PRECORSO DI MATEMATICA 2021/2022 - CLASSE N

LEZ. 1
29/09/2021

Proposizione : p può essere <u>vera</u> o <u>falsa</u>.

$p \land q$ congiunzione p e q

$p \lor q$ disgiunzione p oppure q

$\neg p$ negazione

$p \Rightarrow q$ implicazione : $\neg p \lor q$

$\neg p \lor \neg(\neg q)$

$p \Leftrightarrow q$ equivalenza $\neg(\neg q) \lor \neg p$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

$p(x)$: predicati

Quantificatori

$\forall$: per ogni

$\exists$: esiste

$\forall x : p(x)$ $\qquad\qquad$ $\exists x$ t.c. $p(x)$

$\exists !$ esiste uno e un solo

Esercizi: Negare "tutti i gatti sono neri"

$\neg(\forall x : p(x))$ è $\exists x$ t.c. $\neg p(x)$

"Esiste un gatto che non è nero"

$\neg(\exists x \text{ t.c. } p(x))$ è $\forall x : \neg p(x)$

Negare "se $\underbrace{\text{c'è il sole}}_{p}$ allora $\underbrace{\text{faccio una passeggiata}}_{q}$"

$$p \Rightarrow q$$

$\neg(\neg p \vee q)$ è $(\neg(\neg p)) \wedge (\neg q)$

$$p \wedge \neg q$$

"c'è il sole e non faccio una passeggiata"

INSIEMI

$\exists\, \emptyset$ t.c. $\forall\, x$: $x \notin \emptyset$ $\qquad \emptyset$ = "insieme vuoto"

$X \qquad x \in X$ "appartiene"

$X = \{a, b, c, d, e\} \qquad a \in X$

$= \{b, c, e, d, a\}$

$A \subset X$ (o $A \subseteq X$)

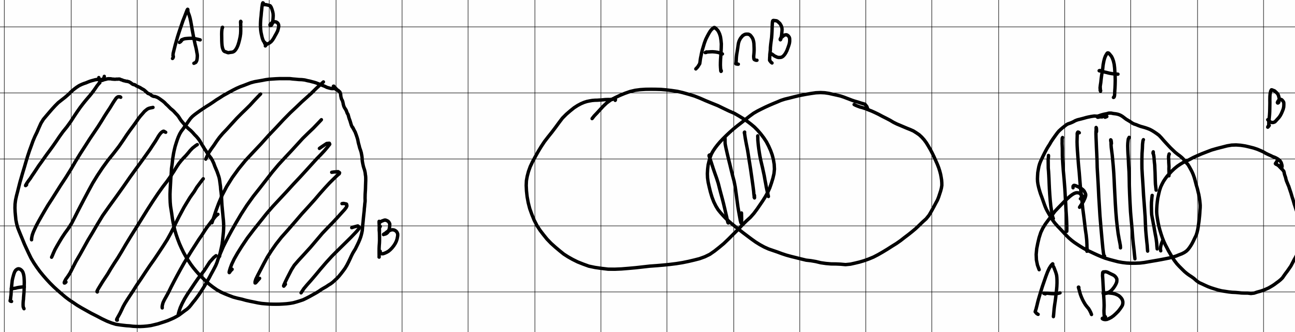
$\forall x \in A : x \in X$ $\qquad A = B$ se e solo se $A \subset B$ e $B \subset A$

$A, B \subset X$

Unione : $x \in A \cup B \iff x \in A$ oppure $x \in B$

Intersezione: $x \in A \cap B \iff x \in A$ e $x \in B$

Differenza : $x \in A \setminus B \iff x \in A$ e $x \notin B$



Complementare : X $\quad A \subset X$

$$A^c := X \setminus A$$

$A \subset X \;,\; B \subset X$

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B \}$$

Prodotto cartesiano : X, Y insiemi

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X ,\ y \in Y \}$$

Esercizi:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $(x \in B$ oppure $x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A$ e $(x \notin B$ e $x \notin C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ e $x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N}$: numeri naturali

