Probabilidad y análisis de datos

Daniel Fraiman

Variables aleatorias continuas

1. Supongamos que la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Utilizando R calcular $P(0{,}1 \leq X \leq 0{,}5)$.

2. Sea X una variable aleatoria uniforme en $[a, b]$. Hallar su función de distribución acumulada.

3. Supongamos que la duración de un componente electrónico sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$. Utilizando R:

   (a) Hallar la probabilidad de que la duración sea menor a 2.
   (b) Hallar la probabilidad de que la duración esté entre 2 y 8.
   (c) Hallar t tal que la probabilidad de que la duración sea mayor a t es 0.25.

4. Sea T una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Utilizando R, determinar en forma aproximada λ para que se cumpla $P(T < 1) = 0{,}05$.

5. El ingreso anual de los jefes de familia de una cierta ciudad se puede modelar con una distribución exponencial con $\lambda = 0{,}00001$. Para clasificar a los hogares de esa ciudad se ha decidido dividir a la población en 5 grupos igualmente numerosos: clase baja, clase media-baja, clase media, clase media-alta y clase alta de modo que el 20 % de la población pertenezca a cada uno de ellos, es decir, el 20 % de los hogares con menores ingresos entran dentro de la clase baja, el segundo 20 % será clasificado dentro de la clase media-baja, etc. Hallar los salarios que indican el salto de categoría.
   Observación: Los valores hallados representan los cuantiles 0.20, 0.40, 0.60 y 0.80 respectivamente.

6. Sea X una variable aleatoria normal con $\mu = 5$ y $\sigma = 10$. Hallar con R:

   (a) $P(X < 0)$, $P(X > 10)$, $P(X \geq 15)$.
   (b) $P(-20 < X < 15)$, $P(-5 \leq X \leq 30)$.
   (c) el valor de x tal que $P(X > x) = 0{,}05$.
   (d) el valor de x tal que $P(X < x) = 0{,}23$.

7. Sea T una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 2$.

(a) Sea X una variable aleatoria discreta definida del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} X = 0 & \text{si } 0 \leq T < 1 \\ X = 1 & \text{si } 1 \leq T < 2 \\ X = 2 & \text{si } T \geq 2 \end{array}$$

Utilizando R hallar la función de frecuencia de X.

(b) Sea Y una variable aleatoria discreta definida del siguiente modo:

$$Y = k \quad \text{si} \quad k \leq T < k + 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Utilizando R hallar la función de probabilidad de Y. ¿Le suena conocida la variable Y?, ¿qué ley tiene Y?

8. La función de distribución acumulada de Cauchy es

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Graficar en R para probar que efectivamente es una función de distribución acumulada.

(b) Hallar x tal que $P(X > x) = 0{,}1$.