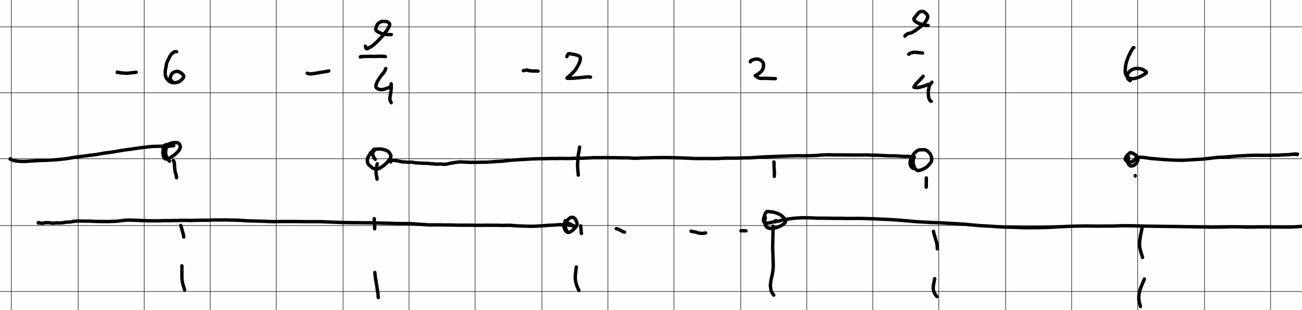
oppure

$|x| \geq 6$ $\quad x < -6$ oppure $x > 6$

$\left(-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right) \cup (-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$

intersezione

$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



$$(-\infty, -6) \cup \left(-\frac{9}{4}, -2\right) \cup \left(2, \frac{9}{4}\right) \cup (6, +\infty)$$

- $\log(x^2) \neq 2\log(x)$

$x^2 > 0 \qquad x \neq 0$

$\log(|x|^2) = 2\log(|x|)$

$\log x^y = y \log x$

- $4^x + 1 \geq 0$

Vera per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$8^x + 4^x - 2^{2+x} - 4 \le 0$$

$$(2^3)^x + (2^2)^x - 4 \cdot 2^x - 4 \le 0$$

$$\overset{\shortparallel}{(2^x)^3} \qquad \overset{\shortparallel}{(2^x)^2} \qquad\qquad y := 2^x$$

$$y^3 + y^2 - 4y - 4 \le 0$$

$$y^2(y+1) - 4(y+1) \le 0$$

$$(y+1)(y^2-4) \le 0$$

$$(y+1)(y-2)(y+2) \le 0$$

	-2		-1		2	
$y+1$	$-$		$-$	$+$		$+$
$y-2$	$-$		$-$	$-$		$+$
$y+2$	$-$		$+$	$+$		$+$

$y \le -2$ oppure

$-1 \le y \le 2$

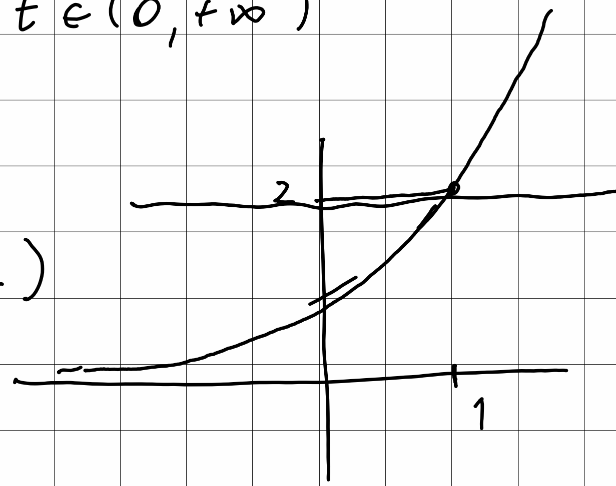
$$\underbrace{2^x \leq -2}_{\text{mai}} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{-1 \leq 2^x \leq 2}_{2^x \leq 2}$$

