Programación y Análisis de Datos

Integrales, derivadas, máximos y mínimos

Daniel Fraiman

Maestría en Ciencia de Datos, Universidad de San Andrés

Una aproximación histórica

Plan

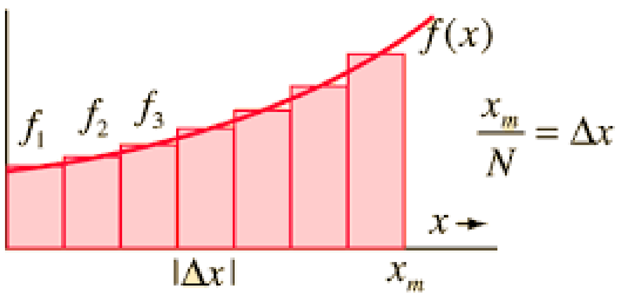
Para funciones de una variable, $f(x)$, vamos a estudiar:

- integrales
- derivadas
- máximos y mínimos

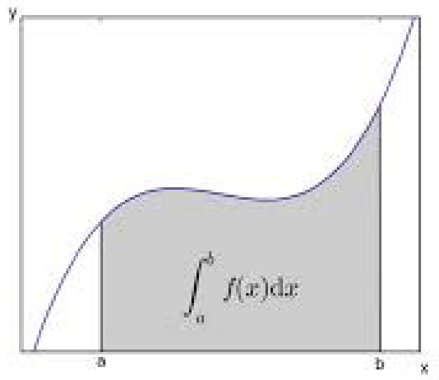
Finalmente daremos un pantallazo sobre cómo integrar y buscar máximos y mínimos para funciones de varias variables, $f(x, y, z)$.

INTEGRALES

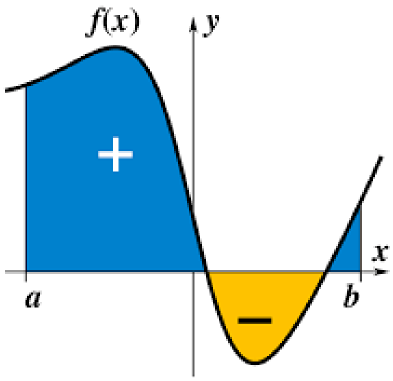
Integrales



Integrales



Integrales



Integrales

Integrales

- Las integrales pueden estar definidas sobre un conjunto acotados o sobre un conjunto no acotado.
- No siempre existe la integral (parece raro, ¿no?).
- Cuando existe la integral puede dar un número o dar ∞.

Si la integral existe y ...

- la función es positiva, la integral es el área encerrada entre la curva y el eje x.
- la función es negativa, la integral es *menos* el área encerrada entre la curva y el eje x.

Integrales

Probabilidad

En probabilidad se usa la integral de Lebesgue que permite resolver algunos problemas para los que la integral de Riemann no está definida. La integral de Lebesgue sobre todas las funciones de interés del curso coincide con la integral de Riemann, por lo tanto no nos preocuparemos.

Notación integrales

Notación

$$\int_a^b f(x)dx$$

Notación

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Propiedades

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ donde $c \in [a,b]$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)$ (linealidad de la integral)

Integrales en R

$$\int_0^1 2xdx$$

¿Cómo integrar una función en R?

```
> f<-function(x){2*x}
> integrate(f,0,1)
```

```
> integrate(dnorm,0,Inf)
```

Integrales en la maestría

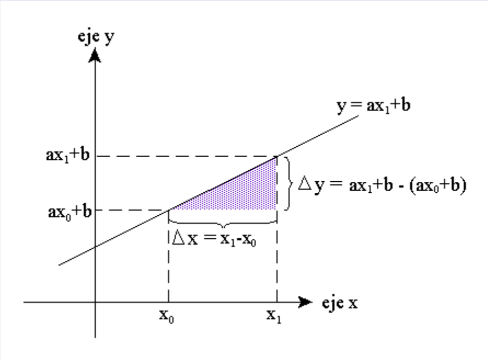
¿Cuándo usaremos integrales?

Principalmente para calcular probabilidades de que ocurren ciertos eventos.

DERIVADAS

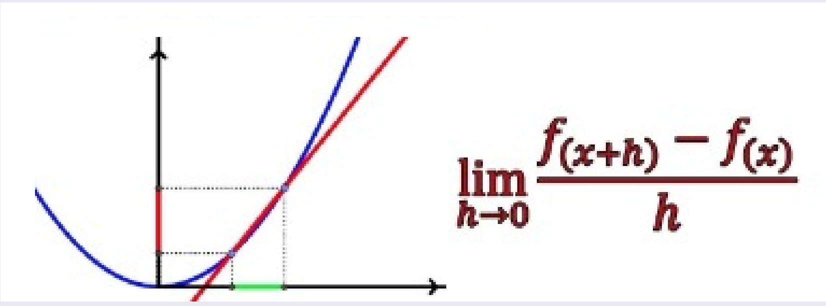
Derivadas

Empezamos con la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$: $y = ax + b$



Derivadas

Pendiente de la recta tangente a una función f en un punto.



Derivadas

$f(x) = x^2$ queremos determinar la pendiente de la recta tangente en $x = 3$ (punto (3,9))

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3^2+6h+h^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} 6+h = 6$$

- La pendiente de la recta tangente a la function x^2 en $x = 3$ vale 6.

Derivadas

¿Cómo espera que sea la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en un punto arbitrario x?