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

  $n, m \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $n + m \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $m \cdot n = \underbrace{m + \dots + m}_{n\text{-volte}}$

  Cercare gli $x \in \mathbb{N}$ t.c. $x + 2 = 0$

  Non ha soluzione in $\mathbb{N}$

- $\mathbb{Z}$: numeri interi

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

  $m, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $m \cdot n \in \mathbb{Z}$

  $(-1) \cdot (-1) = 1$

Equazione : $mx + n = 0$

$2x + 3 = 0$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Q}$ = numeri razionali

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$-\frac{3}{4}, \ \frac{2}{3}$ $\qquad$ $x = -\frac{3}{2}$

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff m n' = m' n$$

$x \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $x^n := \overbrace{x \cdot \ldots \cdot x}^{n\text{-volte}}$

$n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali

$(\mathbb{R}, +)$

associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x+y)+z = x+(y+z)$

elemento neutro: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}: x+0 = x$

opposto: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}$ t.c. $x+(-x) = 0$

commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x+y = y+x$

$(\mathbb{R}, \cdot)$

associativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$

elemento neutro per $\cdot$: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 1 = x$

reciproco: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \exists\, \frac{1}{x} = x^{-1}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$

commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x\cdot y = y \cdot x$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

distributiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x+y)\cdot z = x\cdot z + y \cdot z$

$(\mathbb{R}, \leq)$ relazione d'ordine

riflessiva: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y, \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

antisimmetrica: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

totale: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ oppure $y \leq x$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ z \geq 0: \quad x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

<u>completezza</u>

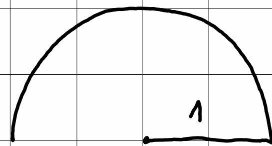
$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } 2 \leq x^2\}$$

in $\mathbb{Q}$: non è vero che esiste $z \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$\forall x \in A, \ \forall y \in B: \quad x \leq z \leq y$$

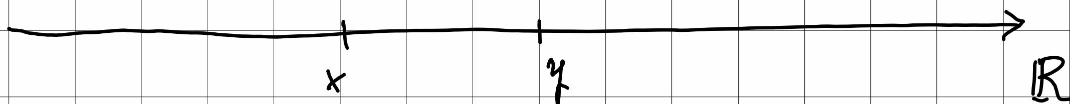
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ elemento di separazione tra A e B

π



e

Retta reale $\qquad x \le y$



Intervalli: $a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad a \le x$ e $a \neq x$

$[a,b] := \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$

$(a,b] := \,]a,b] := \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}$

(a,b) , $[a,b)$

$[a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \}$

$(a, +\infty)$

$(-\infty, b] := \{ x \in \mathbb{R} : \ x \leq b \}$

$(-\infty, b)$

<u>Esercizi</u>: Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $5x - 3 \leq 7 - 3x$

$$8x - 3 \leq 7$$

$$8x \leq 10$$

$$\cancel{\tfrac{1}{8}}\,\cancel{8}x \leq \frac{10}{8} \qquad x \leq \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{8}_{\,4}}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$$

- $(x-1)(x+3) \geq 0$

$x-1 \geq 0$ se $x \geq 1$

$x+3 \geq 0$ se $x \geq -3$

		-3		1	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(x+3)$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$x \leq -3$ oppure $x \geq 1$

$x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

- $\dfrac{x-2}{x-3} \geq 1$

Attenzione: $x-3 \neq 0$, $\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}}$

$x-2 \geq x-3$ NO!

$$\frac{x-2}{x-3} - 1 \geq 0 \iff \frac{x-2-(x-3)}{(x-3)} \geq 0$$

$$\iff \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+3}{(x-3)} \geq 0 \iff \frac{1}{(x-3)} \geq 0$$

