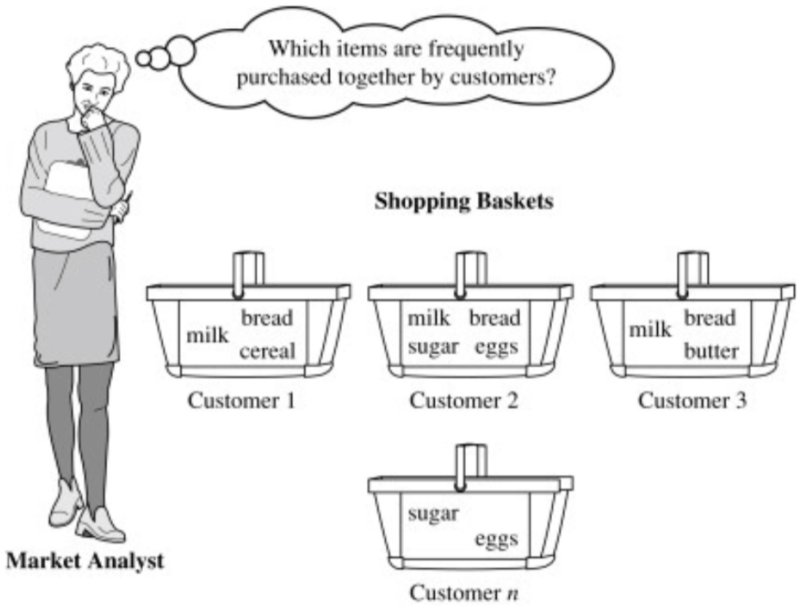
Probabilidad y Análisis de Datos

Daniel Fraiman

Maestría en Ciencia de Datos, Universidad de San Andrés

Basket market



Aplicaciones en espacios grandes discretos

Supongamos que estamos interesados en entender:

"qué y cómo compra una persona cuando va al supermercado"

- En el supermercado hay N items
- Una compra es: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, con $X_i = \{0, 1\}$ (no compró, compró).

Aplicaciones en espacios discretos grandes discretos

Supongamos que estamos interesados en entender:

"qué y cómo compra una persona cuando va al supermercado"

Concretamente

Objetivo: Identificar productos que tiendan a comprarse de forma conjunta.

Con el fin de:

- situarlos en posiciones cercanas dentro de la tienda y maximizar la probabilidad de que los clientes compren.
- presentar nuevos combos de productos al consumidor de manera de aumentar las ventas.
- Si es una compra web, sugerir otros productos.

Aplicaciones en espacios discretos grandes discretos

Reglas de Asociación e items frecuentes

El problema matemático es el siguiente:

Supongamos que sabemos que la persona tiene en su carrito de compras los productos A y B, ¿hay altas chances de que compre T si lo encuentra antes de llegar a la caja?

Llamemos S al evento que tiene las compras actuales.

$$S = A \cap B, \text{¿} S \to T \text{?}$$

¿Le recomendamos T?

Reglas de Asociación e items frecuentes

Problema matemático:

Dado S, ¿cuál es el producto T que maximiza la probalidad de compra? Llamemos $\Theta^{[} - S]$ al conjunto que tiene a todos los productos del supermercado menos los que ya fueron comprados S.

$$T = \underset{Y \in \Theta^{-S}}{argmax}\, \mathbb{P}(Y|S)$$

- En realidad estaremos interesados en ordenar los productos según su probabilidad. Quizás ofrecemos los 5 primeros.

Reglas de Asociación e items frecuentes

Objetivo:

Estimar $\mathbb{P}(Y|S)$ para todo $Y \in \Theta$.

Recordemos:

$\mathbb{P}(Y|S) = \frac{\mathbb{P}(Y \cap S)}{\mathbb{P}(S)}$ con $\mathbb{P}(S) > 0$.