$t \mapsto \log_2(t)$ è crescente per $t \in (0, +\infty)$

$$\log_2(2^x) \leq \log_2 2$$

$$x \log_2(2) \leq \log_2(2)$$

$$\underbrace{x \leq 1}$$



- $$e^{x} + e^{-x} \leq 2$$

$$e^{x} + \frac{1}{e^{x}} \leq 2$$

$$y := e^{x} > 0$$

$$y + \frac{1}{y} \leq 2$$

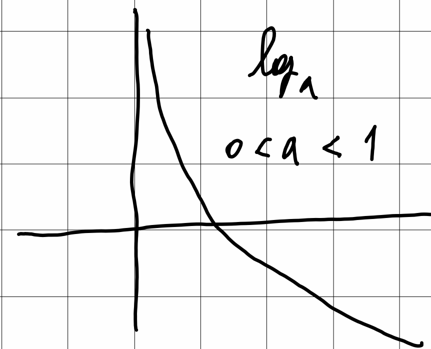
$$y^2 + 1 \leq 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 \leq 0$$

$(y-1)^2 \leq 0$ ~~mai~~ vera per $y = 1$

• $(x+1)^{x^2-1} > 1$

$\log_{x+1}$



Attenzione: $x+1>0$
$x>-1$

I CASO: $x+1>1$

$$\log_{x+1}(x+1)^{x^2-1} > \log_{x+1} 1$$

$$(x^2-1)\underbrace{\log_{x+1}(x+1)}_{1} > 0$$

$$x^2-1>0$$

II CASO:

$0 < x+1 < 1$

$$\log_{x+1}(x+1)^{x^2-1} < \log_{x+1} 1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-1<0$$

III CASO: $x+1=1 \Rightarrow x=0$ $\quad 1^{-1} > 1$ falsa

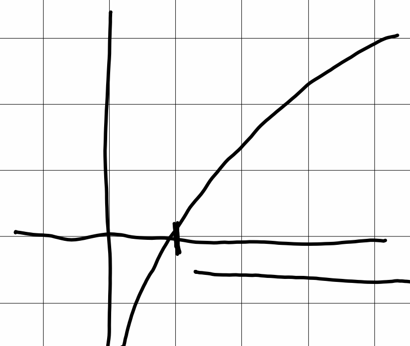
• $\log_{(x-2)} (2x^2 - 13x + 21) > 0$

$2x^2 - 13x + 21 > 0$

Ben definita $0 < x - 2 < 1$ oppure $1 < x - 2$

I CASO: $x - 2 > 1$

$2x^2 - 13x + 21 > 1$

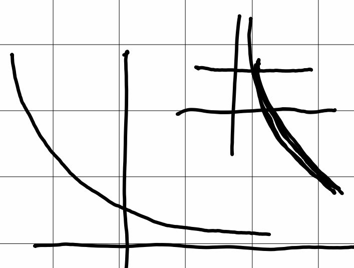


II CASO: $0 < x - 2 < 1$

$0 < 2x^2 - 13x + 21 < 1$

$\log_{\frac{1}{2}} x < 1$

$x > \frac{1}{2}$



Esercizi:

- $$\frac{8^{1+x}+8^{x}}{9} \geq 4^{1+2x} + \frac{16}{4^{1-2x}}$$

- $$\sqrt{\left(\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}(x)\right)^2 - \log_3 x - 1} - \log_3 x + 1 > 0$$

- $$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$$

- $$\log\left(x^4 - 4x^2 + 5\right) \geq \log\left(x^2+1\right)$$

- $$\left(\frac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} < 3$$

- $x|x| - |x-1| + 3 \geq 0$

- $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-|5x+6|} \leq 0$

- $\dfrac{\sqrt[3]{(3-2x)x} - x}{\sqrt{x^2-4} - x} \leq 0$

Soluzioni degli esercizi.

- $$\frac{8^{1+x}+8^{x}}{9} \geq 4^{1+2x} + \frac{16}{4^{1-2x}}$$

$$2^{3x} \geq 8\, 2^{4x}$$

$2^{3x} > 0$, quindi possiamo dividere per 2^{3x} senza cambiare il verso della disuguaglianza

$$1 \geq 8 \cdot 2^{x} \iff 2^{x} \leq \frac{1}{8} \iff 2^{x} \leq 2^{-3} \iff x \leq -3$$

Soluzione: $(-\infty, -3]$

- $\sqrt{\left(\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}(x)\right)^2 - \log_3 x - 1} - \log_3 x + 1 > 0$

1. $\log_3 x$ e $\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} x$ ben definiti per $\underline{x > 0}$

2. $\sqrt{\cdot}$ ben definita per $\left(\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}(x)\right)^2 - \log_3 x - 1 \geq 0$

Osserviamo che:

$$\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}(x) = \frac{\log_3(x)}{\log_3 3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\log_3(x)}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}\log_3(x)$$

Quindi $\left(\log_{3^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}(x)\right)^2 = 2\left(\log_3(x)\right)^2$.