$x-3 \geq 0$ $\quad x \geq 3$

$x-3 > 0$ $\quad x > 3$ $\quad x \in (3, +\infty)$

$* \quad \dfrac{x-2}{x-3} \geq 1$

I CASO: $\quad x-3>0$

$$x-2 \geq x-3$$

$-2 \geq -3$ è vera

$*$ vera per $x \in (3, +\infty)$

II CASO: $\quad x-3<0$

$$x-2 \leq x-3$$

$-2 \leq -3$ falsa

$*$ falsa per $x \in (-\infty, 3)$

In conclusione: $*$ vera per $x \in (3, +\infty)$

- $$\frac{3}{x-1} \leq \frac{2}{x+1} \iff$$

$$\iff \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0 \iff \frac{3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

Attenzione: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \iff \frac{(x+5)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

		-5		-1		1		$\mathbb{R}$
$(x+5)$	$-$		$+$		$+$		$+$	
$(x+1)$	$-$		$-$		$+$		$+$	
$(x-1)$	$-$		$-$		$-$		$+$	
	$-$		$+$		$-$		$+$	

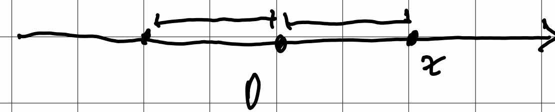
$x \leq -5$ oppure $-1 < x < 1$ $\qquad (-\infty, -5] \cup (-1, 1)$

Valore assoluto. Sia $x \in \mathbb{R}$

Valore assoluto $\Updownarrow$ modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0$$



$(*)$ $x \leq |x|$

I caso: $x \geq 0$

$(*)$: $x \leq x$ ✓

II caso: $x < 0$

$(*)$: $x \leq -x \iff 2x \leq 0$ ✓

$$-x \leq |x|$$

- $|3| = 3 \qquad |-3| = 3$
- $|\underbrace{-x}_{y}| = |y| = |x|$ $\qquad y := -x$

I CASO: $y \geq 0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$

$|y| = y = -x$

II CASO: $y < 0 \iff -x < 0 \iff x > 0$

$|y| = -y = x$

<u>Esercizio</u>: • $|x-3| = 7 \quad (*)$

I CASO: $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$

$(*)$: $x - 3 = 7 \iff x = 10$

II CASO: $x - 3 < 0 \iff x < 3$

$(*)$: $-x + 3 = 7 \iff x = -4$

$x = 10$ oppure $x = -4$

$|x-3| = 7 \iff x - 3 = 7$ oppure $x - 3 = -7$

• $||x|+2| = 3$

$$\Updownarrow$$

$$|x|+2 = 3$$

$$|x| = 1$$

$x = 1$ oppure $x = -1$

• $|x| - |x-1| + |x-3| < 5$

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<3$	3	$x>3$	$\mathbb{R}$
x	$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$	

I CASO: $x < 0$

$$-x-(-x+1)+(-x+3) < 5$$

$$-\cancel{x}+\cancel{x}-1-x+3 < 5$$

$$\underline{-3 < x < 0}$$

II CASO: $\underline{0 \le x < 1}$

$$x - (-x+1) + (-x+3) < 5$$

$$x + \cancel{x} - 1 - \cancel{x} + 3 < 5$$

$$x < 3$$

III CASO: $\underline{1 \le x < 3}$

$$x - (x-1) + (-x+3) < 5$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + 1 - x + 3 < 5$$

$$-1 < x$$

IV CASO: $3 \le x$

$$x - (x-1) + (x-3) < 5$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + 1 + x - 3 < 5$$

$$\underline{3 \le x < 7}$$

Soluzione

$$x \in (-3, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 3) \cup [3, 7) = (-3, 7)$$

• $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1$

Attenzione! $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

I CASO: $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$: $x < -1$ oppure $x \geq 1$

		-1		1		$\mathbb{R}$
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$	
	$+$		$-$		$+$	

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \quad ; \quad \frac{x-1}{x+1} - 1 > 0 \quad ; \quad \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{x+1} > 0$$

$$-\frac{2}{x+1} > 0 \iff \frac{2}{x+1} < 0$$

$$x+1 < 0 \qquad \underline{x < -1}$$

II caso: $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$ $\qquad -1 < x < 1$

$$-\frac{x-1}{x+1} > 1 \iff -\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$$

$$\iff \frac{-x+\cancel{1}-x-\cancel{1}}{x+1} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{-2x}{x+1} > 0 \iff \frac{x}{x+1} < 0$$

