1 Varietà differenziabili e funzioni lisce

Definizione 1 (Carta)**.** M insieme. Una carta di M è la coppia (U, x) con:

- $U \subseteq M$
- $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ biiezione[1] e $x(U)$ aperto[2]. x è chiamata parametrizzazione di U.

Definizione 2 (Carte compatibili)**.** Le carte $(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta)$ sono compatibili se $F_{\beta\alpha} = x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}^m$ è diffeomorfismo[3].

TODO:DISEGNO 220301 Osservazioni:

- Una carta è sempre compatibile con sè stessa
- l'inversa di F esiste sempre ma non è detto sia liscia

Definizione 3 (Atlante)**.** $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ collezione di carte di M a due a due compatibili tc $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Definizione 4 (Varietà differenziabile)**.** Coppia $(M, \mathcal{A})$ con $x_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto $\forall \alpha \in I$.

Esempio 1. $M = \mathbb{R}^m$.
L'unica carta è $x = id_{\mathbb{R}^m} : U = M = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.
$id(M)$ aperto essendo immagine di aperto.
$\mathcal{A} = \{(M, id_M)\}$.
Quindi $\mathbb{R}^m$ è varietà.

Esempio 2. $M \subset \mathbb{R}^m$ aperto.
L'unica carta è $x = id_M : U = M \to \mathbb{R}^m$.
$id(M)$ aperto essendo immagine di aperto.
$\mathcal{A} = \{(M, id_M)\}$.
Quindi ogni aperto di $\mathbb{R}^m$ è varietà.

Esempio 3. $M = S^n$ (sfera n-dimensionale). TODO: DA FARE 220301

Dato che esiste una definizione di mappe lisce su $\mathbb{R}^m$ posso introdurre grazie all'atlante una definizione di mappe lisce su varietà.

Definizione 5 (Applicazione liscia)**.** M, N varietà differenziabili di dimensione m, n. $f : M \to N$ è liscia in $p \in M$ se $\forall (U, x), (V, y)$ carte di M, N con $p \in U, f(p) \in V$ la funzione $F = y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ è[4] liscia in $x(p)$ con $x(U \cap f^{-1}(V))$ aperto di $\mathbb{R}^m$.

TODO:DISEGNO 220308 Verificare la proprietà per ogni carta è problematico

Osservazione 1. *È suffuciente effettuare la verifica per una sola coppia di carte.*

[1] $\exists x^{-1} : x(U) \to U$
[2] $\forall u \in U \exists \epsilon \geq 0$ tc $B_\epsilon(u) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - u\| \leq \varepsilon\}$. Segue che $U = \bigcup_{u \in U} B_\epsilon(u)$
[3] Mappa liscia con inversa liscia
[4] In generale $f(U) \neq V$, per questo si prende l'intersezione

Proof. Supponiamo $F = y \circ f \circ x^{-1}$ liscia, bisogna mostrare che $w \circ f \circ v^{-1}$ sia liscia. $w \circ f \circ v^{-1} = w \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ (x^{-1} \circ x) \circ v^{-1} = (w \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ v^{-1})$ che è composizione di F (liscia per ipotesi) e di due cambi di carta che sono diffeomorfisimi e quindi lisci. TODO:DISEGNO 220301 □

Osservazione 2. *M, N, S varietà, $f : M \to N, g : N \to S$ lisce. $g \circ f : M \to S$ liscia.*

Proof. Sia $p \in M$, carte $(U, x), (V, y), (W, z)$ di M, N, S tc $p \in U, f(p) \in V, g(f(p)) \in W$. Devo mostrare che $z \circ (g \circ f) \circ x^{-1}$ è liscia su $(g \circ f)(U \cap W)$. TODO:DISEGNO $z \circ (g \circ f) \circ x^{-1} = z \circ g \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ x^{-1} = (z \circ g \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1})$ composizione di funzioni lisce per l'ipotesi f, g lisce. □

Esempio 4. M varietà, $N = \mathbb{R}^n$ (l'unica carta è $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$).
$f : M \to \mathbb{R}^n$ è liscia se $id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ x^{-1} = f \circ x^{-1}$ è liscia.

Esempio 5. Una parametrizzazione è liscia? (U, x) carta di M. $x : U \to \mathbb{R}^m$ per quanto visto è una mappa fra le varietà U con altante $\{(U, x)\}$ e $\mathbb{R}^m$. Dalla quanto visto prima x è liscia se $x \circ x^{-1}$ è liscia. Ma si tratta dell'identità e quindi di una funzione liscia.

1.1 Fibre

La sfera è un insieme del tipo $F^{-1}(b)$ con $F = \sum x_i^2$ e $b = 1$. Esiste un modo semplice per capire se insiemi di questo tipo sono varietà, la cui dimostrazione sfrutta il teorema della funzione inversa[5].