Estimación:

Basado en la historia de compras (tickets):

- $\mathbb{P}(S) \approx \frac{\#\{\text{tickets con } S\}}{\#\{\text{tickets}\}}$
- $\mathbb{P}(Y \cap S) \approx \frac{\#\{\text{tickets con } Y \text{ y } S\}}{\#\{\text{tickets}\}}$

Reglas de Asociación e items frecuentes

Dificultad en la estimación:

El conjunto Θ es muy grande (N), por lo tanto el Espacio de Probabilidad de compras será gigante (2^N), no tendremos una muestra (historia de compras) suficientemente grande y entonces las estimaciones tendrán mucho error (o varianza).

- Pero independiente de lo anterior, no nos interesan realmente los productos Y con $\mathbb{P}(Y|S) << 1$.

Nuevo planteo

Vamos a pedir:

- $\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$, con s algún valor prefijado.
- $\mathbb{P}(T|S) \geq c$, con c algún valor prefijado.

Reglas de Asociación e items frecuentes

Nuevo planteo

Vamos a pedir:

- $\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$, con s algún valor prefijado.
- $\mathbb{P}(T|S) \geq c$, con c algún valor prefijado.

- $Soporte(S \rightarrow T)$=$Soporte(T \rightarrow S)$:=$\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$, con s algún valor prefijado.
- $Confianza(S \rightarrow T)$:=$\mathbb{P}(T|S) \geq c$, con c algún valor prefijado.

Reglas de Asociación e items frecuentes

- *Soporte*$(S \to T)$:=$\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$, con s algún valor prefijado.
- *Confianza*$(S \to T)$:=$\mathbb{P}(T|S) \geq c$, con c algún valor prefijado.

- Soporte = "cuántas ventas $S \cap T$ espero tener"
- Confianza = qué confianza (chances) tengo en que compren el producto T recomendado cuando tienen S.

Reglas de Asociación e items frecuentes

En la práctica:

Ponemos un límite al tamaño de S y T. Por ejemplo $|S| < 3$ y $|T| = 1$, Si compró salchichas y pan ($|S| = 2$), ¿qué le ofrezco? ¿Y si compró ojotas y protector solar?

- Fijamos s (Soporte:=$\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$)
- Fijamos c (Confianza:=$\mathbb{P}(T|S) \geq c$)
- Y damos todas las recomendaciones (T) para todos los conjuntos S compatibles con tener un soporte y una confianza mayor a s y c.

Algoritmo a Priori: $\mathbb{P}(S \cap T) \geq s$

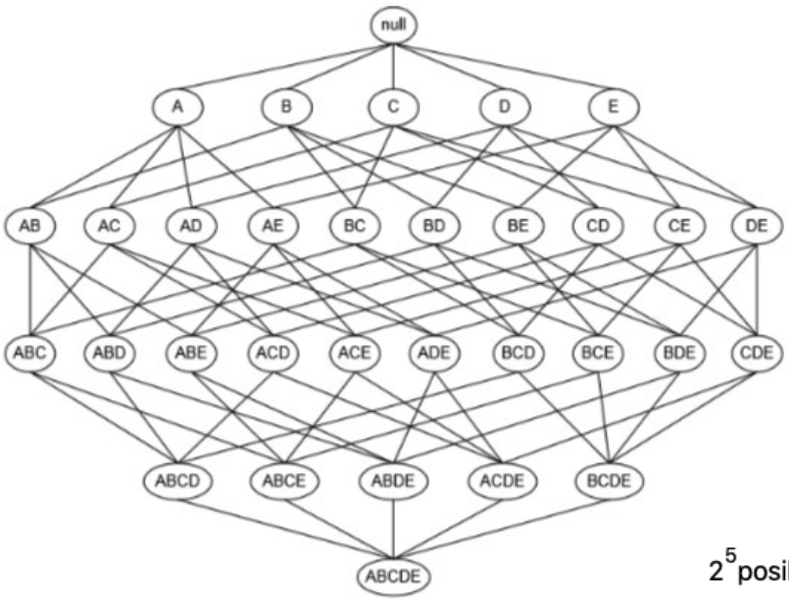
Algoritmo a Priori: $\mathbb{P}(S \cap T) =: \mathbb{P}(Z) \geq s$

Objetivo: Encontrar todos los conjuntos Z (con $|Z| < k$) que cumplen $\mathbb{P}(Z) \geq s$.