Definiamo la variabile ausiliaria $y := \log_3(x)$

La disequazione è equivalente a:

$$2y^2 - y - 1 \geq 0 \iff (2y+1)(y-1) \geq 0 \iff$$

$$\iff y \leq -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad y \geq 1$$

In termini di x: $\log_3 x \leq -\frac{1}{2}$ oppure $\log_3 x \geq 1 \iff$

$$\iff \underline{x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{oppure} \quad x \geq 3}$$

Quindi l'espressione nella disequazione è ben definita per

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup [3, +\infty).$$

Risolviamo la disequazione in y:

$$\sqrt{2y^2 - y + 1} > y - 1$$

I CASO: $y-1<0$

questo vuol dire $y<1 \iff \log_3 x < 1$

$\iff x<3$

In questo caso la disuguaglianza

$$\sqrt{2y^2-y+1} > y-1$$

è sempre vera. Intersecando con i valori di x ammissibili:

$$x \in [0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}]$$

II CASO: $y-1 \geq 0$. Usiamo il fatto che $t \mapsto t^2$ è monotona crescente per $t \in [0,+\infty)$:

$$2y^2-y+1 > y^2-2y+1 \iff y^2+y>0 \iff$$

$$\iff y(y+1)>0 \iff y<-1 \lor y>0$$

Per l'ipotesi sul caso II, otteniamo che la disuguaglianza è vera per $y \geq 1$, cioè

$$\log_3 x \geq 1 \iff x \geq 3 .$$

Intersecando con i valori di x ammissibili:

$$x \in [3, +\infty) .$$

Uniamo i due casi.

Concludiamo che la disuguaglianza assegnata è vera

$$\forall x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup [3, +\infty)$$

- $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$

L'espressione è ben definita per $\underline{x > 0}$

Poniamo: $y := \log_{\frac{1}{2}} x$.

La disequazione è equivalente a:

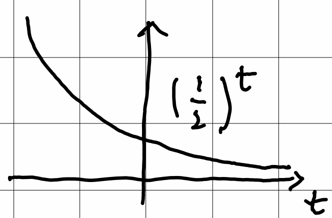
$$y^2 - y - 2 < 0 \iff (y-2)(y+1) < 0 \iff$$
$$\iff -1 < y < 2$$

$$-1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\underline{\tfrac{1}{4} < x < 2}$$

La funzione $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t$ è strettamente decrescente



- $\log(x^4 - 4x^2 + 5) \geq \log(x^2+1)$

L'espressione è ben definita per:

1: $x^4 - 4x^2 + 5 > 0$: $\Delta = 16 - 20 < 0$

$\uparrow$ sempre vera

2: $x^2+1 > 0$: sempre vera

$t \mapsto e^t$ è crescente:

$$x^4 - 4x^2 + 5 \geq x^2 + 1$$
$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$$
$$(x^2-4)(x^2-1) \geq 0$$
$$(x-2)(x+2)(x-1)(x+1) \geq 0$$

		-2		-1		1		2	
$(x+2)$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$(x+1)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

Soluzione: $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} < 3$

$3^{-(1-12x)x} < 3$

$\log_3(\cdot)$ è strettamente crescente, quindi

$$-(1-12x)x < 1$$
$$12x^2 - x - 1 < 0$$
$$12x^2 - 4x + 3x - 1 < 0$$
$$(4x+1)(3x-1) < 0 \iff -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

Soluzione: $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

- $x|x| - |x-1| + 3 \geq 0$

Discutiamo i casi possibili per il segno degli argomenti dei valori assoluti:

		0		1	
x	$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$

I caso: $x < 0$: la disequazione diventa:

$$-x^2 + x - 1 + 3 \geq 0 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff$$

$$\iff (x-2)(x+1) \leq 0 \iff x \in [-1, 2].$$

Intersecando con la condizione di questo caso:

$$x \in [-1, 0).$$

II caso: $0 \leq x < 1$

$$x^2 + x - 1 + 3 \geq 0$$

$$x^2 + x + 2 \geq 0 \quad \text{sempre vera}$$

$$x \in [0, 1)$$

III caso: $1 \leq x$

$$x^2 - x + 1 + 3 \geq 0$$

$$x^2 - x + 4 \geq 0 \quad \text{sempre vera}$$

$$x \in [1, +\infty)$$

Unendo i tre casi, la disuguaglianza è vera per $x \in [-1, +\infty)$.

