

# Probabilidad

Daniel Fraiman

Maestría en Ciencia de Datos, Universidad de San Andrés

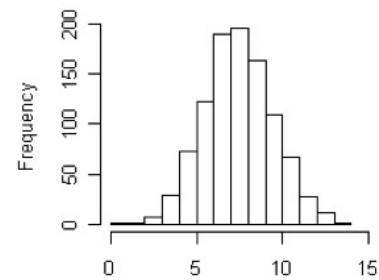
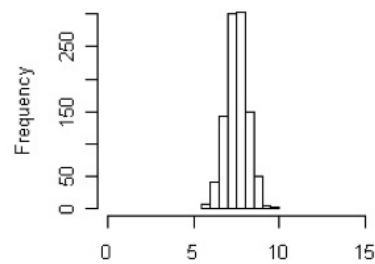
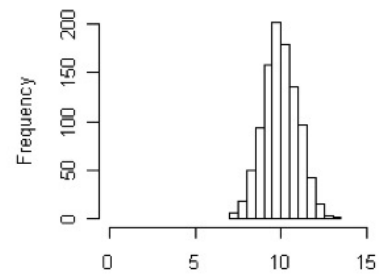
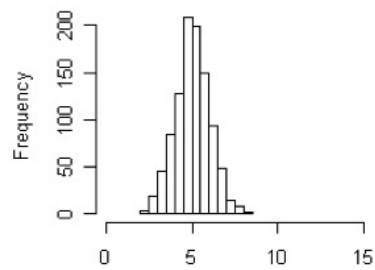
1 / 24

## Esperanza y Varianza

- Esperanza: nos dice dónde está “centrada” la variable
- Varianza: nos dice cuán diferentes son los valores que toma.

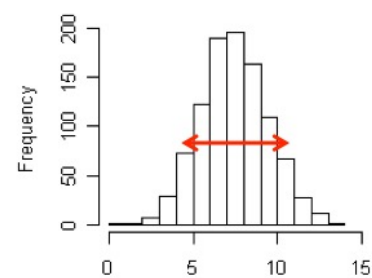
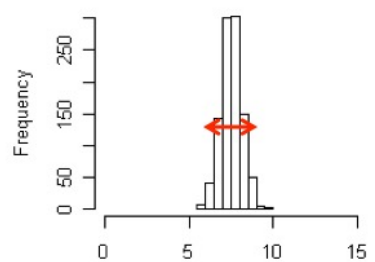
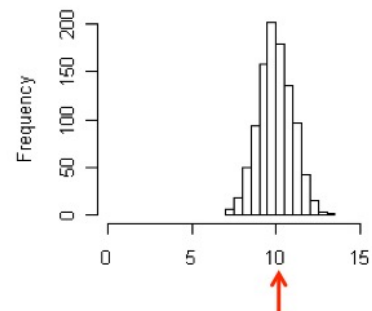
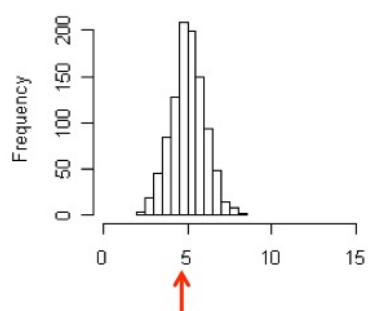
2 / 24

# Esperanza y Varianza



3/24

# Esperanza y Varianza

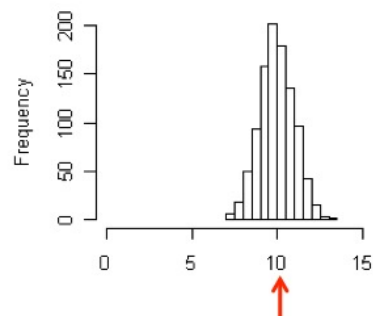
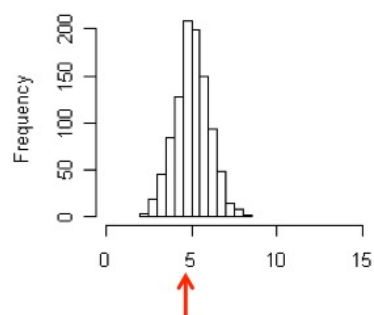


4/24

# ESPERANZA DE VARIABLES ALEATORIAS

5/24

## Esperanza



6/24

# Esperanza

## Variables Discretas

Sea  $X$  una v.a. discreta que toma los valores  $x_1, x_2, \dots$ , con probabilidades  $p_X(x_1), p_X(x_2), \dots$ , denominamos **esperanza** ó **valor esperado** de  $X$  al número

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_X(x_i),$$

siempre que  $\sum_i |x_i| p_X(x_i) < \infty$ . Si diverge, la esperanza no está definida.