Algoritmo A Priori

1. Generar una lista con todos los conjuntos Z de tamaño 1.
2. $k = 1$.
3. Podar (prune) de la lista los candidatos Z de tamaño k que $\mathbb{P}(Z) < s$.
4. Generar todos los conjuntos Z' de tamaño $k+1$ que tienen como subconjunto a los elementos de la lista.
5. $k = k + 1$ y go to 3.

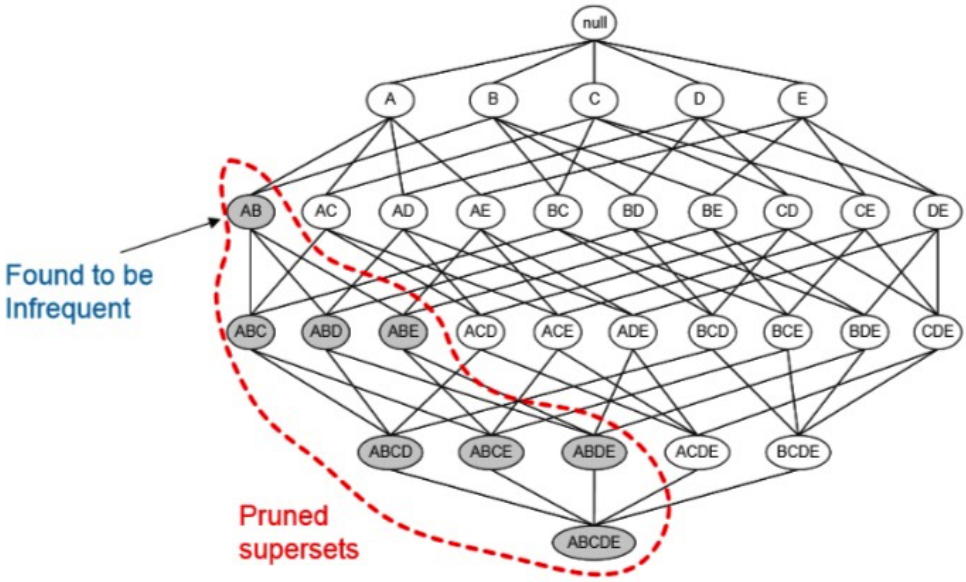
Algoritmo a Priori: $\mathbb{P}(Z) \geq s$



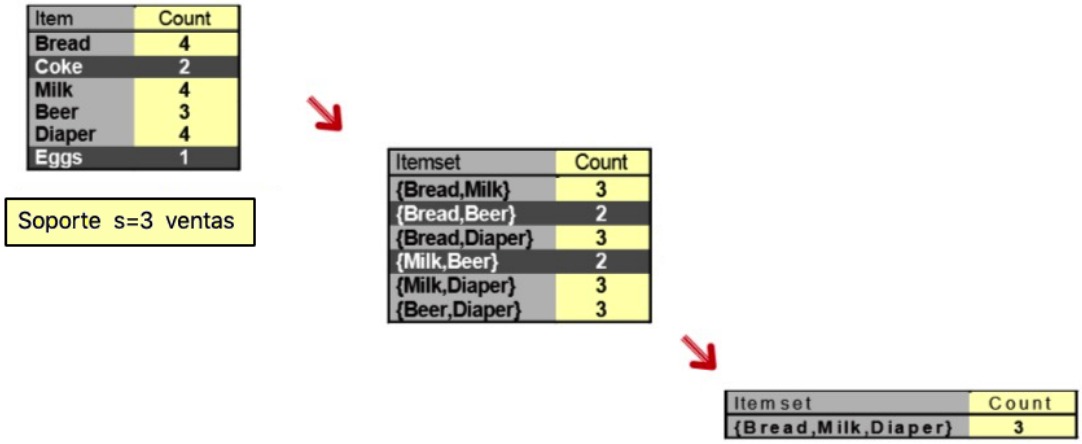
5 items

2^5 posibles compras

Algoritmo a Priori: $\mathbb{P}(Z) \geq s$



Algoritmo a Priori: $\mathbb{P}(Z) \geq s$



Observación:

Propiedad:

Sea Z un conjunto de k items ($|Z| = k$) que tiene soporte c.