Haga un dibujo a mano

Derivadas

Calculemos pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en un punto arbitrario x

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

Verifique en R que la derivada de x^2 es $2x$

Pasos:

1. Grafique la función x^2 en el intervalo $[-4, 4]$. plot
2. Tome un punto que pertenezcan a la función y calcule la recta.
3. Grafique la recta tangente con otro color. abline
4. Repita 2 y 3 con otros puntos.

Notación derivadas

Notación

- $f'(x)$ es la derivada de la función $f(x)$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada de la función $f(x)$.

Derivadas en R

¿Cómo calcular la derivada en R?

> derivada <-D(expression(x^2), “x”)

Para evaluar la derivada en un punto

> x<-2

> eval(derivada)

Muchas veces estamos interesados en encontrar el mínimo. optimize

> f <- function(x){ $2x^2 + 3x + 4$}

> optimize(f, lower = -20, upper = 20) # encuentra el minimo entre -20 y 20

Derivadas en la maestría

¿Cuándo usaremos derivadas?

Principalmente para entender los algoritmos de minimización (maximización) que aparezcan a lo largo de toda la cursada.

Derivadas en la maestría

Machine Learning y Regresión

X [datos]	Y [datos]	$f_\theta(X)$ [modelo]
(1.2,3.3,2.1)	8.1	f_θ((1.2,3.3,2.1))
(3.4,1.5,1.8)	5.8	f_θ((3.4,1.5,1.8))

X [datos]	Y [datos]	$f_\theta(X)$ [modelo]
imagen1	gato	f_θ(imagen1)
imagen2	perro	f_θ(imagen2)

¿Qué le pedimos a f_θ?

$f_\theta(X)$ sea parecido al verdadero Y, que la error (o la distancia) entre $f_\theta(X)$ e Y sea el *menor* posible.
Donde habrá que definir a que llamamos "error" (error de predicción, error basado en la muestra, que tipo de error usar, etc).

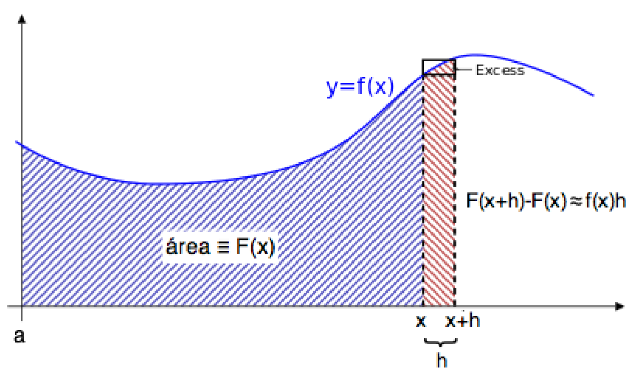
Derivadas en la maestría

Inferencia estadística

Vamos a ver métodos de estimación que maximizan la probabilidad de observar lo que se observó.

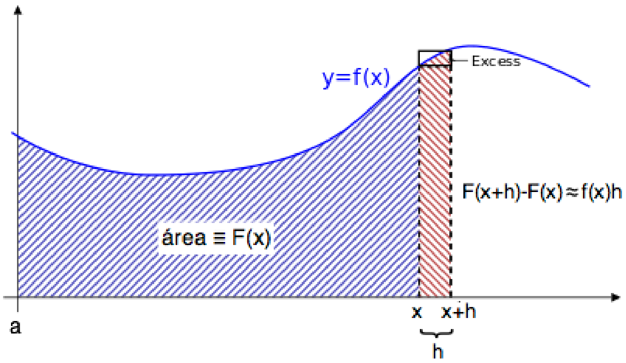
RELACIÓN ENTRE DERIVADAS E INTEGRALES

Relación entre derivadas e integrales



$$\text{Área desde } a \text{ hasta } x = \int_a^x f(y)dy \equiv F(x)$$

Relación entre derivadas e integrales



$$\text{Área desde } a \text{ hasta } x = \int_a^x f(y)dy \equiv F(x)$$

$$f(x)h \approx F(x+h) - F(x)$$

$$f(x) \approx \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{?}{\leftrightarrow} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

¿La integral es la "antiderivada"?

¿Es cierto este resultado?

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

Este resultado dice que si derivamos la integral hasta x (primitiva) obtenemos la función a integrar (integrando).

Ejemplo: $f(x) = 2$

$$F(x) = \int_a^x 2dx = 2(x-a)$$

Hacer un dibujo y ahora calcular a ojo la pendiente de la recta tangente.

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} \overset{?}{=} f(x)$$

¿La integral es la "antiderivada"?

Theorem (Fundamental del cálculo)

Dada una función f integrable sobre el intervalo $[a,b]$, definimos F sobre $[a,b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si f es continua en $c \in (a,b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Theorem (Regla de Barrow)

Dada una función $f(x)$ integrable en el intervalo $[a,b]$ y sea $F(x)$ cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Extremos e integrales de funciones en varias variables

Extremos para funciones en varias variables

Mínimos

```
> f<-function(x){t(x)%*%x}
> semilla <- c(1,1,1,1) # donde empieza a buscar el mínimo
> optim(semilla,f, method = "L-BFGS-B")
```


Integrales funciones en varias variables

Integrales

```
> library(pracma)
> fun <- function(x, y) {cos(x) * cos(y) }
> xmin <- 0; xmax <- 1
> ymin <- 0; ymax <- 1
> integral2(fun, xmin, xmax, ymin, ymax)
```

Integrales

```
> library(pracma)
> xmin <- 0; xmax <- 1
> ymin <- 0; ymax <- function(x) { sqrt(1 - x^2) }
> integral2(f, xmin, xmax, ymin, ymax)
```