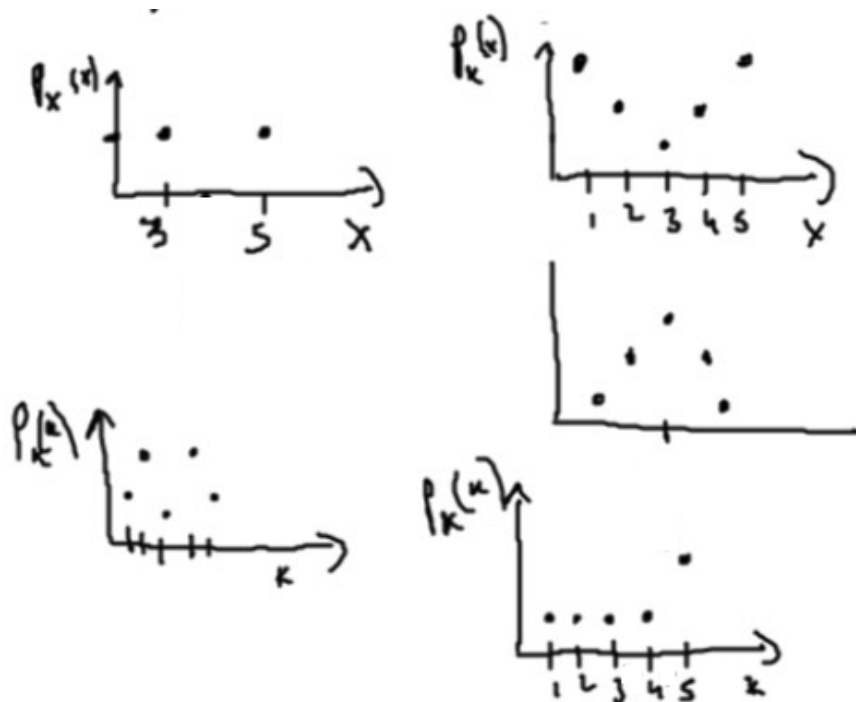
## Ejemplo

$X = \{0, 2, 4\}$  con  $\mathbb{P}(X = 0) = 0,2$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 0,5$ ,  $\mathbb{P}(X = 4) = 0,3$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,3 = 2,2$$