Teorema 1. *$U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aperto*
$F : U \to \mathbb{R}^m$ liscia
!!$b \in \mathbb{R}^m$ tc rkJ_aF massimale per ogni $a = F^{-1}(b)$
allora:
$F^{-1}(b) = \{x \in U : F(x) = b\}$ è varietà di dimensione n
TODO: CARTE

Proof. TODO: PROOF 220301 □

Osservazione 3. *$F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ sommersione su $F^{-1}(b)$, $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ lisca. Allora $f\big|_M : M = F^{-1}(b) \to \mathbb{R}$ è liscia. Infatti deve essere liscia $f \circ x^{-1}$ ma x abbiamo visto essere liscia. ???è vero???*

2 Spazio tangente e differenziale

Definizioni di derivata su varietà. $p \in M$ voglio fare somma e prodotto di $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ con $p \in U \cap V$ e f, g lisce. Problema: se $V \neq U$ somma e prodotto sono definite solo su $U \cap V$. Voglio togliere riferimenti al dominio. Definisco l'algebra dei germi $C^\infty(M, p) := \{(U, f) : p \in U, f : U \to \mathbb{R} \text{ liscia}\} /_\sim$ con la relazione di equivalenza $(U, f) \sim (V, g)$ se $f = g$ su $W = U \cap V,\ p \in W$. La classe di equivalenza di (U, f) è detta germe di f. In pratica mi preoccupo solo del comportamento delle funzioni molto vicino a p. Posso quindi scrivere

[5] TODO: TEOREMA FUNZIONE INVERSA

$[(U,f)]_\sim + [(V,g)]_\sim = [(U,f) + (V,g)]_\sim$ e $[(U,f)]_\sim [(V,g)]_\sim = [(U,f)(V,g)]_\sim$. Per semplicita da qui in avanti $[(U,f)]_\sim \equiv f$.

Posso introdurre lo spazio tangente in due modi equivalenti: tramite derivazioni e tramite cammini.

2.1 Derivazioni

Definizione 6 (Derivazione)**.** Applicazione $v : C^\infty(M,p) \to \mathbb{R}$ tc[6]

- lineare: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- soddisfa leibniz: $v(fg) = v(f)g + fv(g)$

Queste mappe esistono? Un esempio immediato:

Esempio 6. Carta (U,x) di M, $x : x(U) \to \mathbb{R}^m$. Se f è liscia $x(p)$ è liscia in intorno di $x(p) \in x(U)$ per definizione. Posso quindi avere una derivazione sui germi di questa funzione composta. Definisco

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)(f) := \left(\frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial t_i}\right)(x(p))$$

con t_i le coord su $\mathbb{R}^m$. Si verifica facilmente che sono derivazioni.

L'insieme delle derivazioni su $C^\infty(M,p)$ è spazio vettoriale su campo $\mathbb{R}$ con somma tra vettori e prodotto per scalare definiti in modo naturale.

Osservazione 4. *$\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1}^m$ base di T_pM e quindi dim$T_pM = m =$dim$M$*[7]

Teorema 2. *$v \in T_pM$, (x,U) carta di M $v = \sum_i^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ con*

$$a_i = v(x_i)$$

Proof. Osservo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)(x_j) = \left(\frac{\partial x_j \circ x^{-1}}{\partial t_i}\right)(x(p))$$

e $((x_1 \dots x_m) \circ x^{-1}) = (x \circ x^{-1})(t) = t = (t_1 \dots t_m)$. Quindi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)(x_j) = \left(\frac{\partial t_j}{\partial t_i}\right)(x(p)) = \delta_{ij}$$

$v(x_j) = \sum_i^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(x_j) = a_j$ □

Teorema 3. *$v \in T_pM$, $(U,x),(V,y)$ carte di M, $v = \sum_i^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \sum_i^m b_i \frac{\partial}{\partial y_i}|_p$ con*

$$a = J_{y(p)}F \cdot b$$

dove $F = x \circ y^{-1}$ è il cambio di coordinate.

[6]Vanno lette: $v(\lambda[(U,f)]_\sim + \mu[(V,g)]_\sim) = \lambda v([(U,f)]_\sim) + \mu v([(V,g)]_\sim)$ e $v([(U,f)]_\sim [(V,g)]_\sim) = v([(U,f)]_\sim)[(V,g)]_\sim + [(U,f)]_\sim v([(V,g)]_\sim)$

[7]Il concetto di dimensione per spazi vettoriali e per varietà è definito in modo diverso.

Proof. Per quanto visto nella dimostrazione prima e usando la definzione degli elementi della base:

$$a_j = \sum b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_p \right)(x_j) = \sum b_i \left(\frac{\partial x_j \circ y^{-1}}{\partial t_i} \right)(y(p))$$

che chiamando $F = x \circ y^{-1}$ è proprio il prodotto matrice-vettore. □

Vgliamo legare spazi tangenti di M, N collegate da mappa liscia Φ.
Problema: devo far agire sui germi di N derivazioni che agiscono sui germi di M. Devo prima di tutto introdurre un oggetto che mi faccia passare da $C^\infty(N, \Phi(p))$ a $C^\infty(M, p)$.

Definizione 7 (Pull-back)**.**

$$\Phi^* : C^\infty(N, \Phi(p)) \to C^\infty(M, p) : g \mapsto \Phi^*(g) := g \circ \Phi$$

Osservazione 5. Φ^* *è lineare:* $\Phi^*(\lambda g + \mu h) = \lambda \Phi^*(g) + \mu \Phi^*(h)$

Proof. Devo mostrare che l'identità vale $\forall x \in M$. $\Phi^*(\lambda g + \mu h)(x) = (\lambda g + \mu h)(\Phi(x)) = \lambda g(\Phi(x)) + \mu h(\Phi(x)) = \lambda \Phi^*(g)(x) + \mu \Phi^*(h)(x)$ □

Definizione 8 (Differenziale)**.** $(\mathrm{d}\Phi)_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N : v \mapsto (\mathrm{d}\Phi)_p(v) := v(\Phi^*(g))(= v(g \circ \Phi))$

Proprietà.