• $$\frac{x^2+5x+4}{x^2-|5x+6|} \leq 0 \qquad x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$$

Discutiamo i casi per l'argomento del valore assoluto.

I CASO: $5x+6 \geq 0$ cioè $x \geq -\frac{6}{5}$ $\quad x \in \left[-\frac{6}{5}, +\infty\right)$

Il denominatore diventa

$$x^2-5x-6 = (x-6)(x+1)$$

È diverso da 0 per $\underline{x \neq -1 \text{ e } x \neq 6}$

(entrambi i valori sono in $\left[-\frac{6}{5}, +\infty\right)$.

La disequazione diventa

$$\frac{(x+4)(x+1)}{(x-6)(x+1)} \leq 0$$

$(x+1) \neq 0$, quindi $\frac{x+1}{x+1} = 1$.

$$\frac{(x+4)}{(x-6)} \leq 0$$

Vera per $x \in [-4, 6)$

Intersecando con $[-\frac{6}{5}, +\infty) \setminus \{-1\}$ otteniamo

$$\underline{x \in [-\frac{6}{5}, 6) \setminus \{-1\}}$$

II CASO: $5x+6 < 0$ cioè $x < -\frac{6}{5}$ $\quad x \in (-\infty, -\frac{6}{5})$

Il denominatore diventa

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$$

è diverso da zero per $x \neq -3$ e $x \neq -2$,
entrambi nell'intervallo $(-\infty, -\frac{6}{5})$

La disequazione diventa:

$$\frac{(x+4)(x+1)}{(x+3)(x+2)} \le 0$$

		-4		-3		-2		-1	
$x+4$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x+3$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$$x \in [-4,-3) \cup (-2,-1]$$

Intersecando con $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$

$$x \in [-4,-3) \cup \left(-2, -\frac{6}{5}\right)$$

Unendo i due casi:

$$x \in [-4, -3) \cup (-2, -1) \cup (-1, 6)$$

- $$\frac{\sqrt[3]{(3-2x)x} - x}{\sqrt{x^2-4} - x} \leq 0$$

1: $\sqrt{x^2-4}$ ben definita per $x^2-4 \geq 0$, cioè $x^2 \geq 4$, cioè $\underline{x \leq -2 \text{ o } x \geq 2}$

$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2: Il denominatore è ben definito per

$$\sqrt{x^2-4} - x \neq 0$$
$$\sqrt{x^2-4} \neq x$$

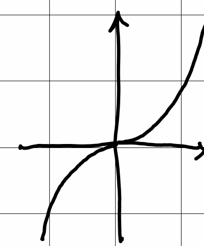
Vera per ogni x ammissibile.

Troviamo i valori per cui

$$\sqrt[3]{(3-2x)x} - x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{(3-2x)x} \geq x$$

La funzione $t \longmapsto t^3$ è crescente:



$$(3-2x)x \geq x^3$$

$$x^3 + 2x^2 - 3x \leq 0$$

$$x(x^2 + 2x - 3) \leq 0$$

$$x(x+3)(x-1) \leq 0$$

		-3		0		1	
$x+3$	$-$		$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

$$x \in (-\infty, -3] \cup [0, 1]$$

Intersecando con $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$:

$$\underline{x \in (-\infty, -3]}$$

Troviamo i valori per cui

$$\sqrt{x^2-4} - x > 0$$

$$\sqrt{x^2-4} > x$$

I caso: $x < 0$: sempre vera. Intersecando con i valori ammissibili $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ la disuguaglianza è vera per

$$\underline{x \in (-\infty, -2]}$$

II caso: $x \geq 0$

$$\sqrt{x^2-4} > x \iff x^2-4 > x^2 \iff -4 > 0$$

mai verificata.

Mettendo insieme i risultati:

		-3		-2	
$\sqrt[3]{(3-2x)x}-x$	$-$		$+$		$+$
$\sqrt{x^2-4}-x$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

Quindi il rapporto $\dfrac{\sqrt[3]{(3-2x)x}-x}{\sqrt{x^2-4}-x}$ è ≤ 0

quando

$$x \in [-3, -2]$$

Osservo che $\sqrt[3]{(3-2x)x}-x=0$ per $x=0$, $x=1$, $x=-3$ e -3 è l'unico valore nell'insieme ammissibile $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$. Soluzione: $x \in [-3,-2]$