МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В.Г.Шухова»

(БГТУ им. В.Г.Шухова)

Кафедра технической кибернетики

Дисциплина: Теория матриц

Практическая работа № 6

Тема: «Приведение квадратичной формы к каноническому виду»

Выполнил:

Студент группы МТК-233

Орлов-Куреши М. Н.

Проверил:

Кариков Е. Б.

Белгород 2023

Цель работы: изучить процесс приведения квадратичной формы к каноническому виду. Реализовать приведение квадратичной формы к каноническому виду на языке программирования Python.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор n – мерного линейного пространства R^n, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты этого вектора в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Квадратичной формой в пространстве R^n называется линейная функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которая определяется по правилу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \text{, где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Матрица $A = (a_{ij})_1^n$ называется ***матрицей квадратичной формы*** в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Квадратичная форма называется ***невырожденной***, если $r(A) = n$ или $\det(A) \neq 0$. Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы A.

Чтобы составить матрицу квадратичной формы, следует на ее диагонали поместить коэффициенты при квадратах переменных, а коэффициенты при произведениях различных переменных разделить пополам и разместить их симметрично главной диагонали. [4]

Квадратичная форма вида:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

называется ***канонической***. Матрица канонической формы является диагональной.

Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы A. Поскольку матрица квадратичной формы является симметричной, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то все собственные значения вещественные, а соответствующие собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Реализация алгоритма на языке программирования Python

Для приведения к каноническому виду используется qr-алгоритм для нахождения собственных значений.

```
def qr_decomposition(self):
        n = self.column
```

```python
        Q = Matrix(self.row, self.column, [0 for _ in range(self.row*self.column)])
        R = Matrix(self.row, self.column, [0 for _ in range(self.row*self.column)])

        for i in range(n):
            # Begin the Gram-Schmidt process
            v = self.get_column(i, 1)

            for j in range(i):
                q_col = Q.get_column(j, 1)
                temp = q_col.dot_sum(self.get_column(i, 1))
                R._elements[j][i] = temp
                q_col.mul_by_num(temp)
                v = v - q_col

            R._elements[i][i] = v.norm()
            v.divide_by_num(R._elements[i][i])
            Q.set_column(v, i)

        return Q, R

    def qr_algorithm(self, max_iter):
        q, r = self.qr_decomposition()
        q_list = []
        for _ in range(max_iter):
            q_list.append(q.copy())
            A_i = r * q
            q, r = A_i.qr_decomposition()

        eigenvalues = [A_i._elements[i][i] for i in range(A_i.row)]


        vectors = q_list[0]

        for i in range(1, len(q_list)):
            vectors = vectors * q_list[i]

        return eigenvalues, vectors
```

Скриншоты работы программы

```
17 | -2 | -2
-2 | 14 | -4
-2 | -4 | 14
Канонический вид:
f(x)=18(x1)^2 + 18(x2)^2 + 9(x3)^2
```

Вывод: в ходе работы было изучено и реализовано приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи qr-алгоритма.

Список литературы

1. Юдин Д.А. Прикладные аспекты теории матриц: учебное пособие / Д.А. Юдин. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2016.