

Домашнее задание по динамической оптимизации в экономике и финансах 2021

Домашнее задание присылается на адрес dinoptef@yandex.ru в виде архива (zip или rar), содержащего 2 или более файлов (текстовый документ, таблицы Excel, файлы с кодом на R или python).

Название архива и название письма должны соответствовать формату:

Номер группы_Фамилия_Excel_R_python.

Пример темы письма: 160_Иванов_Excel_R

Пример названия архива: 160_Иванов_Excel_R.zip

Между словами должны быть нижние подчеркивания. Из названий Excel, R, python нужно выбрать те, которые использовались, и указать их через символ «_». Слово «БЭК» не используется.

В последней части названия должны быть перечислены все программные продукты из набора Excel, R, python, которые использовались в домашнем задании. Задачи, выполненные в разных программных продуктах, будут проверяться разными людьми, поэтому в случае пропуска соответствующего указания в названии часть задач проверена не будет.

Домашние задания, присланные на любые другие адреса электронной почты, или с названием писем и архивов, не соответствующих требуемому формату, НЕ ПРОВЕРЯЮТСЯ.

Проверяющий оставляет за собой право на экзамене задать студенту, сдавшему задание в R или python, вопрос по коду. В случае невразумительного ответа, баллы за задание снимаются.

Все задачи оцениваются одинаково (в 2 балла). Для получения итоговой оценки в 10 баллов требуется решить 5 задач. В условии каждой задачи написано, в какой программе ее можно решать.

Последний срок сдачи: 13 декабря 2021 года 23:59.

Домашнее задание можно сдавать заранее, то есть в любой момент до последнего срока. При доставке письма на указанный адрес (dinoptef@yandex.ru) в ответ будет отправлено автоматическое подтверждение об его получении.

Домашние задания, присланные в период с 0:00 до 5:59 14 декабря 2021 года, штрафуются на 5 баллов из 10.

Домашние задания, присланные после 6:00 14 декабря 2021 года, не проверяются.

В домашнем задании используются следующие параметры: a_1, a_2, a_3 - номер первой, второй и третьей буквы фамилии в алфавите соответственно, b_1, b_2, b_3 - номер первой, второй и третьей буквы имени в алфавите соответственно, c_1, c_2, c_3 - номер первой, второй и третьей буквы отчества (или снова имени, если таковое отсутствует) в алфавите соответственно.

За основу используется алфавит, представленный здесь:

http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D1%84%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%82

Если в фамилии, имени или отчестве букв меньше, чем три, то отсутствующие буквы считаются совпадающими с последней буквой в фамилии, имени или отчестве.

1 Задача Excel, R, python

Численно найдите экстремум функционала

$$\int_0^2 y'^2 + a_1 y' y + b_1 y^2 + c_1 y e^{2t} dt$$

$$y(0) = -b_2, y(2) = b_3$$

2 Задача Excel, R, python

Численно найдите экстремум функционала

$$\int_0^2 (b_1 y - b_2 u) dt$$

$$y' = a_3 y + u$$

$$y(0) = a_1, y(2) \text{ свободно}$$

$$u(t) \in [-c_1, c_2]$$

3 Задача Excel

Вы - аналитик в инвестиционном банке, которому доверено управление портфелем из 3-х депозитных счетов в рублях $S_{rub}(t)$, долларах $S_{doll}(t)$ и евро $S_{euro}(t)$ соответственно. Ежемесячно на остаток на каждом из счетов начисляются проценты по ставкам $r_{rub}(t)$, $r_{doll}(t)$, $r_{euro}(t)$. Дополнительно Вы можете каждый месяц брать кредит в рублях $L_{rub}(t)$ по ставке $r_{rub}^L(t)$. За мгновенные переводы между депозитными счетами банк берет комиссию в размере

$$Co(t) = \alpha S'_{rub}(t)^\beta + \alpha S'_{doll}(t)^\beta + \alpha S'_{euro}(t)^\beta$$

$$\alpha = 0.00001; \beta = 2$$

Ваша задача состоит в построении оптимальной стратегии распределения средств между всеми счетами $S_{rub}(t)$, $S_{doll}(t)$, $S_{euro}(t)$, $L_{rub}(t)$ для максимизации стоимости портфеля. Предполагается, что в последний момент времени деньги со всех счетов выводятся, а кредит гасится:

$$S_{rub}(T) = 0; S_{doll}(T) = 0; S_{euro}(T) = 0; L_{rub}(T) = 0$$

Состояние счетов в начальный момент времени:

N - количество букв в Вашем имени

F - количество букв в Вашей фамилии

Gr - номер вашей группы (171, 183, 1710 etc.)

$$S_{rub}(0) = (N + F) * Gr;$$

$$S_{doll}(0) = \frac{(N + F) * Gr}{50};$$

$$S_{euro}(0) = \frac{(N + F) * Gr}{50};$$

$$L_{rub}(0) = 0.1 * (N + F) * Gr$$

На временном горизонте 3-х лет (36 месяцев) $t \in [0, 36]$:

1. Решите задачу в предположении годовых процентных ставок и фиксированных валютных курсов:

$$r_{rub}(t) = r_{doll}(t) = r_{euro}(t) = 0.07$$

$$r_{rub}^L(t) = 0.05$$

$$\omega_{doll}(t) = 80; \omega_{euro}(t) = 100$$

2. Пусть $r_{doll}(0) = 0.03$ и равномерно растет:

$$r_{doll}(t) = r_{doll}(0) + 0.003t$$

Остальные параметры считайте такими же как в п. 1.