- Cualquier subconjunto, Z', no vacío de Z tiene soporte $\geq c$.

Demostración.

Supongamos que Z corresponde a los productos de las primeras k coordenadas del vector de compras.
$s = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots, X_k) = (1, 1, \ldots, 1))$
Z' es un subconjunto de Z, por ejemplo los dos primeros productos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z') =& \mathbb{P}((X_1, X_2) = (1, 1)) \\
=& \sum_{j_1, j_2, \ldots j_{k-2} \in \{0,1\}} \mathbb{P}((X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k) = (1, 1, j_1, j_2, \ldots, j_{k-2})) \\
=& \mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots, X_k) = (1, 1, \ldots, 1)) + \text{probabilidades} \\
=& s + \text{probabilidades} \geq s
\end{aligned}$$

REGLAS DE ASOCIACIÓN

Reglas de Asociación

Una vez que tenemos nuestro listado con los distintos Z con soporte $\geq s$.

1. Particionamos cada Z. $S \cup T = Z$ con $S \cap T = \emptyset$.
2. Calculamos la confianza de la regla $S \rightarrow T$

(si compraste S te recomiendo T)

Reglas de Asociación

Supongamos que el conjunto de items $\{A, B, C\}$ es uno de los que tiene confianza $\geq s$

1. Particionamos $\{A, B, C\}$: $S \to T$
   - $\{A\} \to \{B, C\}$, $\{B\} \to \{A, C\}$, $\{C\} \to \{A, B\}$
     $\{A, B\} \to \{C\}$, $\{A, C\} \to \{B\}$, $\{B, C\} \to \{A\}$
2. Calculamos la confianza de cada una de estas reglas de asociación $S \to T$.
3. Presentamos las que tienen confianza mayor a c.

Reglas de Asociación

Confianza

$Confianza(S \to T) = \mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(T \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{Soporte(S \cup T)}{Soporte(S)}$. (raro, ¿no?)

Reglas de Asociación

Eventos

T =compra los artículos C y D. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, 1, 1, X_5, \ldots, X_N)$
S =compra el artículos A y B. $\mathbf{X} = (1, 1, X_3, X_4, X_5, \ldots, X_N)$
$T \cap S$ = compra los A, B, C, y D. $\mathbf{X} = (1, 1, 1, 1, X_5, \ldots, X_N)$

$$confianza(S \to T) = \mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(T \cap S)}{\mathbb{P}(S)}$$

Conjuntos de artículos

$T = \{C, D\}$.
$S = \{A, B\}$.
$T \cup S = \{A, B, C, D\}$.

$$Confianza(S \to T) = \frac{Soporte(S \cup T)}{Soporte(S)}$$

Reglas de Asociación

Confianza

{Bread, Milk} ⇨ {Diaper} $\frac{\text{Soporte}(\{\text{Bread, Milk,Diaper}\})}{\text{Soporte}(\{\text{Bread,Milk}\})}$ =

Item	Count
Bread	4
Coke	2
Milk	4
Beer	3
Diaper	4
Eggs	1

Soporte s=3 ventas

Itemset	Count
{Bread,Milk}	3
{Bread,Beer}	2
{Bread,Diaper}	3
{Milk,Beer}	2
{Milk,Diaper}	3
{Beer,Diaper}	3

Itemset	Count
{Bread,Milk,Diaper}	3

Reglas de Asociación

Confianza

{Bread, Milk} ⇨ {Diaper} $\frac{\text{Soporte}(\{\text{Bread, Milk,Diaper}\})}{\text{Soporte}(\{\text{Bread,Milk}\})} = \frac{3}{3} = 100\%$