- È mappa fra spazi vettoriali: vogliamo sia lineare

  Proprietà 1. $(\mathrm{d}\Phi)_p(\lambda v + \mu u) = (\mathrm{d}\Phi)_p(v) + (\mathrm{d}\Phi)_p(u)$

  Proof. L'ugugaglianza vale iff $((\mathrm{d}\Phi)_p(\lambda v + \mu u))(g) = ((\mathrm{d}\Phi)_p(v))(g) + ((\mathrm{d}\Phi)_p(u))(g) \quad \forall g \in C^\infty(N, \Phi(p))$. Dalla definizione di spazio tangente $((\mathrm{d}\Phi)_p(\lambda v + \mu u))(g) = (\lambda v + \mu u)(g \circ \Phi) = \lambda v(g \circ \Phi) + \mu u(g \circ u) = ((\mathrm{d}\Phi)_p(v))(g) + ((\mathrm{d}\Phi)_p(u))(g)$. □

- differenziale dell'identità

  Proprietà 2. $(\mathrm{d}id_M)_p = id_{T_pM}$

  Proof. $v(g \circ id_M) = v(g) \quad \forall g$ □

- Composizione di differenziali

  Proprietà 3. $\Phi : M \to N$, $\Psi : N \to S$ *lisce,* $p \in M$ *allora* $(\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)} \circ (\mathrm{d}\Phi)_p = (\mathrm{d}(\Psi \circ \Phi))_p : T_pM \to T_{\Psi(\Phi(p))}S$

  Proof. Vale iff $(\mathrm{d}(\Psi \circ \Phi))_p(v) = ((\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)} \circ (\mathrm{d}\Phi)_p)(v) \quad \forall v \in T_pM$. Fissata v vale iff $((\mathrm{d}(\Psi \circ \Phi))_p(v))(h) = (((\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)} \circ (\mathrm{d}\Phi)_p)(v))(h) \quad \forall h \in C^\infty(S, \Psi(\Phi(p)))$. $((\mathrm{d}(\Psi \circ \Phi))_p(v)) = v(h \circ (\Psi \circ \Phi)) = v((h \circ \Psi) \circ \Phi) = ((\mathrm{d}\Phi)_p(v))(h \circ \psi) = (((\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)}((\mathrm{d}\Psi)_p)(v))(h)$. □

- Differenziale dell'inversa

Proprietà 4. *Se $\Phi : M \to N$ diffeo con inversa Ψ allora $(\mathrm{d}\Psi)_\Phi p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ è isomorfismo con inversa $(\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)}$.*

Proof. $\Psi \circ \Phi = id_M$. Per la p2 $(\mathrm{d}(\Psi \circ \Phi))_p = id_{T_pM}$. Per la p3 $(\mathrm{d}\Psi)_{\Phi(p)} \circ (\mathrm{d}\Phi)_p = id_{T_pM}$. Analogamente per la composizione inversa. □

Siccome il differenziale è lineare vogliamo ottenerne la forma matriciale

Teorema 4. *$(U, x), (V, y)$ carte di M, N. $\Phi_M \to N$ liscia. Su questa base*

$$(\mathrm{d}\Phi)_p = J_{x(p)}F$$

con $F = y \circ \Phi \circ x^{-1}$

Proof. Il differenziale applicato a un elemento della base di T_pM è un elemento della base di $T_{\Phi(p)}N$, quindi $(\mathrm{d}\Phi)_p(\frac{\partial}{\partial x_j})|_p = \sum^n v_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}|_{\Phi(p)}$ con $v_{ij} \in \mathbb{R}$. Per quanto visto $v_{ij} = (\mathrm{d}\Phi)_p(\frac{\partial}{\partial x_j})|_p(y_i) = (\frac{\partial}{\partial x_j})(y_i \circ \Phi) = \frac{\partial y_i \circ \Phi \circ x^{-1}}{\partial t_j}$. Ponendo $F = (F_1 \dots F_n)$ con $F_i = y_i \circ \Phi \circ x^{-1}$ la tesi. □

2.2 Cammini

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$ cammino.

Definizione 9 (Vettore tangente)**.** $\gamma_*(f) := \frac{\mathrm{d}f\circ\gamma}{\mathrm{d}\tau}(0)$ con $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ho una derivata nel senso comune del termine.

Definizione 10 (Differenziale)**.** γ cammino, $\Phi : M \to N$ liscia.

$$(\mathrm{d}\Phi)_{\gamma_*} := (\Phi \circ \gamma)_*$$

cioè il vettore tangente ottenuto mappando il cammino su N mediante Φ.

Ogni $v \in T_pM$ è del tipo γ_* per un certo γ.

