МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В.Г.Шухова»

(БГТУ им. В.Г.Шухова)

Кафедра технической кибернетики

Дисциплина: Теория матриц

Практическая работа № 3

Тема: «Определение скелетного разложения матрицы»

Выполнил:

Студент группы МТК-233

Орлов-Куреши М. Н.

Проверил:

Кариков Е. Б.

Белгород 2023

Цель работы: изучить скелетное разложение. Реализовать скелетное разложение на языке программирования Python.

Скелетное разложение

Скелетное разложение матрицы A порядка $m \times n$ и ранга r - это представление матрицы A в виде произведения двух матриц B и C, где B - $m \times r$ - матрица C- $r \times n$- матрица и rank(B)=r, rank(C)=r.

Пусть A $m \times n$ матрица произвольного ранга r. Тогда матрица A можно представить в виде произведения двух матриц:

$$A=BC, \tag{1}$$

где B $m \times r$ матрица ранга r и C - $r \times n$ матрица ранга r.

Для **скелетного разложения** матрицы A, в качестве строк матрицы Cдостаточно взять r линейно независимых строк матрицы A. Тогда каждая строка матрицы B можно найти из следующих систем линейных уравнений:

$$A_1=B_1C,$$

$$A_2=B_2C,$$

$$\dots$$

$$A_n=B_nC,$$

где A_i - i-ая строка матрицы A, B_i - i-ая строка матрицы B.

Так как C матрица полного ранга и составлен из векторов строк матрицы A, то матрицу B можно вичислить из следующего уравнения:

$$B=AC^+, \tag{2}$$

где C^+ псевдообратная к матрице C вычисляется из выражения

$$C^+=C^T(CC^T)^{-1}.$$

Рассмотрим процесс скелетного разложения на численном примере.

Пример скелетного разложения матрицы

Приведем скелетное разложение матрицы

$$A= \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix} .$$

Для определения линейно независимых строк матрицы A, применим метод исключения Гаусса. Тогда матрица A примет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 5/2 \end{Vmatrix}$$

После второго шага исключения Гаусса, имеем:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Следовательно третья строка линейно зависима. Матрица C строится из всех линейно независимых векторов строк матрицы A:

$$C = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Вычисляем псевдообратную к C матрицу C^{+}:

$$C^{+} = \begin{Vmatrix} 2/15 & 1/3 \\ 1/15 & 0 \\ 1/15 & 1/3 \\ 3/15 & -1/3 \end{Vmatrix}.$$

Наконец, матрица B вычисляется из выражения (2):

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Реализация алгоритма на языке программирования Python

```
    def get_skeleton_decomposition(self):
        triangle_matr, _ = self.get_triangle()
        temp = []
        rank_A = 0
        for row in range(triangle_matr.row):
            if not self._is_zeros(triangle_matr._elements[row]):
                rank_A += 1
                temp.extend(self._elements[row])
        C = Matrix(rank_A, self.column, temp)
        C_inv = C.get_pseudoinverse_matrix()
        B = self * C_inv
        return B, C
```

Скриншоты работы программы

```
[*] Время выполнения: 0 микросекунд:
A:
2 | 1
1 | 0
1 | 1
B:
1.0 | 0.0
0.0 | 1.0
1.0 | -1.0

C:
2 | 1
1 | 0

B * C =
2.0 | 1.0
1.0 | 0.0
1.0 | 1.0
```

```
[*] Время выполнения: 0 микросекунд:
A:
3 | 2 | 6
0 | 2 | 2
B:
1.0 | 0.0
0.0 | 1.0

C:
3 | 2 | 6
0 | 2 | 2

B * C =
3.0 | 2.0 | 6.0
0.0 | 2.0 | 2.0
```

```
[*] Время выполнения: 0 микросекунд:
A:
1 | 2 | 3
4 | 5 | 6
5 | 6 | 6
B:
1.0 | -0.0 | 0.0
-0.0 | 1.0 | 0.0
0.0 | 0.0 | 1.0

C:
1 | 2 | 3
4 | 5 | 6
5 | 6 | 6

B * C =
1.0 | 2.0 | 3.0
4.0 | 5.0 | 6.0
5.0 | 6.0 | 6.0
```

Вывод: в ходе работы было изучено и реализовано скелетное разложение. Сравнить с готов решением нет возможности поскольку в готовых библиотеках не реализовано скелетное разложение.

Список литературы

1. Юдин Д.А. Прикладные аспекты теории матриц: учебное пособие / Д.А. Юдин. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2016. – С. 20-24.