		-1		0	
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$\underline{-1 < x < 0}$

$x < -1$ oppure $-1 < x < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

<u>Potenze</u>: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$x^n := \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-volte}}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad x^0 := 1$$

$n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 0$ $\qquad x \neq 0$

$$x^{n+m} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n+m} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-volte}} \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m\text{-volte}}$$

$$= x^n \cdot x^m$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad x^{-n} := \dfrac{1}{x^n}$

$$1 = x^n \cdot \frac{1}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$n, m \in \mathbb{Z} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x^{n+m} = x^n x^m$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad x \cdot x^{-1} = 1$$

$m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{x \geq 0}}$

$$x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^{\frac{m}{n} \cdot n} = x^m$$

Esempio: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \geq 0$

- $\sqrt{x}$ è quel numero reale $\overset{\geq 0}{r}$ tale che $(\sqrt{x})^2 = x$

- $\sqrt{x}$ è ben definito se $x \geq 0$

Fissato $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ è la soluzione dell'equazione nella variabile y:

$$y^2 = x \geq 0$$

Non c'è un numero reale y t.c.

$$y^2 = x$$

se $x < 0$

Non c'è un numero reale y t.c. $y^2 = -1$

$\sqrt[2]{x}$ è un numero reale ben definito se $x \geq 0$

$\sqrt[2n]{x}$ è un " " " $x \geq 0$

$$y^{2n} = x \qquad (y^n)^2 = x \geq 0$$

$\sqrt[3]{x}$ $\qquad x \geq 0$

se $x < 0$ definiamo $\sqrt[3]{x} := -\sqrt[3]{-x}$

$$x < 0: \quad (\sqrt[3]{x})^3 = (-\sqrt[3]{-x})^3 = (-\sqrt[3]{-x})(-\sqrt[3]{-x})(-\sqrt[3]{-x})$$
$$= -(\sqrt[3]{-x})^3 = -(-x) = x$$

$y \in \mathbb{R}$ $\qquad y^3 \geq 0$ oppure $y^3 < 0$

$\sqrt[2n+1]{x}$ è un numero reale ben definito se $x \in \mathbb{R}$

Esercizi:
- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{-4}$ non è ben definito in $\mathbb{R}$

- $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 8^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} + (3^2 \cdot 2)^{\frac{1}{2}}$

$$= 2^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}(2+3) =$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+1} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

- $(2-3x)^9 = -11$

$$2 - 3x = \sqrt[9]{-11} = -\sqrt[9]{11}$$

$$3x = 2 + \sqrt[9]{11} \qquad x = \frac{2+\sqrt[9]{11}}{3}$$

- $(1-x)^4 = -1$ Non ci sono $x \in \mathbb{R}$ t.c. $(1-x)^4 = -1$

- $\sqrt{x^2}$ è ben definita per $x^2 \geq 0$, quindi $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2} = x$ NO!

I CASO: $x \geq 0$

$\sqrt{x^2} = x$

II CASO: $x < 0$

$\sqrt{x^2} = -x$

$\sqrt{x^2} = |x|$

- $\sqrt[3]{x^3} = x$

- $(1-x)^4 = 16$ (Trovare gli x t.c.)

↑ Eq. e' ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$\big(\underbrace{(1-x)^2}_{y}\big)^2 = 16$

$y^2 = 16$

$y = \sqrt{16}$ oppure $y = -\sqrt{16}$

$(1-x)^2 = \sqrt{16} = 4$ oppure $\underbrace{(1-x)^2 = -4}_{\text{esclusa}}$

$1-x = \sqrt{4} = 2$ oppure $1-x = -2$

$x = -1$ oppure $x = 3$

Potenze con esponente reale.

$x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x \geq 0}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

x^{α} per approssimazione