Item	Count
Bread	4
Coke	2
Milk	4
Beer	3
Diaper	4
Eggs	1

Soporte s=3 ventas

Itemset	Count
{Bread,Milk}	3
{Bread,Beer}	2
{Bread,Diaper}	3
{Milk,Beer}	2
{Milk,Diaper}	3
{Beer,Diaper}	3

Itemset	Count
{Bread,Milk,Diaper}	3

Reglas de Asociación

Confianza

{Bread, Milk} ⇨ {Diaper} $\frac{\text{Soporte}(\{\text{Bread, Milk,Diaper}\})}{\text{Soporte}(\{\text{Bread,Milk}\})} = \frac{3}{3} = 100\%$

{Diaper} ⇨ {Bread, Milk} $\frac{\text{Soporte}(\{\text{Bread, Milk,Diaper}\})}{\text{Soporte}(\{\text{Diaper}\})} = \frac{3}{4} = 75\%$

Item	Count
Bread	4
Coke	2
Milk	4
Beer	3
Diaper	4
Eggs	1

Soporte s=3 ventas

Itemset	Count
{Bread,Milk}	3
{Bread,Beer}	2
{Bread,Diaper}	3
{Milk,Beer}	2
{Milk,Diaper}	3
{Beer,Diaper}	3

Itemset	Count
{Bread,Milk,Diaper}	3

Reglas de Asociación con número de items fijos

Una vez que tenemos nuestro listado con los distintos Z con soporte $\geq s$.

1. Particionamos cada Z. $S \cup T = Z$ con $S \cap T = \emptyset$.
2. Calculamos la confianza de la regla $S \rightarrow T$

(si compraste S te recomiendo T)

Al fijar en número de items en la regla de asociación en $|Z|$. Donde $S \cup T = Z$ podemos podar el arbol de reglas de decisión.

Reglas de Asociación con número de items fijos

Al fijar en número de items en la regla de asociación en $|Z|$. Donde $S \cup T = Z$ podemos podar el arbol de reglas de decisión.

Supongamos que $Z = \{A, B, C, D\}$. Las posibles reglas son:

- $\{A\} \leftrightarrows \{B, C, D\}$,$\{B\} \leftrightarrows \{A, C, D\}$, $\{C\} \leftrightarrows \{A, B, D\}$, $\{D\} \leftrightarrows \{A, B, C\}$
- $\{A, B\} \leftrightarrows \{C, D\}$,$\{A, C\} \leftrightarrows \{B, D\}$, $\{A, D\} \leftrightarrows \{B, C\}$

Propiedad:

Sea $S_1 \cup T_1 = Z$ y $S_2 \cup T_2 = Z$ con $dim(S_1) > dim(S_2)$. Se cumple

$$Confianza(S_1 \rightarrow T_1) \geq Confianza(S_2 \rightarrow T_2)$$

Reglas de Asociación con número de items fijos

Propiedad:

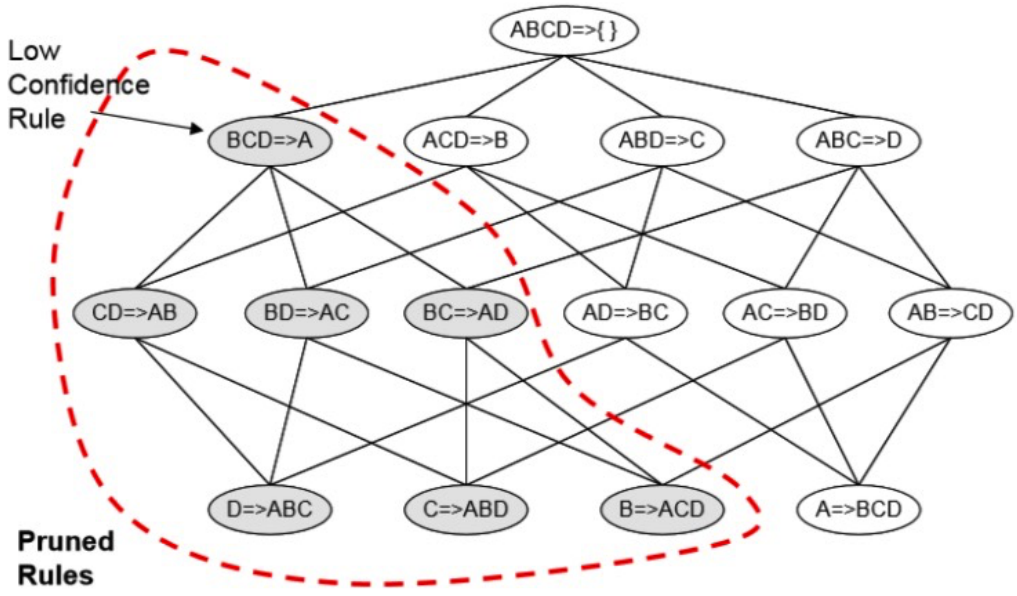
Sea $S_1 \cup T_1 = Z$ y $S_2 \cup T_2 = Z$ con $dim(S_1) > dim(S_2)$. Se cumple

$$Confianza(S_1 \rightarrow T_1) \geq Confianza(S_2 \rightarrow T_2)$$

Demostración.

$Confianza(S_k \rightarrow T_k) = \frac{Soporte(Z)}{Soporte(S_k)}$ y como
$Soporte(S_k) \geq Soporte(S_{k-1})$ □

Pruning de Reglas de Asociación



Alternativas a la Confianza: Lift, Leverage

Confianza vs Lift

Confianza:

$$Confianza(S \to T) = \mathbb{P}(T|S)$$

Problema: ¿ Qué pasa si T se compra casi siempre?

- Entonces $\mathbb{P}(T|S)$ probablemente sea alto.
- Peor aún si S y T son indep ($\mathbb{P}(T|S) = \mathbb{P}(T)$) S no predice nada.

Lift:

$$Lift(S \to T) = \frac{\mathbb{P}(T|S)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{Confianza(S \to T)}{Soporte(T)}$$

- S y T son indep $\leftrightarrow Lift(S \to T) = 1$.
- Recomendamos $S \to T$ cuando Lift > 1.

Confianza vs Lift

Comparación

- Confianza: medida que dice las chances de que se compre T cuando compraste S.
- Lift: medida que compara el grado de dependencia entre S y T. Mide cuán buena es la regla respecto al azar.

Otras medidas

Coverage:

$$Coverage(S \to T) = \mathbb{P}(S) = Soporte(S) = \frac{Soporte(S \to T)}{Confianza(S \to T)} = \frac{\mathbb{P}(S \cap T)}{\mathbb{P}(T|S)}$$

Leverage:

$$Leverage(S \to T) = \mathbb{P}(S \cap T) - \mathbb{P}(S)\,\mathbb{P}(T)$$

$$Leverage(S \to T) = soporte(S \cup T) - soporte(S)soporte(T)$$

Added Value:

$$AD(S \to T) = \mathbb{P}(T|S) - \mathbb{P}(T) = confianza(S \to T) - soporte(T)$$

Reglas de Asociación con 

Paquete *arules*

```
> transacciones = read.transactions(file = "datos_groceries.csv",
format = "single", sep = ",",header = TRUE, cols = c("id_compra",
ïtem"), rm.duplicates = TRUE)
> soporte=0.1; confianza=0.7
> reglas=apriori(data = transacciones, parameter = list(Support =
soporte,confidence = confianza)) #, minlen = 3, maxlen = 5
> inspect(reglas)
```


Resumen

- Confianza: medida que dice las chances de que se compre T cuando compraste S.
- Lift: medida que compara el grado de dependencia entre S y T. Mide que tan buena es la regla respecto al azar.
- Soporte de la regla: indica el impacto en término de ventas totales.