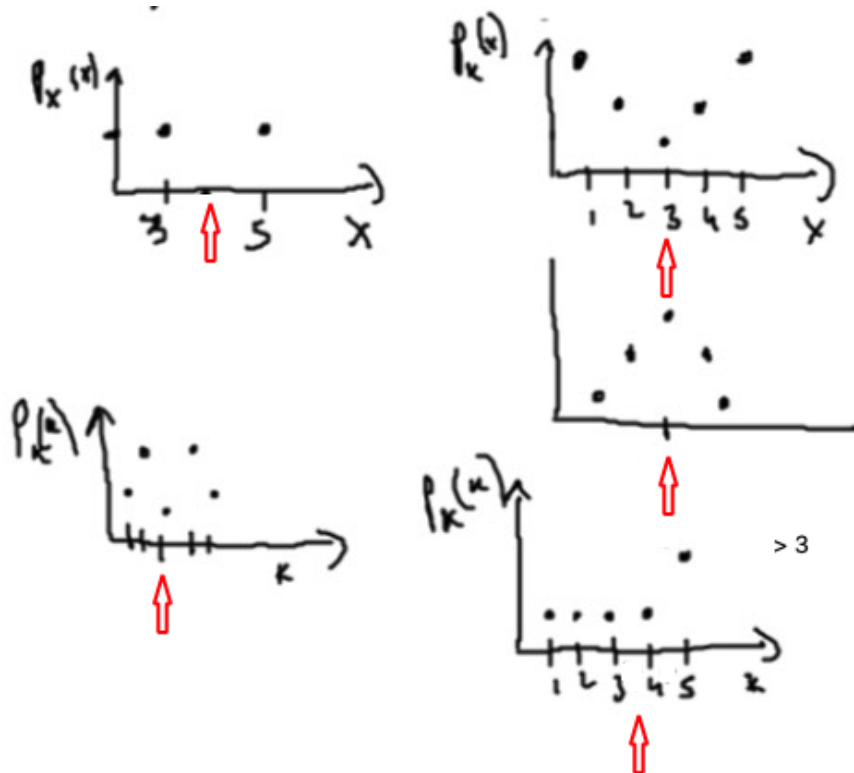
7/24

## Esperanza: “centro de gravedad”



8/24

## Esperanza: “centro de gravedad”



9/24

## Esperanza

### Variables Discretas

Sea  $X$  una v.a. continua con densidad  $f_X(x)$  denominamos **esperanza** ó **valor esperado** de  $X$  al número

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

siempre que  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ . Si diverge, la esperanza no está definida.

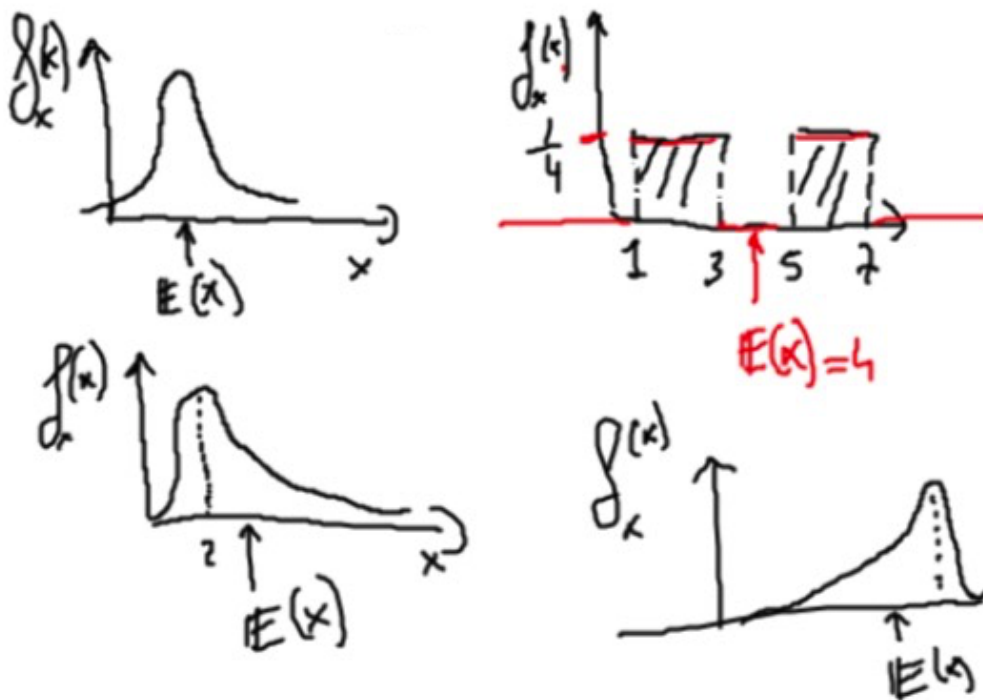
### Ejemplo

$$f_X(x) = 2 \cdot x \cdot 1_{\{0 < x < 1\}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

10/24

## Esperanza: “centro de gravedad”



11/24

## Algunos resultados sobre la Esperanza

### Esperanza de una suma de v.a.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. y  $a_0, a_1, \dots, a_n$  constantes,

$$\mathbb{E} \left( a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i)$$

### Binomial

Sea  $X \sim Bi(n, p)$ ,  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  con  $X_i \sim Bernoulli(p)$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = np$$

12/24

## Algunos resultados sobre la Esperanza

### Esperanza de una función de una variable aleatoria

Sea  $X$  una variable aleatoria y sea  $Y = g(X)$ .