3. Пусть обменный курс евро со второго года ($t = 13$) начал падать на 1 рубль ежемесячно $\omega_{euro}(13) = 100$; $\omega_{euro}(14) = 99$; $\omega_{euro}(15) = 98 \dots$ etc. и так до тех пор пока не выровнялся с курсом доллара. Остальные параметры считайте такими же как в п. 2.

4 Задача Excel

1. Решите задачу 3 используя реальные данные за период с октября 2017 по сентябрь 2021 включительно:

Обменный курс рубля (номинальный курс доллара/евро на конец периода) - https://www.cbr.ru/statistics/macro_itm/svs/

Средневзвешенные процентные ставки по кредитам, предоставленным кредитными организациями физическим лицам в рублях (до 30 дней, включая "до востребования") - https://www.cbr.ru/vfs/statistics/pdco/int_rat/loans_ind.xlsx

Средневзвешенные процентные ставки по привлеченным кредитными организациями вкладам (депозитам) физических лиц и нефинансовых организаций в рублях/долларах/евро (до 1 года, включая "до востребования") - https://www.cbr.ru/vfs/statistics/pdco/int_rat/deposits.xlsx

2. Используя данные из п.4, пусть известны курсы и ставки только до сентября 2020 года включительно. Любым удобным Вам способом постройте прогноз по каждой из экзогенных переменных (курсов и ставок) с октября 2020 года по сентябрь 2021 года. С точки построения прогноза нет единственного правильного способа - здесь у вас полная свобода творчества. Решите задачу и в 2-х предложениях, кратко описав каким образом спрогнозировали значения, сравните результат с результатом в п.4.

5 Задача Excel

Технологическая мощность предприятия $M(t)$ в начале планового периода (5 лет, планирование осуществляется с шагом месяц) оценивалась в

$$M(0) = 100a_1 + 10a_2 + a_3$$

денежных единиц. В течение периода изменение мощности описывается по закону

$$\frac{d}{dt}M(t) = J(t) - \delta M(t),$$

где $J(t)$ - инвестиции текущего месяца, $\delta = \frac{1}{5+c_1}$ - норма амортизации. Имеющаяся в текущем месяце мощность генерирует доход

$$\pi(t) = a_1(M(t))^{0.6},$$

который без остатка делится на

$$\pi(t) = J(t) + CF(t) + Tax(t)$$

где $CF(t)$ - выводимый денежный поток (не может быть отрицательным), $Tax(t) = \frac{1}{5+c_2}\pi(t)$ - налог на доходы предприятия. Месячная безрисковая процентная ставка в течение всего периода равна 0.3%. Рассчитайте оптимальную стратегию наращивания технологической мощности, инвестиций и денежных потоков, максимизирующую NPV. Как изменится стратегия, если:

1. В начале 4 года безрисковая процентная ставка вырастет до 0.5%;
2. Налог на доходы снизится в 2 раза, то есть $Tax(t) = \frac{1}{2(5+c_2)}\pi(t)$;
3. Норма амортизации увеличится в 2 раза, то есть $\delta = \frac{2}{5+c_1}$.

6 Задача R, python

Численно найдите экстремаль следующего функционала:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y'^2 - y^2 dt$$
$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

7 Задача R, python

Численно решите следующую задачу оптимального управления:

$$\int_0^{10} (y(t) - \cos t)^2 + u^2(t) dt \rightarrow \min$$
$$y(0) = 0, u(t) \in \mathbb{R}$$

при следующих уравнениях динамики y :

- (a) $y'(t) = u(t)$
- (b) $y'(t) = u(t) + y(t)$

8 Задача R, python

Популяция осинового улья может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (\alpha u(t) - \beta)x(t), \text{ где } x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= \gamma(1 - u(t))x(t), \text{ где } y(0) = 0 \end{cases}$$

Переменной x обозначается число ос-рабочих, а y - число королев. Константы α, β, γ - положительные действительные числа. α, γ - параметры окружающей среды, β - коэффициент смертности ос-рабочих. Управление $u(t) \in [0, 1]$ - доля улья, тратящая ресурсы на увеличение числа королев.

Численно исследуйте траектории управления и траектории состояния для различных параметров α, β, γ , если задача улья состоит в максимизации числа ос-королев в последний момент времени (его можно выбрать любым, достаточно большим)