Esempio 7. $T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ infatti:
Carta $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$. $v = \sum_i^m a_i \frac{\partial}{\partial t_i}|_p \leftrightarrow a = (a_1 \dots a_m)$
Preso $\gamma : (-\varepsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$, con $p = \gamma(0)$ $\gamma_*(f) = (\frac{\mathrm{d}f(\gamma_1(\tau)\dots\gamma_m(\tau))}{\mathrm{d}\tau})|_{\tau=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial t_i}\gamma_i'(0)$ e quindi per confronto $\gamma_i'(0) = a_i$.

La definizione di differenziale ottenuta a partire dalle derivazioni deve essere la stessa di quella ottenuta a partire dai cammini.

Osservazione 6. *Le due definizioni di differenziale sono equivalenti*

Proof. Per la definizione data usando le derivazioni $((\mathrm{d}\gamma_*)_p)(g) = \gamma_*(g \circ \Phi) = \frac{\mathrm{d}g\circ\Phi\gamma}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0} = \frac{\mathrm{d}g\circ(\Phi\gamma)}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0} = (\Phi \circ \gamma)_*(g)$ e questo vale per tutte le g. □

2.3 Fibre

Teorema 5. *$M = F^{-1}(b) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ con $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ allora $\forall a \in M$ $T_aM \equiv ker((\mathrm{d}F)_a) \cong ker(J_aF)$ dove $(\mathrm{d}F)_a : T_a\mathbb{R}^{n+m} \to T_b\mathbb{R}^n$ e $J_aF : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$.*

Proof. $rk(J_aF)$ è massimo e quindi uguale a n. Per il teorema di nullità+rango $dim(ker(F_aF)) = n+m-n = m = dim(T_aM)$. Resta da mostrare che $T_aM \subseteq ker(J_aF) \cong ker((\mathrm{d}F)_a)$. Sia $v \in T_aM$, prendo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M : 0 \mapsto a$ tc $\gamma_* = v$ ($\gamma_*(f) = \frac{\partial f \circ \gamma}{\partial \tau}|_{\tau=0}$) allora $((\mathrm{d}F)_a\gamma_*)(g) = \gamma_*(g \circ F)$ con $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, b)$. Su M $F(a) = b$ costante e quindi $((\mathrm{d}F)_a v)(g) = ((\mathrm{d}F)_a\gamma_*)(g) = \gamma_*(g \circ F) = \gamma_*(g(b)) = 0$ ovvero $v \in ker((\mathrm{d}F)_a)$

□

Esempio 8 (Spazio tangente a S^n)**.** $S^n = F^{-1}(1)$ con $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : (x_0 \dots x_n) \mapsto \langle x, x\rangle$. $T_xS^n = ker(J_xF) = \left\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\right\}$ (dato che $J_xF = 2(x_0, \dots x_n)$ ovvero il fatto noto che i tangenti alla sfera sono ortogonali al raggio.

3 Fibrato tangente e campi vettoriali

Idea: considerare tutti gli spazi tangenti a una varietà M.

Definizione 11 (Fibrato tangente)**.**

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

unione disgiunta dei tangenti cioè se $v \in TM$ allora $v \in T_pM$ per un unico p.

L'unione disgiuta è necessaria perchè non saprei dare significato ai punti di intersezione fra due tangenti considerati contemporaneamente. L'unione disgiunta mi permette di considerare la mappa proiettiva $\pi : TM \to M : v \mapsto \pi(v) = p \quad se \quad v \in T_pM$.

Osservazione 7. *TM è varietà, $dimTM = 2dimM$*

Proof. Cerco carte compatibili di TM costruite a partire da carte di M. Data (U, x) $\forall p \in U$ $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\}_i$ è base di T_pM. Considero l'isomorfismo tra T_pM e $\mathbb{R}^m$ che associa ad ogni derivazione il vettore delle coordinate nella sua base a. Posso quindi costruire la biiezione (la carta)

$$\tilde{x} : TU \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : v \mapsto (x(p), a)$$

dove: $TU \equiv \pi^{-1}(U) \equiv \sqcup_{p \in U} T_pM$; $x(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ aperto perchè $x(U)$ aperto per definizione di carta.

Resta compatibilità. $(TU, \tilde{x}), (TV, \tilde{y})$ carte di TM. Cambiando base ($\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1}$) $= \tilde{y}(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p) = \tilde{y}(\sum b_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p) = (y(p), b)$. Ma $y(p)$ liscia essendo parametrizzazione di V; $b = J_{x(p)}(y \circ x^{-1})a$ è matrice con entrate lisce dato che $y \circ x^{-1}$ deve essere lisca per la compatibilità di x, y. Allo stesso modo $\tilde{x} \circ \tilde{y}$ è liscia e quindi le carte sono compatibili. □

Osservazione 8. *$\pi : TM \to M$ è liscia*

Proof. TODO: PER ESERCIZIO □

Esempio 9. $M = \mathbb{R}^m$ con atlante $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$. TM è diffeomorfo a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ovvero a $M \times M$.

Idea: grazie a fibrato tangente posso definire applicazione che associa a $p \in M$ un vettore tangente.

Definizione 12 (Campo vettoriale)**.** M varietà, $\pi : TM \to M$. Un campo vettoriale X su $V \subseteq M$ aperto è l'applicazione **liscia** $X : V \to TV = \pi^{-1}V \subseteq TM$ tc $\pi \circ X = id_V$

La richiesta equivale a dire $\pi(X(p)) = p \forall p \in V$, ovvero $X(p) \in \pi^{-1}(p) = T_pM$ (il campo vettoriale valutato in p è un elemento del tangente in p, ovvero è una derivazione). Notazione: $X(p) = X_p$.