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p_X x_i & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

### Ejemplo

Sea  $X \sim U[1, 3]$ , e  $Y = X^2$ , hallar  $\mathbb{E}(Y)$ .

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_1^3 x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{26}{6}$$

13 / 24

## Esperanza

### Por las dudas

①  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$

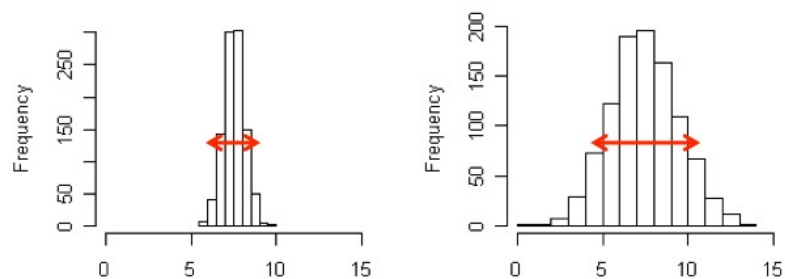
② Sean  $X$  e  $Y$  v.a.  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c.$

14 / 24

# VARIANZA DE VARIABLES ALEATORIAS

15/24

## Varianza



16/24



## Varianza

### Definición

Si  $X$  es una variable aleatoria que tiene esperanza, se define su **varianza** como el número

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

siempre que esta esperanza exista.

- $\text{Var}(X) \geq 0$ .

### Definición

Se denomina **desviación estándar** de  $X$  a

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

17/24

## Varianza

### Ejemplo v.a. discreta

$X = \{0, 2, 4\}$  con  $\mathbb{P}(X = 0) = 0,2$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 0,5$ ,  $\mathbb{P}(X = 4) = 0,3$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,3 = 2,2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}((X - 2,2)^2) \\ &= (0 - 2,2)^2 \times 0,2 + (2 - 2,2)^2 \times 0,5 + (4 - 2,2)^2 \times 0,3 \\ &= 1,96\end{aligned}$$

18/24

## Ejemplo v.a. continua

$X \sim U[0, 2]$ , entonces  $\mathbb{E}(X) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}((X - 1)^2) \\ &= \int_0^2 (x - 1)^2 \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

¿Hace sentido este valor? ¿cuánto vale el desvío estándar?

# Esperanzas y Varianzas

$X$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
<b>Discretas</b>		
$\text{Bernoulli}(p)$	$p$	$p(1 - p)$
$\text{Bi}(n, p)$	$np$	$np(1 - p)$
$\text{Ge}(p)$	$1/p$	$(1 - p)/p^2$
$\text{Poisson}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
<b>Continuas</b>		
$U[a, b]$	$(a+b)/2$	$(b - a)^2/12$
$\text{Exp}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$\alpha/\lambda$	$\alpha/\lambda^2$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$

## Algunos resultados sobre la Varianza

### Teorema

Sea  $X$  una v.a. con  $\mathbb{E}(X)$ , se cumple:

- $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$  (otra forma de calcular  $Var(X)$ )
- $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

21 / 24

## Algunos resultados sobre la Varianza

### Definición: variables independientes

Decimos que las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son **independientes** si para todo  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  vale

$$P(X_1 \leq x_1 \cap \dots \cap X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n).$$

### Varianza de una suma de v.a independientes

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. independientes  $\rightarrow Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$

### Binomial

Sea  $X \sim Bi(n, p)$ ,  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  con  $X_i \sim Bernoulli(p)$

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = np(1 - p)$$

22 / 24

## Promedios y Sumas de variables aleatorias

### Esperanza y varianza de un promedio

A partir de las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  construimos una nueva v.a.:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} =: \frac{S_n}{n}$$

Por las propiedades,

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_n)}{n}.$$

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_n).$$

Si todas las variables tienen la misma esperanza,  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ , entonces

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(S_n) = n\mu$$

.

23 / 24

## Promedios y Sumas de variables aleatorias

### Esperanza y varianza de un promedio

Si además  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes entonces,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\text{Var}(X_1 + \dots + X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)}{n^2}. \end{aligned}$$

$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$ . Si además todas las variables tienen la misma varianza,  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ , entonces

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{y} \quad \text{Var}(S_n) = n\sigma^2.$$

24 / 24