Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	A.A.: 2020/2021
Nome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Matricola: ______________________	Appello: VI Appello
Corso di studi: ______________________	Data: 13/09/2021

È richiesto di risolvere *al massimo* 3 dei 5 esercizi in un tempo massimo di 90 minuti.
Il punteggio massimo di ogni esercizio è di 10 punti.
Si può scegliere di rispondere a uno dei due quesiti teorici facoltativi. Il punteggio massimo per i quesiti teorici è di 6 punti.
Indicare esplicitamente sulla traccia gli esercizi e il quesito teorico da valutare.

Esercizio 1. Alice e Bob sono a cena e hanno a disposizione una moneta (con facce "testa" e "croce") per decidere chi deve pagare il conto. Alice sa però che la moneta *non* è bilanciata: "testa" esce con probabilità $\frac{1}{3}$. Ma è onesta e propone a Bob un gioco equo, con cui i due hanno la stessa probabilità di vincere. Il gioco è basato sulla scommessa sull'esito di due lanci consecutivi della moneta. Per descriverlo, si risolvano i seguenti quesiti:

1. Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare due volte consecutivamente la moneta non bilanciata. Si descriva lo spazio campione Ω e si elenchi la probabilità dei suoi elementi (gli eventi elementari).

2. Ci sono eventi elementari equiprobabili in Ω?

3. Basandosi sulla risposta precedente, descrivere il gioco equo proposto da Alice. (Suggerimento: alcuni risultati dell'esperimento possono essere scartati!)

4. Si consideri ora lo stesso gioco con una moneta non bilanciata per cui "testa" esce con probabilità p, dove $p \in [0, 1]$. Per quali valori di p il gioco nel punto 3 non può funzionare?

Esercizio 2. Siano dati gli eventi A e B di uno spazio campione Ω. È noto che $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$ e $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

1. È possibile ricavare i valori numerici di $\mathbf{P}(A)$ e di $\mathbf{P}(B)$? In caso di risposta affermativa, indicarli.

2. Se gli eventi A e B sono indipendenti, è possibile ricavare i valori numerici di $\mathbf{P}(A)$ e di $\mathbf{P}(B)$? In caso di risposta affermativa, indicarli.

3. Cosa si può dire del caso in cui $\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{8}$?

Esercizio 3. Una variabile aleatoria continua X assume valori nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e ha come Funzione di Distribuzione Cumulativa (FDC) una funzione continua $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica

$$F(x) = a\sin(x) + b \quad \text{per ogni } x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big],$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Si determinino i valori a e b in modo che $F(x)$ soddisfi le proprietà di Funzione di Distribuzione Cumulativa. Si descriva la funzione F anche fuori dall'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. Calcolare $\mathbf{P}(0 \le X \le 6)$.
3. Determinare la funzione di densità di probabilità (f.d.p.) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di X.
4. Calcolare $\mathbf{E}(X)$.

Esercizio 4. In un certo procedimento chimico, è di fondamentale importanza che il pH di uno dei reagenti sia 8.20. Si sa che il metodo per misurare il pH fornisce valori con distribuzione normale con media pari al valore autentico e deviazione standard 0.02. Supponiamo che 10 misurazioni indipendenti abbiano dato i seguenti valori:

$$8.18 \quad 8.16 \quad 8.17 \quad 8.22 \quad 8.19 \quad 8.17 \quad 8.15 \quad 8.21 \quad 8.16 \quad 8.18\,.$$

1. Verificare l'ipotesi che il pH sia 8.20 con un livello di significatività del 5%.
2. Verificare l'ipotesi che il pH sia 8.20 con un livello di significatività del 10%.

Esercizio 5. Una sostanza metallica viene esposta ad un'atmosfera di ossigeno puro. L'aumento relativo di massa della sostanza viene utilizzato come indicatore della quantità di ossigeno che ha reagito. I dati raccolti sono i seguenti:

ore di esposizione	1.0	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
incremento percentuale	0.02	0.03	0.035	0.042	0.05	0.054

1. Trovare la retta di regressione che interpola i dati e disegnarla.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione.

Quesito teorico 1 (facoltativo). Enunciare la Disuguaglianza di Chebyshev. Applicare la disuguaglianza per dimostrare il seguente fatto: Data una variabile aleatoria X con media μ e varianza σ^2, la probabilità che i valori di X siano tra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$ è almeno di $\frac{3}{4}$.

Quesito teorico 2 (facoltativo). Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale estratto da una variabile aleatoria X con media μ e varianza σ^2. Sia S^2 la varianza campionaria del campione. Dimostrare che $\mathbf{E}(S^2) = \sigma^2$.