Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica [2959]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________	A.A.: 2020/2021
Nome: ____________________	Docente: Gianluca Orlando
Matricola: ____________________	Appello: febbraio 2022
Corso di studi: ____________________	Data: 21/02/2022

È richiesto di risolvere *al massimo* 3 dei 5 esercizi in un tempo massimo di 90 minuti.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è di 10 punti.

Si può scegliere di rispondere a uno dei due quesiti teorici facoltativi. Il punteggio massimo per i quesiti teorici è di 6 punti.

Indicare esplicitamente sulla traccia gli esercizi e il quesito teorico da valutare.

Consegna: Scansionare la traccia svolta tramite un'app di scansione e inviare un unico file pdf nominato Cognome_Nome.pdf all'indirizzo gianluca.orlando@poliba.it

---

Esercizio 1. Si sa che lo 0,1% degli individui di una popolazione ha una malattia. Un test permette di identificare la malattia con le seguenti sensibilità e specificità:

- se l'individuo ha la malattia, il test risulta positivo il 99% delle volte;
- se l'individuo è sano, il test risulta negativo il 98% delle volte.

Quesiti:

1. Un individuo con la malattia effettua k test indipendenti. Qual è la probabilità che i k test siano tutti positivi?
2. Un individuo sano effettua k test indipendenti. Qual è la probabilità che i k test siano tutti positivi?
3. Un individuo non sa se è sano o malato. Effettua k test, che risultano tutti positivi. Quanto deve essere grande k affinché la probabilità che abbia effettivamente la malattia sia almeno del 90%?

Esercizio 2. Sia $X = (X_1, X_2)$ una variabile aleatoria bidimensionale di tipo discreto con range

$$\{(-1,-1),(0,-1),(1,-1),(-1,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}\,.$$

Si sa che $\mathbf{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{4}$ e che gli altri valori che possono essere assunti sono equiprobabili.

1. Calcolare la probabilità che $X_1 > 0$ sapendo che $X_2 < 0$.

2. Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

3. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

Esercizio 3. Sia X un punto scelto sull'intervallo $[-2, 2]$ secondo una legge uniforme.

1. Calcolare la probabilità che il triangolo equilatero di lato $|X|$ abbia area maggiore di 1.

2. Calcolare il valore atteso dell'area del quadrato di lato $|X|$.

Sia Y un punto scelto sulla retta reale secondo una legge normale standard.

3. Calcolare il valore atteso dell'area del cerchio di raggio $|Y|$.

Esercizio 4. Un campione di ampiezza 21 viene estratto da una popolazione avente densità normale con media μ e varianza σ^2. La realizzazione della varianza campionaria risulta uguale a 2.

1. Determinare un intervallo di confidenza al 90% per la varianza σ^2.

Supponiamo di sapere in aggiunta che la media campionaria del campione sia uguale a 0.

2. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la media μ.

Esercizio 5. Si consideri il seguente campione bivariato di dati:

x	1	2	3	4	5	6
y	2.72	6.34	9.13	12.04	15.16	17.54

1. Rappresentare i dati in un diagramma a dispersione (scatterplot).

2. Determinare la retta di regressione lineare.

3. Disegnare la retta di regressione lineare.

4. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare.

Quesito teorico 1.

1. Fornire un esempio di spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ e di due eventi indipendenti $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}$ con A_1 e A_2 entrambi diversi da $\emptyset$ e Ω.

2. Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità. Siano A_1, $A_2 \in \mathfrak{F}$ due eventi indipendenti. Dimostrare che $\Omega \setminus A_1$ e A_2 sono indipendenti. Dimostrare che $\Omega \setminus A_1$ e $\Omega \setminus A_2$ sono indipendenti.

Quesito teorico 2. Sia X una variabile aleatoria distribuita secondo una legge binomiale $B\big(n, \frac{\lambda}{n}\big)$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X = k)$. Cosa suggerisce il risultato trovato?