Teorema 6. *Se (U, x) è carta di M la rappresentazione di un campo vettoriale è $X_p = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ con $a_i : U \to \mathbb{R}$ lisce.*

Proof. la carta di M induce: carta $(TU, \tilde{x})$ di TM e base $\frac{\partial}{\partial x}|_p$ di T_pM. Quindi $X_p = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ e la richiesta che X sia liscia significa richiedere $\tilde{x} \circ X \circ x^{-1}$ liscia. Indicando con t le coordiate di $\mathbb{R}^m$ $(\tilde{x} \circ X \circ x^{-1}) = \tilde{x}(X(x^{-1}(t))) = \tilde{x}(X_p) = (x(p), (a_1(p) \dots a_m(p)) = \big(t, \big[(a_1 \circ x^{-1})(t), \dots (a_m \circ x^{-1})(t)\big]\big)$. La prima coordinata è a funzione identità che è liscia. Le altre sono $a_i \circ x^{-1} = id_{\mathbb{R}} \circ a_i \circ x^{-1}$. La rischiesta che siano lisce è per definizione a_i lisce.

□

2 modi per costruire oggetti a partire da cv e funioni lisce:

- Un nuovo campo vettoriale

  Definizione 13. X, Y cv su $U \subseteq M$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ lisce (!!). $(fX + gY)(p) := f(p)X_p + g(p)Y_p \in T_pM$ (scalari per derivazioni).

  È importante che f, g lisce perchè così $fX + gY$ è liscio e quindi è un campo vettoriale.

- Una nuova funzione lscia

  Definizione 14. X cv su $U \subseteq M$, $f : V \to \mathbb{R}$. $(Xf)(p) : X_p(f)$

  Questa è liscia infatti: $(Xf)(p) = \sum (a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p)(f) = \sum a_i(p) \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial t_i}$ (con t_i le coordinate di $\mathbb{R}^m$) e abbiamo a_i lisce per ipotesi di cv, $x(p)$ liscia siccome parametrizzazione, la derivata di $f \circ x^{-1}$ liscia perchè $f \circ x^{-1} \in C^\infty(x(U))$. Notazione pesante: per semplicità scriviamo $Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ in modo analogo a come faremmo in $\mathbb{R}^m$.

  Osservazione 9. *Vale leibnitz $X(fg) = X(f)g + fX(g)$*

Definizione 15. (Uguaglianza fra campi) X, Y cv su $U \subseteq M$. $X = Y \iff X_p = Y_p \forall p \in U \iff X(f) = Y(f) \forall W \in U$ aperti $, \forall f : W \to \mathbb{R}$

Una domanda naturale: $X(f)$ è liscia, ma allora dato Y cv, l'applicazione $f \mapsto Y(X(f))$ è un campo vettoriale? In generale no, infatti se $M = \mathbb{R}, X = Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ si ha $Y(X(fg)) = X(f'g + fg') = f''g + fg'' + 2f'g' \neq f''g + fg'' = Y(X(f))g + fY(X(g))$ ovvero non vale leibnitz e quindi non ho una derivazione. Vogliamo quindi un'operazione che combini due cv a produrre un cv.

Definizione 16 (Parentesi di Lie)**.** $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$

Proprietà (si vedono con semplici conti)

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Teorema 7. *(U, x) carta di M, $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ allora $[X, Y] = \sum_i \big(\sum_j (X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j)\big) \frac{\partial}{\partial x_i}$*

Proof. $X(Y(f)) = X(\sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_i X_i (\sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$.
$Y(X(f)) = Y(\sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) = \sum_j Y_j (\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i})$. Per schwarz in entrambi i termini compare $X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e quindi nelle parentesi di Lie si cancella (ovvero non compaiono derivate seconde, come dev'essere). I coefficienti di $[X, Y]$ sono lisci essendo X, Y campi vettoriali. □

Idea: siccome $(\mathrm{d}\phi)_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$, dato X cv su M voglio trovare "$\mathrm{d}\phi\, X$" su N. Non posso semplicemente applicare il differenziale eprchè se ϕ non è iniettiva ci sono $p \neq q \in M$ tc $\phi(p) = \phi(q) \in N$ ma d'altro canto nulla garantisce che $(\mathrm{d}\phi)_p X_p = (\mathrm{d}\phi)_q X_q$ dove il primo sta in $T_{\phi(p)}N$ e il secondo in $T_{\phi(q)}N$ che coincidono. Quindi l'operazione non è ben definita in questo punto. TODO:DISEGNO 220329

Definizione 17 (Campi correlati(1))**.** $\phi : M \to N$, X, X' cv su M, N sono ϕ-correlati se $X'_{\phi(p)} = (\mathrm{d}\phi)_p X_p \forall p \in M$

Definizione 18 (Campi correlati(2))**.** $\phi : M \to N$, X, X' cv su M, N sono ϕ-correlati se $X'(g) \circ \phi = X(g \circ \phi) \forall g : V \to \mathbb{R}, \forall V$ aperti di N

Osservazione 10. *Le due definizioni sono equivalenti*

Proof. $(X'(g) \circ \phi)(p) = (X'(g))(\phi(p)) = X'_{\phi(p)}(g)$. Se X' correlato a X secondo la prima definizione questo è uguale a $((\mathrm{d}\phi)_p X_p)(g) = X_p(g \circ \phi) = (X(g \circ \phi))(p)$ ovvero la seconda definizone. Ho una catena di uguaglianze e quindi posso permutare i termini fino a ottenere che la seconda definizione implica la prima. □

Le parentesi di Lie si comportano bene rispetto alla correlazione, ovvero

Teorema 8. *X ϕ-correlato a X', Y ϕ-correlato a Y' allora $[X, Y]$ ϕ-correlato a $[X', Y']$.*

Proof. $[X, Y](g \circ \phi) = X(Y(g \circ \phi)) - Y(X(g \circ \phi)) = X(Y'(g) \circ \phi) - Y(X'(g) \circ \phi) = X'(Y'(g)) \circ \phi - Y'(X'(g)) \circ \phi = [X', Y'](g) \circ \phi$ □

Chiarite le problematiche per comodità si può scrivere $X' = \mathrm{d}\phi\, X$ se i due campi sono correlati e la proprietà delle parentesi di Lie assume la forma suggestiva $[\mathrm{d}\phi\, X, \mathrm{d}\phi\, Y] = \mathrm{d}\phi\, [X, Y]$.

3.1 Fibre

Teorema 9. *Se $M = F^{-1}(b)$ con $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ allora $TM = G^{-1}(b, 0)$ con $G : (\mathbb{R}^{n+m})^2 \to (\mathbb{R}^n)^2 : (x, y) \mapsto (F(x), J_x F(y))$.*

Proof. La jacobiana di G in $(B, 0)$ ha rango massimo dato che può essere scritta a blocchi come

$$J_{(x,y)}G(b, 0) = \begin{pmatrix} J_x F(b) & O \\ * & J_x F(b) \end{pmatrix}$$

Siccome la jacobiana di F in b ha rango n allora la jacobiana di G ha rango $2n$ ovvero rango massimo. Quindi TM così definito è una varietà descritto da una carta che ha la struttura delle carte del fibrato tangente. □

Esempio 10. (Fibrato tangente di S^n) S^n caratterizzata da $\langle x, x\rangle = 1$; $T_x S^n$ caratterizzato da $\langle x, y\rangle = 0$. Sono equazioni quadratiche quindi molto semplici. Il fibrato tangente sarà allora $TS^n = G^{-1}(1, 0)$ con $G : \mathbb{R}^{n+1} \times R^{n+1} \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\langle x, x\rangle, \langle x, y\rangle)$(si può verificare facilmente il risultato del teorema precedente in questo caso).
Nel caso $n = 1$ la condizione $\langle x, y\rangle = 0$ è soddisfatta prendendo $y = t(-x_2, x_1)\forall t \in \mathbb{R}$ Per $n = 1$ $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ e quindi un punto del fibrato (x_1, x_2, y_1, y_2) dove $(x_1, x_2) \in S^1$ è descritto da (x_1, x_2, t) ovvero il cilindro. Segue inoltre che $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ ("$\cong$" = diffeomorfo).

Esempio 11. (Campi vettoriali su S^n) Consideriamo campi mai nulli (ovvero campi del tipo $p \in M \mapsto (x(p), y(p)) \in TS^n tcy \neq 0 \forall p$. Su S^{2n+1} è sempre possibile costruire campi di questo tipo costruire un campo di questo tipo prendendo $y(x) = (-x_2, x_1 \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$. Ovviamente questa costruzione non funziona per S^{2n} e in effetti si dimostra che quando la dimensione della sfera è pari ogni campo vettoriale sulla sfera ha almeno un punto in cui è nullo (pettinare la sfera).

4 Gruppi e algebre di Lie

Definizione 19 (Gruppo di Lie)**.** G è gruppo di Lie se è varietà differenziabile dotata di due applicazioni lisce $\mu : G \times G \to G$, $\nu : G \to G$ e un elemento e tc G sia gruppo con operazioni $g_1 g_2 := \mu(g_1, g_2)$, $g^{-1} = \nu(g)$, $gg^{-1} = e$

Definizione 20 (Omomorfismo tra gruppi di Lie)**.** $\phi : G \to G$ tc sia omomorfismo tra gruppi e sia liscia.

Definizione 21 (Sottogruppo di Lie)**.** $H \subseteq G$ sottogruppo è sottogruppo di Lie se è anche sottovarietà.

Esempio 12. (Gruppi su $\mathbb{R}$)
$(\mathbb{R}, +)$ con $\mu(x, y) = x + y$, $\nu(x) = -x$.
$(\mathbb{R}^\times, \dot{})$ con $\mu(x, y) = xy$, $\nu(x) = 1/x$.
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ è omomorfismo fra questi due gruppi.

Definizione 22 (Traslazione a sinistra)**.** $g \in G$ definisco traslazione a sinistra $L_g : G \to G : h \mapsto \mu(g, h) = gh$

Proprietà:

- Continuità

  Proprietà 5. L_g *è liscia*

  Proof. Siccome μ liscia per definizione. $\square$

- Traslazione per l'elemento neutro

  Proprietà 6. $L_e = id_G$

- Composizione

  Proprietà 7. $L_g \circ L_{g'} = L_{gg'}$

  Proof. $(L_g \circ L_{g'})(h) = L_g(L_{g'}(h)) = g(g'h) = gg'(h) = L_{gg'}h$ dove ho usato l'associatività del gruppo. $\square$

- Inversa

  Proprietà 8. L_g *è diffeomorfismo*

  Proof. Dalle precedenti proprietà segue che $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_e = id_G = L_{g'} \circ L_g$ ovvero esiste l'inversa che è ancora una traslazione a sinistra e quindi è liscia $\square$

- Differenziale

  Proprietà 9. $(\mathrm{d}L_g)_h$ *è isomorfismo*

  Proof. Dalle proprietà del differenziale siccome L_g è diffeomorfismo. $\square$

Definizione 23 (Campi X^v)**.** $v \in T_eG$ fissato X^v campo vettoriale su G è definito da $(X^v)g := (\mathrm{d}L_g)_e v \in T_gG$

Osservazione: $X^v_e = (X^v)_e = (\mathrm{d}L_e)_e v = id_{tG} v$.

Definizione 24 (Campi invarianti a sinistra)**.** X campo vettoriale su G è invariante a sinistra se $(\mathrm{d}L_g)_h X_h = X_{L_g(h)} = X_{gh} \in T_{gh}G, \ \forall g, h \in G$.

In altre parole significa che X è L_g-correlato con sè stesso. Esistono campi così?

Teorema 10. *X è invariante a sinistra iff è nella forma X^v per un certo $v \in T_eG$.*

Proof. Dimostro che ogni X^v è invariante a sinistra ovvero che vale $(\mathrm{d}L_g)_h X^v_h = X^v_{gh}$. Usando le proprietà del differenziale e della tralsazione a sinistra $(\mathrm{d}L_g)_h X^v_h = (\mathrm{d}L_g)_h((\mathrm{d}L_h)_e(v)) = (\mathrm{d}L_g \circ L_h)_e(v) = (\mathrm{d}L_{gh})_v = X^v_{gh}$.

Dimostro che ogni campo invariante a sinistra (cioè $(\mathrm{d}L_g)_h X_h = X_{gh}$) è del tipo X^v per un certo $v \in T_eG$. Prendo nella definizione $h = e$, allora $(\mathrm{d}L_g)_e X_e = X_{ge} = X_g$ ma $X_e \in T_eG$ e quindi $X_g = X^v_g$ con $v = X_e$. $\square$

Da quanto detto abbiamo il seguente ragionamento. G gruppo di Lie su cui sono definiti X, Y campi vettoriali invarianti a sinistra, ovvero tc X, Y sono L_g-correlati con loro stessi $\forall g \in G$. Ma allora $[X, Y]$ è L_g-correlato con sè stesso e quindi è invariante a sinistra.

- X invariante a sinistra $\iff$ $X = X^v$ per un certo $v \in T_eG$
- Y invariante a sinistra $\iff$ $Y = X^w$ per un certo $w \in T_eG$
- $[X, Y]$ invariante a sinistra $\iff$ $[X, Y] = X^z$ per un certo $z \in T_eG$

Le parentesi di Lie inducono un'operazione che associa a due elementi di T_eG un elemento di T_eG.

Definizione 25 (Prodotto di Lie o commutatore)**.** $x, y, z \in T_eG$, il prodotto di Lie $[v, w] = z$ iff le parentesi di Lie $[X^v, X^w] = X^z$

Definizione 26 (Algebra di Lie)**.** Spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ dotato di applicazione bilineare $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (a, b) \mapsto [a, b]$ che goda delle proprietà

- $[a, b] = -[b, a]$
- identità di Jacobi.

4.1 Gruppi matriciali

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : detA \neq 0\}$ è un gruppo di Lie con sottogruppi di Lie, ad esempio, $SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = id, detA = 1\}$ e $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : detA = 1\}$.

Vediamo prima di tutto che $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie. $GL(n, \mathbb{R}) \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e in particolare è un aperto: essendo diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^k$ è una varietà con atlante $\left\{id_{GL(n,\mathbb{R})}\right\}$. Prendo come μ il prodotto tra matrici, che è liscio in quanto polinomiale, e come ν l'operazione che ad una matrice associa la sua inversa rispetto al prodotto. $A^{-1} = \frac{1}{detA} A^{\#}$ con $A^{\#}_{ij} = (-)^{i+j}$ per il determinante della sottomatrice ottenuta cancellando da A la j-esima riga e la i-esima colonna. Siccome in $GL(n, \mathbb{R})$ il determinante è sempre diverso da zero questa operazione non da problemi ed è liscia.

5 Algebra multilineare

Definizione 27 (k-forme alternanti)**.** V sv su $\mathbb{R}$. Una k-forma alternante è un'applicazione $f : V \times V \times ... \times V \equiv V^k \to \mathbb{R}$ lineare in ogni variabile e tc $f(v_1, \dots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$ per $i \neq j$.

Osservazione 11. *$f(v_1, \dots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$ per $i \neq j$ equivale a $f(v_1, \dots, v_k) = \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k})$.*

Proof. Verifico doppia implicazione.

($\Rightarrow$) Suppongo $v_i = v_j = v + w$ per certe $i \neq j$. Per la multilinearità $0 = f(\dots v{+}w \dots v{+}w \dots) = f(\dots v \dots v \dots) + f(\dots v \dots w \dots) + f(\dots w \dots v \dots) + f(\dots w \dots w \dots) = f(\dots v \dots w \dots) + f(\dots w \dots v \dots)$ ovvero $f(\dots v \dots w \dots) = -f(\dots w \dots v \dots)$: lo scambio porta un $-$. S_k gruppo permutazioni è generato dagli scambi e $\epsilon : S_k \to \{\pm 1\}$ è omomorfismo, quindi la tesi.

($\Leftarrow$) $f(\dots v \dots v \dots) = -f(\dots v \dots v \dots)$ dato che lo scambio lascia inalterata f, ma quindi se due elementi sono uguali $f = 0$. $\square$

Esempio 13. $V = \mathbb{R}^n$, $det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R} : (v_1 \dots v_n) \mapsto det(v_1, \dots v_n) = det(v_1 | v_2 \dots | v_n)$ è una n-forma alternante.

Definizione 28. $Alt^k(V)$ insieme delle k-forme alternanti su V

Con le operazioni $(\lambda f + \mu g)(v_1, \dots v_k) = \lambda f(v_1 \dots v_k) + \mu g(v_1 \dots v_k)$, $Alt^k(V)$ è sv. Ha quindi senso studiarne la dimensione e cercarne una base. Alcune osservazioni.

- $Alt^0(V) = \mathbb{R}$ per definizione
- $Alt^1(V) = V^*$ (duale: tutte le mappe lineari $V \to \mathbb{R}$)
- $Alt^k(V) = \{0\}$ se $k > dimV = n$, infatti: siccome $k > n$ $v_1 \dots v_k$ sono necessariamente linearmente dipendenti. Supponiamo $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$, allora per ogni k-forma si ha $f(v_1 \dots v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i f(\dots v_i \dots v_i) = 0$

Lemma 1. *$dim(Alt^k(V)) \leq \binom{n}{k}$ se $k \leq n$.*

Proof. scelta $e_1, \dots e_n$ base di V, $v_1, \dots v_k \in V$ si scrivono $v_j = \sum_{i_j=1}^n v_{j i_j} e_{i_j}$ (il pedice alle i serve solo a ricordare a quale vettore sto facendo riferimento ed è utile nel prossimo passaggio). $f(v_1, \dots v_k) = \sum_{i_1}^n v_{1,i_1} f(e_{i_1}, v_2 \dots v_k) = \sum_{i_1, i_2}^n v_{1,i_1} v_{2,i_2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, v_3 \dots v_k) = \dots = \sum_{i_1 \dots, i_k}^n v_{1,i_1} \dots v_{k,i_k} f(e_{i_1}, \dots e_{i_k})$. Posso considerare solo i termini della sommatoria in cui tutti gli e_{i_j} sono diversi (negli altri casi f si annulla) e posso quindi riordinarli con una permutazione σ tc $i \leq i_{\sigma_1} < i_{\sigma_2} < \dots < i_{\sigma_k} \leq n$. Perciò f è determinata da al massimo $\binom{n}{k}$ costanti. □

Se trovo un insieme di $\binom{n}{k}$ k-forme linearmente indipendenti ho base e dimensione. Per farlo introduco l'operazione:

Definizione 29 (Prodotto esterno o wedge)**.** $\wedge : Alt^r(V) \times Alt^s(V) \to Alt^{r+s}(V) : (f, g) \mapsto f \wedge g$ tc

- $f \wedge g = (-)^{rs} g \wedge f$
- $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h.$

Osservazione 12. *$f \in Alt^1(V)$ allora $f \wedge f = 0$*

Osservazione 13. *$f_1, \dots f_k \in Alt^1(V)$ allora $f_1 \wedge \dots \wedge f_k = \epsilon(\sigma) f_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge f_{\sigma_k}$*

Osservazione 14. *$f_1, \dots f_k \in Alt^1(V) = V^*$ allora il prodotto esterno è una k-forma e in particolare $(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, ...v_k) = det(f_j(v_i))$*

Prendo $I = \{i_1, \dots i_k\} \subseteq \{1, \dots n\}$ ordinato e $v_1 \dots v_k \in V$. Prendo poi $e_1 \dots e_n$ e $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ basi di V, V^* (cioè $\epsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$) e definisco $\epsilon_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$. Ho che $v_j = \sum_{i_j=1}^n v_{j i_j} e_{i_j}$ e $\epsilon_{i_j}(v_j) = v_{j i_j}$. Ne segue che, definite $\epsilon_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ al variare di I, queste hanno la forma

$$\epsilon_I(v_1, \dots v_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon_{i_1}(v_1) & \dots & \epsilon_{i_1}(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{i_k}(v_1) & \dots & \epsilon_{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_{1 i_1} & \dots & v_{k i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1 i_k} & \dots & v_{k i_k} \end{pmatrix}$$

Ho $\binom{n}{k}$ possibili scelte di I: ho costruito una famiglia di $\binom{n}{k}$ k-forme. DEVO MOSTRARE SONO LI

Si scrive $Alt^k(V) = \bigwedge^k V^*$

6 Forme differenziali

ciao